

Suy ra

$$VT > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

c) Đặt $P = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ta có: $\frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Từ đó suy ra

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \text{ hay}$$

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{2}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

Do đó: $2\left[(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\right] < T$ và

$$T < 1 + 2\left[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\right].$$

Hay $2\sqrt{n} - 2 < T < 2\sqrt{n} - 1$.

Ví dụ 8)

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} = \frac{3}{2}. \text{ Chứng minh rằng:}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}.$$

a) Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3. \text{ (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán- Trường chuyên ĐHSPT Hà Nội 2014)}$$

Lời giải:

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-a^2} \leq \frac{a^2+1-b^2}{2} + \frac{b^2+1-c^2}{2} + \frac{c^2+1-a^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = \sqrt{1-b^2} \\ b = \sqrt{1-c^2} \\ c = \sqrt{1-a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1-b^2 \\ b^2 = 1-c^2 \\ c^2 = 1-a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2} \text{ (đpcm)}.$$

b) Ta viết lại giả thiết thành: $2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} = 6.$

Áp dụng bất đẳng thức: $2ab \leq a^2 + b^2$ ta có:

$$2x\sqrt{1-y^2} + 2y\sqrt{2-z^2} + 2z\sqrt{3-x^2} \leq x^2 + 1 - y^2 + y^2 + 2 - z^2 + z^2 + 3 - x^2 = 6$$

. Suy ra $VT \leq VP$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ

khi:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{2-z^2} \\ z = \sqrt{3-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y = 0; z = \sqrt{2}$$

Ví dụ 9) Cho $A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$

a) Rút gọn A . Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải:

a) Điều kiện để biểu thức A xác định là $x > 4$.

$$A = \frac{x \left(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2} \right)}{\sqrt{(x-4)^2}} = \frac{x \left(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2| \right)}{|x-4|} = \frac{x \left(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2| \right)}{x-4}$$

+ Nếu $4 < x < 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 < 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4})}{x-4} = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$$

Do $4 < x < 8$ nên $0 < x-4 < 4 \Rightarrow A > 8$.

+ Nếu $x \geq 8$ thì $\sqrt{x-4}-2 \geq 0$ nên

$$A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2)}{x-4} = \frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{16} = 8$$

(Theo bất đẳng thức Cô si). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$2\sqrt{x-4} = \frac{8}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 8.$$

Vậy GTNN của A bằng 8 khi $x = 8$.

b) Xét $4 < x < 8$ thì $A = 4 + \frac{16}{x-4}$, ta thấy $A \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi

$$\frac{16}{x-4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-4 \text{ là ước số nguyên dương của } 16. \text{ Hay}$$

$x - 4 \in \{1; 2; 4; 8; 16\} \Leftrightarrow x = \{5; 6; 8; 12; 20\}$ đối chiếu điều kiện suy ra $x = 5$ hoặc $x = 6$.

+ Xét $x \geq 8$ ta có: $A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}$, đặt $\sqrt{x-4} = m \Rightarrow \begin{cases} x = m^2 + 4 \\ m \geq 2 \end{cases}$ khi đó ta có:

$$A = \frac{2(m^2 + 4)}{m} = 2m + \frac{8}{m} \text{ suy ra } m \in \{2; 4; 8\} \Leftrightarrow x \in \{8; 20; 68\}.$$

Tóm lại để A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{5; 6; 8; 20; 68\}$.

MỘT SỐ BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. (Đề thi vào lớp 10 thành phố Hà Nội – năm học 2013-2014)

Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}}$.

- 1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tính x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Câu 2. (Đề thi năm học 2012 -2013 thành phố Hà Nội)

- 1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 2}$. Tính giá trị của biểu thức A .
- 2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} + \frac{4}{\sqrt{x} - 4} \right) : \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 2}$ (với $x \geq 0, x \neq 16$)
- 3) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $B(A - 1)$ là số nguyên.

Câu 3. (Đề thi năm học 2011 -2012 thành phố Hà Nội).

Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x \geq 0, x \neq 25$.

- 1) Rút gọn biểu thức A
- 2) Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- 3) Tìm x để $A < \frac{1}{3}$.

Câu 4. (Đề thi năm học 2010 -2011 thành phố Hà Nội).

Cho $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0, x \neq 9$.

- 1) Rút gọn P .
- 2) Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{3}$.
- 3) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Câu 5. (Đề thi năm học 2014 – 2015 Thành phố Hồ Chí Minh)

Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{5}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$B = \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) \quad (x > 0).$$

Câu 6. (Đề thi năm học 2013 – 2014 TPHCM)

Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{3}{\sqrt{x-3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x+3}}{x+9} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9.$$

$$B = 21 \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \right)^2 - 6 \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{5}} \right)^2 - 15\sqrt{15}.$$

Câu 7. (Đề thi năm 2014 – 2015 TP Đà Nẵng)

Rút gọn biểu thức $P = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{x+x\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2x-2}}{x-2}$, với $x > 0, x \neq 2$.

Câu 8. (Đề thi năm 2012 – 2013 tỉnh Bình Định)

Cho $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$ và

$$B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{35}}.$$

Chứng minh rằng $B > A$.

Câu 9. (Đề thi năm 2014 – 2015 tỉnh Ninh Thuận)

Cho biểu thức $P = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2} \cdot \frac{x+y}{x^2 - y^2}$, $x \neq y$.

1) Rút gọn biểu thức P .

2) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ và $y = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Câu 10. (Đề thi năm 2014 – 2015, ĐHSPTN)

Cho các số thực dương a, b ; $a \neq b$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} = 0.$$

Câu 11. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Hùng Vương Phú Thọ)

$$A = \frac{x + \sqrt{x} - 6}{x - 9} + \frac{x - 7\sqrt{x} + 19}{x + \sqrt{x} - 12} - \frac{x - 5\sqrt{x}}{x + 4\sqrt{x}}; x > 0, x \neq 9.$$

Câu 12. (Đề thi năm 2014 – 2015 tỉnh Tây Ninh)

Cho biểu thức $A = \frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{1}{2 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4 - x}$ ($x \geq 0, x \neq 4$).

Rút gọn A và tìm x để $A = \frac{1}{3}$.

Câu 13. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi).

1) Cho biểu thức $P = \frac{3}{\sqrt{x-3} - \sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1}$. Tìm tất cả các giá trị của x để $P > 2$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - 1$ (m là tham số). chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \geq 2$.

Câu 14. (Đề thi năm 2014 – 2014 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa)

Cho biểu thức $C = \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$.

- 1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C .
- 2) Tính giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$.

Câu 15. (Đề thi năm 2014 – 2015 chuyên Thái Bình tỉnh Thái Bình)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$

$(x > 0, x \neq 4)$.

- 1) Rút gọn biểu thức A .
- 2) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 16. (Đề năm 2014 – 2015 Thành Phố Hà Nội)

1) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, khi $x = 9$.

2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Câu 17) Cho $a = \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} + \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Chứng minh rằng $a^2 - 2a - 2 = 0$.

Câu 18) Cho $a = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

Tính giá trị của biểu thức: $T = \frac{a^2 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}$.

Câu 19) Giả thiết $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = a$.

Chứng minh rằng:

$$x\sqrt{\frac{(a+y^2)(a+z^2)}{a+x^2}} + y\sqrt{\frac{(a+z^2)(a+x^2)}{a+y^2}} + z\sqrt{\frac{(a+x^2)(a+y^2)}{a+z^2}} = 2a.$$

Câu 20. Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}}} + 1$.

a) Chứng minh rằng: $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$.

b) Giả sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

Câu 21. Cho $a = \sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38 - 17\sqrt{5}}$.

Giả sử có đa thức $f(x) = (x^3 + 3x + 1940)^{2016}$. Hãy tính $f(a)$.

Câu 22. Cho biểu thức $f(n) = \frac{2n+1 + \sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$.

Tính tổng $S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2016)$.

Câu 23) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$1 \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}.$$

Câu 24) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 3$, ta có

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{65}{54}.$$

Câu 25) Chứng minh rằng:

$$\frac{43}{44} < \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2002\sqrt{2001}+2001\sqrt{2002}} < \frac{44}{45}$$

(Đề thi THPT chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm 2001-2002)

Câu 26) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Câu 27) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 2$, ta có:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} < \frac{1}{3\sqrt{n+1}}.$$

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN CHỦ ĐỀ 1

1). Lời giải:

$$1) \text{ Với } x=64 \text{ ta có } A = \frac{2+\sqrt{64}}{\sqrt{64}} = \frac{2+8}{8} = \frac{5}{4}.$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (x+\sqrt{x}) + (2\sqrt{x}+1) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot (x+\sqrt{x})} = \frac{x\sqrt{x}+2x}{x\sqrt{x}+x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Với } x > 0, \text{ ta có: } \frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2 > 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \text{ (do } x > 0).$$

2. Lời giải:

1) Với $x=36$, ta có $A = \frac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

2) Với $x \geq 0, x \neq 16$ ta có:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16} \right) \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

3) Biểu thức $B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \left(\frac{\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right) = \frac{2}{x-16}$

$B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là ước của 2, mà $U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$. Ta có bảng giá trị tương ứng:

Kết hợp điều kiện, để $B(A-1)$ nguyên thì $x \in \{14; 15; 16; 17\}$.

3). Lời giải:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5} = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+5) - 10\sqrt{x} - 5 \cdot (\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\ &= \frac{x+5\sqrt{x}-10\sqrt{x}-5\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} = \frac{x-10\sqrt{x}+25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-5)^2}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}. \text{ Với } x=9 \text{ ta có: } \sqrt{x}=3. \text{ Vậy} \end{aligned}$$

$$A = \frac{3-5}{3+5} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}.$$

4). Lời giải:

$$1) P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x - 9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

$$2) P = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{x}+3 = 9 \Leftrightarrow x = 36 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$3) \text{ Với } x \geq 0, P = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{3}{0+3} = 1 \Rightarrow P_{\max} = 1 \text{ khi } x = 0 \text{ (TM).}$$

5. Lời giải:

$$\begin{aligned} A &= \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} - \frac{3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ &= \frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} + \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{3\sqrt{5}(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\ &= 3\sqrt{5} - 5 + \frac{5+\sqrt{5}}{4} - \frac{9\sqrt{5}-15}{4} = 3\sqrt{5} - 5 + \frac{5+\sqrt{5}-9\sqrt{5}+15}{4} \\ &= 3\sqrt{5} - 5 + 5 - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{x}{x+3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x+3\sqrt{x}} \right) (x > 0) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} : \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)} \right) = (\sqrt{x}+1) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = 1. \end{aligned}$$

6. Lời giải: