Chuyên đề: MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC CHỨNG MINH ĐIỂM CỐ ĐỊNH

A/ CƠ SỞ LÝ LUẬN:

* Trong chương trình hình học lớp 9, có một số bài toán chứng minh đường thẳng hoặc đường tròn đi qua điểm cố định. Những bài toán hình học chứng minh đi qua điểm cố định là những bài toán khó. Các bài toán dạng này thường được để bồi dưỡng thi học sinh giỏi.
* Trong các bài toán chứng minh đi qua điểm cố định, dựa vào kiến thức của tứ giác nội tiếp đường tròn để giải.
* Kiến thức về tứ giác nội tiếp đường tròn là kiến thức trọng tâm của chương trình hình học lớp 9.
* Chuyên đề được sử dụng cho học sinh lớp 9, bồi dưỡng học sinh giỏi. Tuy vậy đối với học sinh khá cũng có thể tiếp cận và làm được.

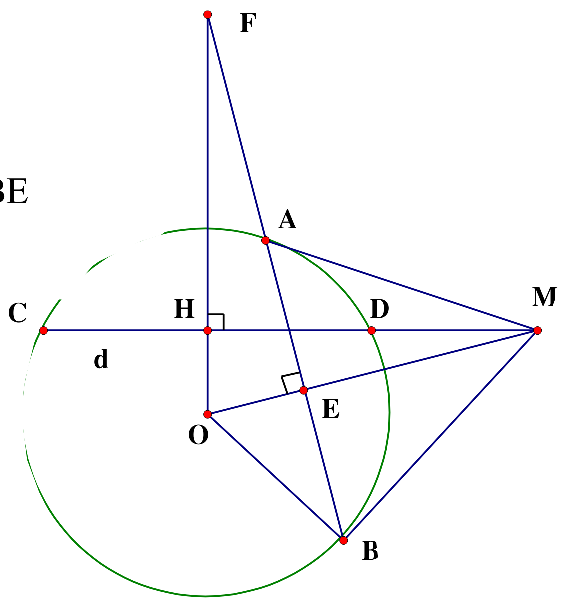
B/ NỘI DUNG ĐỀ TÀI:

I/ CÁC BƯỚC CỦA PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH.

+ ***Bước 1***: Xác định rõ các yếu tố cố định đã biết.
+ ***Bước 2***: Xác định tứ giác nội tiếp liên quan đến điểm cố định.
+ ***Bước 3***: Chứng minh đường thẳng hoặc đường tròn đi qua điểm cố định.

II/ CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH.

Bài 1. Cho đường tròn (O) bán kính R và một đường thẳng d cắt (O) tại C, D. Một điểm M di động trên d sao cho MC > MD và ở ngoài đường tròn (O). Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm). Chứng minh đường thẳng AB đi qua điểm cố định.



Giải:

Gọi H là trung điểm CD và giao điểm của AB với MO, OH lần lượt là E, F.

Có tam giác OBM vuông tại B, đường cao BE

Suy ra OE. OM = $OB^2 = R^2$ (1)

Có $\widehat{FHM} = \widehat{FEM} = 90^0$

Suy ra tứ giác MEHF nội tiếp

Có hai tam giác vuông OHM và OEF đồng dạng

Suy ra $\dfrac{OH}{OE} = \dfrac{OM}{OF} \Rightarrow OF = \dfrac{OE.OM}{OH}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OF = \dfrac{R^2}{OH}$

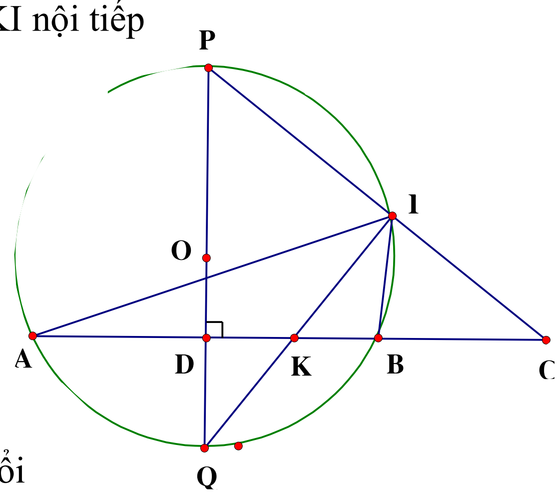
Do đường tròn (O), đường thẳng d cho trước, nên OH không đổi. Suy ra OF không đổi, điểm F cố định.

Do đó đường thẳng AB đi qua điểm F cố định.

*** Nhận xét**:
+ Do đường thẳng OH cho trước, nên dự đoán AB cắt OH tại điểm cố định
+ Vận dụng tứ giác nội tiếp để khẳng định đường thẳng đi qua 1 điểm cố định
+ Vận dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông để giải.
+ Bài toán vẫn đúng trong trường hợp điểm M nằm trên tia đối của tia CD. Khi đó đường thẳng AB vẫn đi qua điểm F cố định.

Bài 2. Cho đoạn thẳng AC cố định, điểm B cố định nằm giữa A và C. Đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua A và B. Gọi PQ là đường kính của đường tròn (O), PQ vuông góc AB, (P thuộc cung lớn AB). Gọi CP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I. Chứng minh QI luôn đi qua một điểm cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

Giải: Gọi IQ cắt AB tại K. Ta có tứ giác PDKI nội tiếp



Tam giác CIK đồng dạng tam giác CDP

Suy ra $\frac{CI}{CD} = \frac{CK}{CP} \Rightarrow CI.CP = CD.CK$ (1)

Có hai tam giác CIB và CAP đồng dạng

Suy ra $\frac{CI}{CB} = \frac{CA}{CP} \Rightarrow CI.CP = CA.CB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

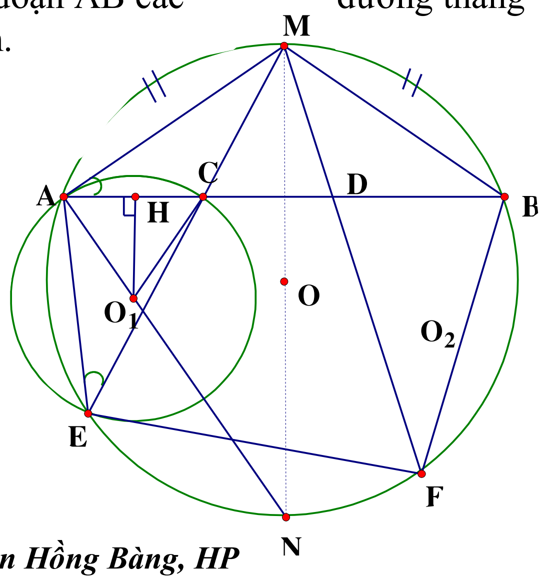
$CK.CD = CA.CB \Rightarrow CK = \frac{CA.CB}{CD}$

Do A, B, C cố định nên CA, CB, CD không đổi
(D là trung điểm AB)
Khi đó độ dài CK không đổi; nên K cố định. Suy ra IQ luôn đi qua điểm K cố định.

*** *Nhận xét***:
+ Do điểm A, B, C cố định, nên dự đoán đường thẳng IQ cắt AB tại điểm cố định
+ Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp. Dựa vào tứ giác nội tiếp, tam giác đồng dạng ta chứng minh đường thẳng đã cho đi qua 1 điểm cố định.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O và hai điểm A, B cố định thuộc đường tròn đó (AB không phải là đường kính). Gọi M là trung điểm của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$. Trên đoạn AB lấy hai điểm C, D phân biệt và không nằm trên đường tròn. Các đường thẳng MC, MD cắt đường tròn đã cho tương ứng tại E, F khác M

1) Chứng minh rằng bốn điểm C, D, E, F nằm trên một đường tròn.
2) Gọi O_1, O_2 tương ứng là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE và BDF. Chứng minh rằng khi C, D thay đổi trên đoạn AB các đường thẳng AO_1 và BO_2 luôn cắt nhau tại một điểm cố định.



Giải: 1) Xét trường hợp C nằm giữa A và D

Có $\widehat{MCB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{MB} + \text{sđ}\overset{\frown}{AE})$.

$\widehat{MFE} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{MA} + \text{sđ}\overset{\frown}{AE})$

Mà sđ $\overset{\frown}{MB}$ = sđ $\overset{\frown}{MA} \Rightarrow \widehat{MCB} = \widehat{MFE}$

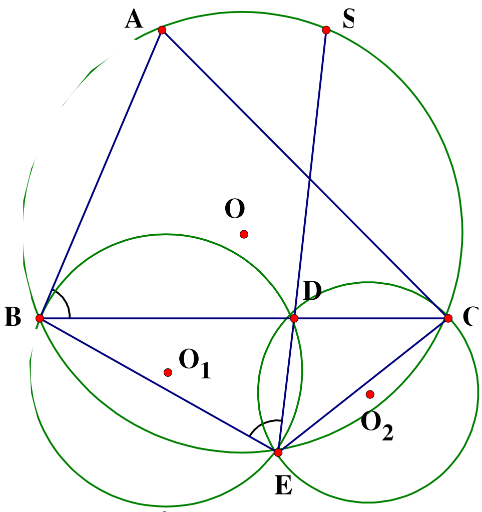
Có $\widehat{MCB} + \widehat{BCE} = 180^0$

Suy ra $\widehat{BCE} + \widehat{MFE} = 180^0$

Có $\widehat{BCE}$, $\widehat{MFE}$ là 2 góc đối của tứ giác CDFE

Suy ra tứ giác CDFE nội tiếp
* Xét trường hợp D nằm giữa A và C.
Ta cũng chứng minh được C, D, F, E cùng nằm trên một đường tròn.
Vậy C, D, F, E cùng nằm trên một đường tròn.
2) Hạ $O_1H \perp AC$, có $O_1A = O_1C$ C ΔO_1AC cân tại O_1
O_1H vừa là tia phân giác $\widehat{AO_1C}$ A $\widehat{AO_1C} = 2.\widehat{AO_1H}$
Mà $\widehat{AO_1C} = 2.\widehat{AEC}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp.......)
($\widehat{AO_1H} = \widehat{AEC}$. Mà $\widehat{AEC} = \widehat{MAB}$ (........) Suy ra $\widehat{AO_1H} = \widehat{MAB}$
Xét ΔAO_1H vuông tại H H $\widehat{AO_1H} + \widehat{HAO_1} = 90^0$
0 $\widehat{MAB} + \widehat{HAO_1} = 90^0$ $\widehat{MAO_1} = 90^0$
Do đó MA là tiếp tuyến của (O_1). Kéo dài AO_1 cắt (O) tại N
Suy ra $\widehat{MON} = 2.\widehat{MAN} = 2.\ 90^0 = 180^0$
0 M, O, N thẳng hàng, có $MN \perp AB$. Suy ra N là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AB}$
Lập luận tương tự BO_2 đi qua N là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AB}$.
Do đó AO_1, BO_2 đi qua N là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AB}$.
Lập luận tương tự D nằm giữa A và C thì AO_1 và BO_2 cũng đi qua N
Vậy AO_1 , BO_2 luôn đi qua 1 điểm cố định .
* **Nhận xét**:
+ Đường tròn (O) cho trước, nên dự đoán AO_1 đi qua điểm chính giữa cung lớn AB
+ Vận dụng tứ giác nội tiếp, ta chứng minh hai đường thẳng cùng đi qua 1 điểm cố định, là điểm chính giữa của một cung.

Bài 4. Cho tam giác ABC và điểm D di chuyển trên cạnh BC (D khác B và C) Đường tròn (O_1) đi qua D và tiếp xúc AB tại B. Đường tròn (O_2) đi qua D và tiếp xúc AC tại C. Gọi E là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2)
a) Chứng minh rằng khi D di động trên đoạn BC thì đường thẳng ED luôn đi qua một điểm cố định
b) Kết quả trên còn đúng không trong trường hợp D di động ở ngoài đoạn BC.
Giải: a) Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
Có $\widehat{ABC} = \widehat{BED}; \widehat{ACB} = \widehat{CED}$. Suy ra
$\widehat{BAC} + \widehat{BED} + \widehat{CED} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^0$
Do đó tứ giác ABEC nội tiếp
Gọi DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai S.
Từ $\widehat{ABC} = \widehat{BED}$; nên hai cung AC và SB bằng nhau
Do đó S là điểm cố định.
b) Trường hợp điểm D nằm ngoài đoạn BC.
Chẳng hạn D nằm trên tia đối tia CB.
(trường hợp D thuộc tia đối tia BC chứng minh tương tự).
Ta chứng minh được bốn điểm A, B, C, E cùng nằm trên đường tròn (O). Gọi DE cắt (O) tại điểm thứ hai S



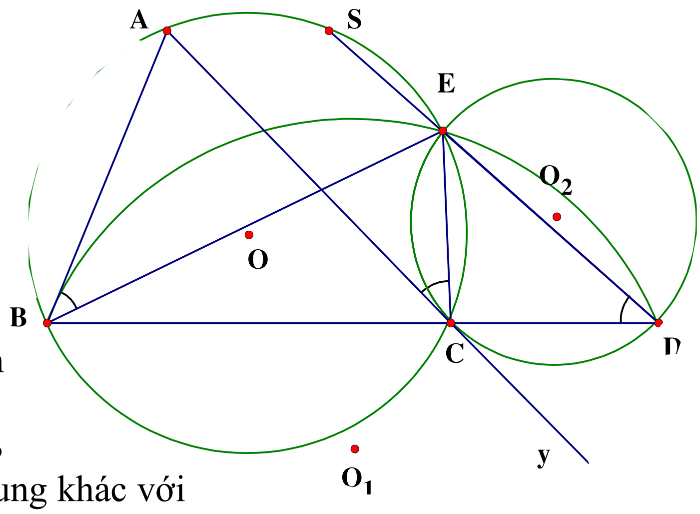
Kẻ tia Cy là tia đối của tia CA.
Khi đó trong đường tròn (O_2) ta có

$\widehat{CED} = \widehat{DCy}$; $\widehat{DCy} = \widehat{ACB}$

Suy ra $\widehat{CED} = \widehat{ACB}$ (không đổi)

Suy ra $\widehat{SEC} = 180^0 - \widehat{CED}$ (không đổi)

Nên góc SEC không đổi
Vậy điểm S cố định.



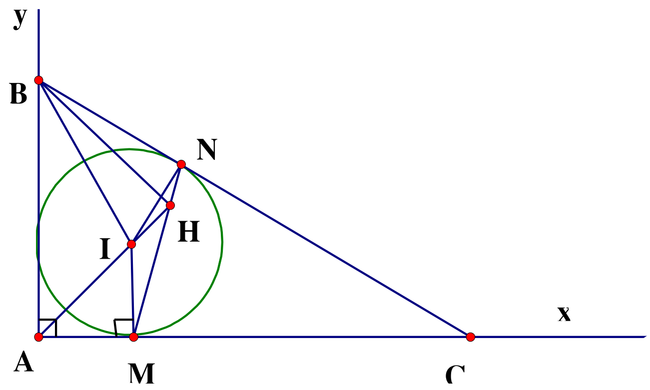
Nhận xét:

+ Chứng minh được A, B, C, E cùng nằm trên đường tròn

+ Đường thẳng DE đi qua điểm cố định S và S không là điểm chính giữa của một cung khác với bài toán 3

Bài 5. Cho góc vuông xAy, điểm B cố định trên Ay, điểm C di chuyển trên Ax. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC, BC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:



Gọi H là giao điểm của AI với MN.
Từ CM = CN, nên tam giác CMN cân tại C. Suy ra $\widehat{CNM} = 90^0 - \frac{1}{2}.\widehat{C}$

Do đó $\widehat{BNH} = 90^0 + \frac{1}{2}.\widehat{C}$

Do I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC,

nên $\widehat{BIA} = 90^0 + \frac{1}{2}.\widehat{C}$

Do đó $\widehat{BIA} = \widehat{BNH}$. Suy ra tứ giác BIHN nội tiếp.

Lại có $\widehat{BNI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BHI} = 90^0$. Do đó tam giác ABH vuông tại H,

lại có $\widehat{BAH} = 45^0$. Suy ra tam giác ABH vuông cân tại H

Do A, B cố định, nên điểm H cố định.
Vậy MN luôn đi qua điểm H cố định.

*** Nhận xét**:

+ Chứng minh tứ giác BIHN nội tiếp, dựa vào tứ giác nội tiếp để chứng minh MN đi qua điểm cố định

+ Trường hợp tổng quát $\widehat{xAy} = a$ thì tam giác ABH vuông tại H, AB cho trước, $BAH = \frac{a}{2}$. Suy ra điểm H cố định.

Bài 6. Cho đường tròn tâm O, dây AB. Điểm M di chuyển trên cung lớn AB. Các đường cao AE, BF của tam giác ABM cắt nhau ở H. Đường tròn tâm H bán kính HM cắt MA, MB theo thứ tự ở C, D.

a) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ M vuông góc với CD luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ H và vuông góc với CD cũng đi qua một điểm cố định.

Giải: a) Kẻ tiếp tuyến Mx với đường tròn (O)

Ta có $\widehat{M_1} = \widehat{MAB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi…)

Có tứ giác ABEF nội tiếp đường tròn đường kính AB, nên $\widehat{MEF} = \widehat{MAB}$

Do đó $\widehat{MEF} = \widehat{M_1}$, suy ra Mx//EF.

Do đó $OM \perp EF$

Ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD, $HE \perp MD$,

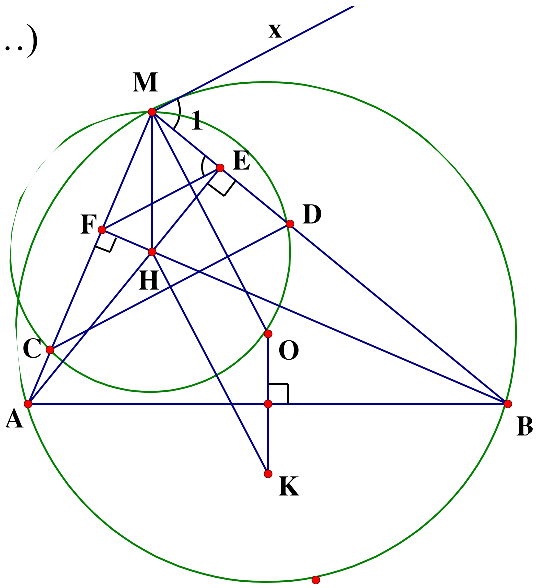
nên E là trung điểm MD

Tương tự F là trung điểm MC

Suy ra EF là đường trung bình tam giác MCD

Do đó EF//CD, mà $OM \perp EF$

Suy ra $OM \perp CD$. Do đó điểm cố định là O.



b) Gọi K là điểm đối xứng với O qua AB,

ta có $OK \perp AB$, mà $MH \perp AB$. Suy ra MH//OK.

Lại có trong tam giác khoảng cách từ trực tâm tam giác đến đỉnh bằng 2 lần khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến cạnh tương ứng. Do đó MH = OK

Vậy tứ giác MHKO là hình bình hành. Suy ra HK//OM, mà $OM \perp CD$,

nên $HK \perp CD$. Vậy đường thẳng kẻ từ H vuông góc CD đi qua điểm K.

Do O, AB cho trước, nên K là điểm cố định.

**** Nhận xét***:

+ Trong phần a) dựa vào tứ giác ABEF nội tiếp đường tròn, dự đoán đường thẳng đã cho đi qua điểm O cố định.

+ Trong phần b) dựa vào tính chất trong tam giác khoảng cách từ trực tâm tam giác đến đỉnh bằng 2 lần khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến cạnh tương ứng.

Bài 7. Cho tam giác ABC, M là điểm bất kì thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ấy. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, E là điểm đối xứng với M qua BC. Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường tròn (O) thì DE luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:

Gọi H, I, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC, BC

Ta có H, I, K thẳng hàng (đường thẳng Xim- xơn).

Gọi N là trực tâm của tam giác ABC.

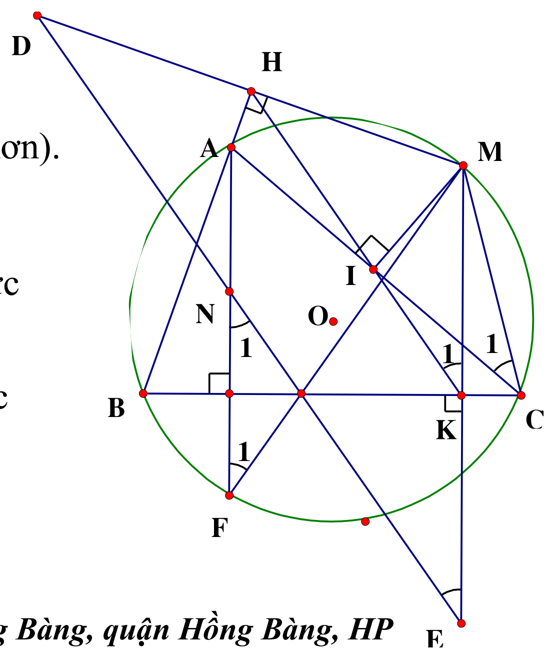
AN cắt (O) tại F. Ta có $\widehat{BCN} = \widehat{BCF}$,

suy ra BC là trung trực NF, mà BC là trung trực của ME. Suy ra $\widehat{E} = \widehat{F_1} = \widehat{N_1}$

Có $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp). Có $\widehat{K_1} = \widehat{C_1}$ (tứ giác MCKI nội tiếp)

Suy ra $\widehat{K_1} = \widehat{E}$, do đó NE//HK

Chứng minh tương tự có ND//HK



Vũ Hữu Chín, GV trường THCS Hồng Bàng, quận Hồng Bàng, HP

Vậy D, N, E thẳng hàng. Vậy DE đi qua trực tâm N của tam giác ABC, nên DE đi qua điểm cố định.

**** Nhận xét***:

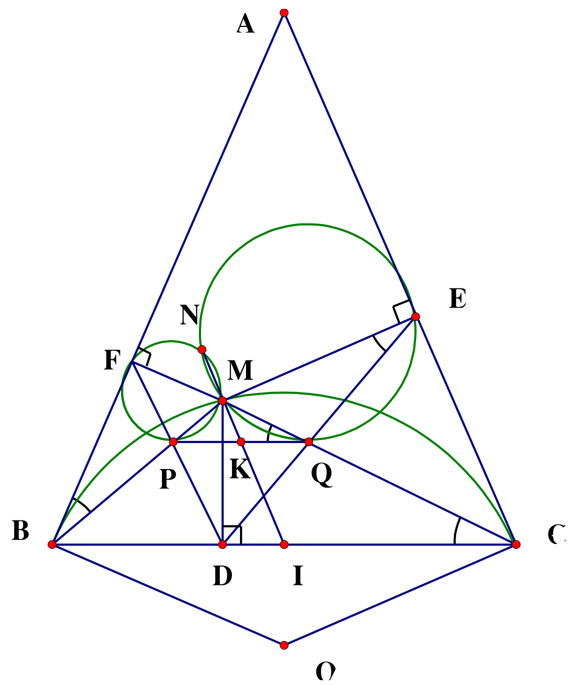
+ Dựa vào các tứ giác nội tiếp, ta chứng minh được H, I, K thẳng hàng ; đó là đường thẳng Xim – xơn

+ Dự đoán đường thẳng DE đi qua trực tâm của tam giác ABC cố định.

+ Chứng minh đường thẳng DE đi qua trực tâm của tam giác ABC.

Bài 8. Cho đường tròn tâm (O). Từ điểm A cố định ở ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AB, AC tới (O) (B, C tiếp điểm). Lấyđiểm M trên cung nhỏ BC. Gọi D, E, F thứ tự là hình chiếu từ M đến BC, AC, AB. Gọi MB cắt DF tại P, MC cắt DE tại Q. Chứng minh đường thẳng nối giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác MPF và MQE luôn đi qua một điểm cố định.

Giải :



Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác MPF và MQE cắt nhau tại M, N. Đường thẳng MN cắt PQ, BC thứ tự tại K và I.

Ta có các tứ giác MDCE, MDBF nội tiếp

Từ các tứ giác nội tiếp và góc tạo bởi giữa tiếp tuyến và dây cung.

Suy ra $\widehat{MCE} = \widehat{MDE} = \widehat{MBC}$.

$\widehat{MBF} = \widehat{MDF} = \widehat{MCB}$

Suy ra $\widehat{PMQ} + \widehat{PDQ} = \widehat{PMQ} + \widehat{PDM} + \widehat{QDM}$

$= \widehat{PMQ} + \widehat{MCB} + \widehat{MBC} = 180^0$

Do đó MPDQ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{MQP} = \widehat{MDP} = \widehat{MCB}$

Do đó PQ//BC

Từ $\widehat{MQP} = \widehat{MCB} = \widehat{MEQ}$.

Suy ra KQ là tiếp tuyến của đường tròn (MQE)

Chứng minh tương tự KP là tiếp tuyến của đường tròn (MPF)

Ta có KM. KN = KQ^2, KM. KN = KP^2. Suy ra KP = KQ.

Xét tam giác MBC, PQ//BC, KP = KQ.

Theo định lí Ta lét, suy ra I là trung điểm BC.

Vậy MN đi qua điểm cố định I là trung điểm BC.

**** Nhận xét:***

+ Cạnh BC cố định cho trước, nên dự đoán đường thẳng MN đi qua điểm cố định thuộc cạnh BC

+ Chứng minh tứ giác MPDQ nội tiếp, từ đó suy ra MN đi qua trung điểm PQ.

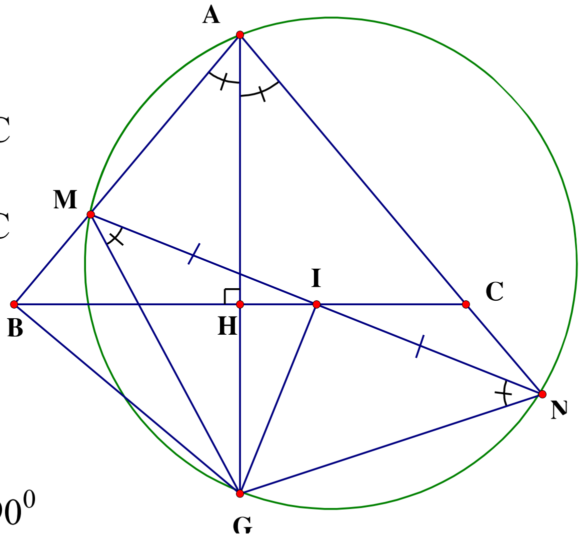
+ Vận dụng định lí Talét để suy ra MN đi qua trung điểm BC.

III/ CHỨNG MINH ĐƯỜNG TRÒN ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH.

Bài 9. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M, N thứ tự là các điểm di động trên các đường thẳng AB, AC sao cho trung điểm I của MN nằm trên cạnh BC. Chứng minh rằng đường tròn qua 3 điểm A, M, N luôn đi qua một điểm cố định khác A.

(Đề thi HSG thành phố năm học 2009 – 2010)

Giải: Xét trường hợp M thuộc cạnh AB khi đó N thuộc tia đối của tia CA (trường hợp N thuộc cạnh AC thì chứng minh tương tự)



Gọi giao điểm đường cao AH của tam giác ABC với đường tròn đi qua 3 điểm A, M, N là G.

Vì ΔABC cân tại A, nên AH là phân giác $\widehat{BAC}$

Vậy GM = GN, hay ΔGMN cân tại G

$\Rightarrow GI \perp MN$ (1)

Lại có ΔGIM đồng dạng CHA (g.g)

nên $\widehat{IGM} = \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$

Có B, G cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ MI.

Suy ra tứ giác MBIG nội tiếp. Suy ra $\widehat{GBM} = 90^0$

Suy ra $GB \perp AB$ tại B. Do đó G là giao điểm của AH và đường thẳng đi qua B vuông góc AB

Suy ra G cố định. Vậy đường tròn đi qua A, M, N đi qua 1 điểm cố định khác A.

**** Nhận xét:***

+ Do đường cao AH của tam giác ABC cân cho trước, nên dự đoán đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt AH tại G, và G là điểm cố định

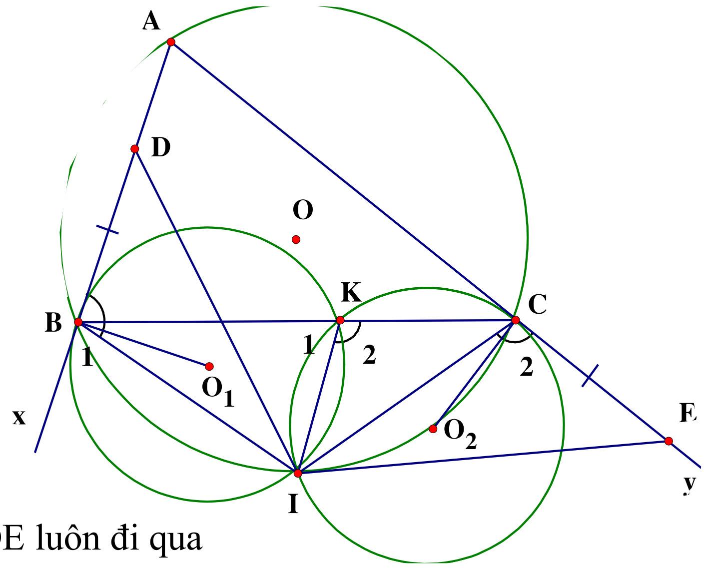
+ Chứng minh tứ giác MBIG nội tiếp. Vận dụng tứ giác nội tiếp, để chứng minh đường tròn đi qua một điểm cố định.

Bài 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Vẽ đường tròn (O_1) đi qua I và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn (O_2) đi qua I và tiếp xúc với AC tại C. Gọi K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O_1), (O_2).

a) Chứng minh rằng ba điểm B, K, C thẳng hàng.

b) Lấy điểm D bất kì thuộc cạnh AB, điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho BD = CE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A.

Giải:



a) Tứ giác ABIC nội tiếp, nên

$\widehat{ABI} + \widehat{ACI} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{B_1} + \widehat{C_2} = 180^0$

Có $\widehat{B_1} = \widehat{K_1}; \widehat{C_2} = \widehat{K_2}$

Do đó $\widehat{K_1} + \widehat{K_2} = 180^0$

Do đó B, K, C thẳng hàng.

b) Có $\Delta IBD = \Delta ICE$ (c. g. c)

Suy ra $\widehat{IDB} = \widehat{IEC}$

Do đó $\widehat{ADI} + \widehat{AEI} = 180^0$

Suy ra tứ giác ADIC nội tiếp

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua điểm cố định I khác A.

Vũ Hữu Chín, GV trường THCS Hồng Bàng, quận Hồng Bàng, HP

Nhận xét:

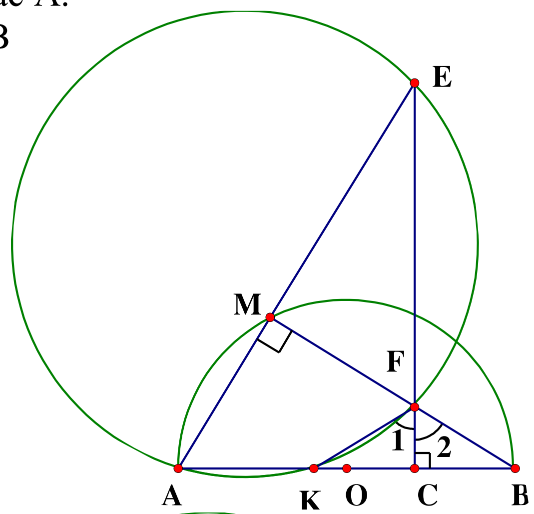
+ Có I là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}$, nên I là điểm cố định.

Để chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE đi qua điểm cố định, dự đoán điểm cố định đó là I.

+ Chứng minh tứ giác ADIE nội tiếp, suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE đi qua điểm I.

Bài 11. Cho đường tròn tâm O đường kính AB, điểm C cố định trên đường kính ấy (C khác O). Điểm M chuyển động trên đường tròn. Đường vuông góc với AB tại C cắt MA, MB theo thứ tự ở E, F. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua qua một điểm cố định khác A.

Giải: * Trường hợp điểm C thuộc đoạn OB



Gọi K là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tiếp tam giác AEF với cạnh AB.

Ta có $\widehat{F_2} = \widehat{A}$ (cùng phụ với góc B)

có $\widehat{F_1} = \widehat{A}$ (cùng bù với $\widehat{EFK}$)

Suy ra $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$,

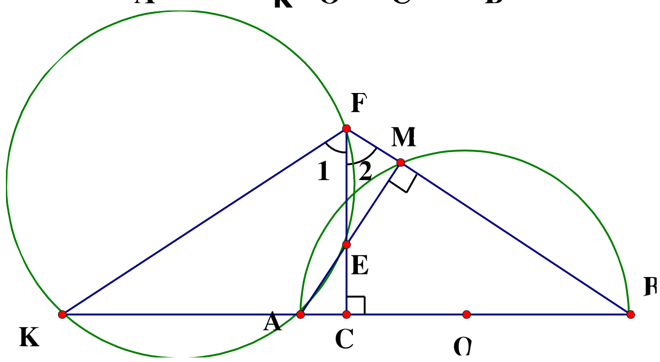
do đó FC là trung trực BK, hay BC = CK

Do B, C cố định, nên K là điểm cố định.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua điểm K cố định.

* Tương tự trường hợp điểm C thuộc đoạn OA.

Ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua điểm K cố định.



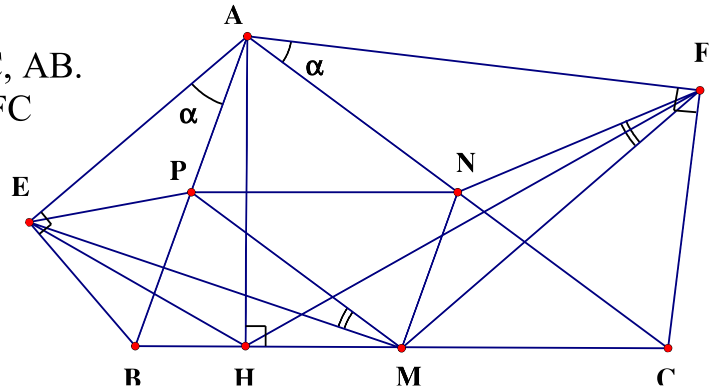
* ***Nhận xét***:

+ Đường tròn (O), đường kính AB cố định,

+ Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AB tại K, thì dự đoán K là điểm cố định.

Bài 12. Cho tam giác ABC, đường cao AH, (H nằm giữa B và C). Dựng về phía ngoài tam giác ABC các tam giác BAE và CAF sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{CAF} = \alpha < 90^0$, $\widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^0$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF luôn đi qua một điểm cố định khác H khi góc $\alpha < 90^0$ thay đổi.

Giải:



Gọi M, N, P thứ tự là trung điểm BC, AC, AB.

Có tam giác AEB đồng dạng tam giác AFC

Từ các tứ giác AHBE, AHCF nội tiếp. Suy ra

$\widehat{AHE} = \widehat{ABE} = \widehat{ACF} = \widehat{AHF}$

Có EP = MN = $\frac{1}{2}$.AB

$PM = FN = \frac{1}{2}.AC$. Có $\widehat{EPM} = \widehat{EPB} + \widehat{BPM} = 2a + \widehat{BAC} = 2a + \widehat{MNC} = \widehat{MNF}$

Do đó $\Delta EPM = \Delta MNF$, suy ra $\widehat{EMP} = \widehat{MFN}$

Suy ra $\widehat{EMF} = \widehat{EMP} + \widehat{PMN} + \widehat{NMF} = \widehat{MFN} + \widehat{MNC} + \widehat{NMF}$

$$= 180^0 - \widehat{FNC} = 2.\widehat{NCF} = 2.\widehat{ACF}$$

Mà $\widehat{EHF} = 2.\widehat{ACF} \Rightarrow \widehat{EHF} = \widehat{EMF}$.

Có H, M cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ EF. Suy ra E, H, M, F cùng nằm trên một đường tròn. Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF luôn đi qua một điểm cố định M là trung điểm BC (khác H)

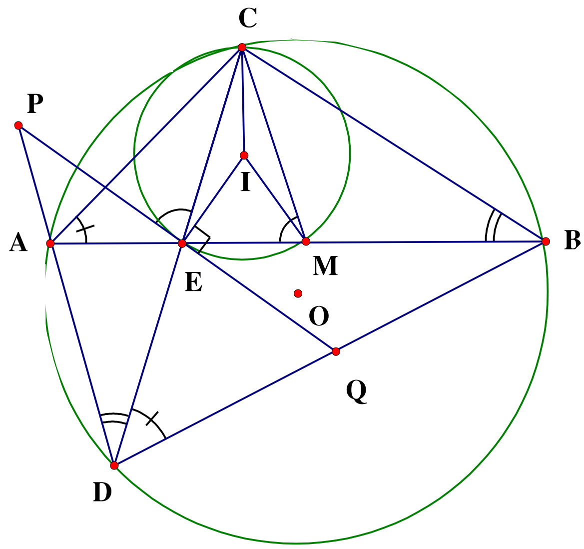
**** Nhận xét:***

\+ Dự đoán đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF đi qua trung điểm của BC

\+ Chứng minh bốn điểm E, H, M, F cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 13. Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Lấy điểm E trên dây cung AB (E khác A và B). Qua E vẽ dây cung CD của đường tròn (O). Trên hai tia DA, DB lấy hai điểm P, Q đối xứng qua E. Chứng minh rằng đường tròn (I) tiếp xúc với PQ tại E và đi qua C luôn đi qua một điểm cố định khi E di động trên dây cung AB.

Giải:



Gọi M là giao điểm của AB và đường tròn (I), EP là tiếp tuyến của (I), nên

$\widehat{CMA} = \widehat{PEC} = \widehat{QED}$ (1)

Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (góc nội tiếp…) (2)

Từ (1) và (2), suy ra tam giác CMA đồng dạng với tam giác QED (g. g)

$\Rightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{DE}{QE}$ (3)

Chứng minh tương tự

$\widehat{DEP} = \widehat{BMC}$; $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$, nên

tam giác BMC đồng dạng tam giác DEP (g. g)

$\Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{DE}{PE} = \frac{DE}{QE}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{AM}{CM} = \frac{BM}{CM} \Rightarrow AM = BM$.

Do đó đường tròn (I) luôn đi qua trung điểm M của AB là điểm cố định.

**** Nhận xét***:

\+ Đoạn thẳng AB cố định, do đó dự đoán đường tròn (I) đi qua điểm cố định thuộc đoạn AB, dự đoán điểm đó là trung điểm AB.

\+ Chứng minh M là trung điểm AB dựa vào 2 tỉ số bằng nhau có cùng mẫu số.

C/ ĐỀ XUẤT MỘT SỐ BÀI TOÁN .

Bài 14. Cho góc vuông xOy. Các điểm A và B theo thứ tự di chuyển trên các tia Ox và Oy sao cho OA + OB = k (k không đổi). Vẽ các đường tròn (A; OB), và (B; OA). Gọi M, N là các giao điểm của (A) và (B). Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 15. Cho đường tròn (O) cố định. Tứ giác ABCD luôn luôn ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi I, J thứ tự là trung điểm của AC và BD. Chứng minh đường thẳng IJ đi qua một điểm cố định khi tứ giác ABCD thay đổi.
Bài 16. Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Tiếp tại B và C với đường tròn (O) cắt nhau tại N. Điểm A di động trên cung lớn BC, vẽ dây AM của đường tròn (O) sao cho AM//BC, MN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K. Chứng minh đường thẳng AK luôn đi qua một điểm cố định.
Bài 17. Cho tam giác ABC các góc đều nhọn, cạnh BC cố định. Các đường cao của tam giác ABC là AD, BE, CF. Đường thẳng EF cắt BC tại P. Đường thẳng đi qua D song song EF cắt AC tại R và cắt AB ở Q. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định khi điểm A thay đổi.
Bài 18. Cho đường tròn (O; R) cố định cho trước và M ở ngoài đường tròn (O). Gọi MA, MB là tiếp tuyến của (O), (A, B là tiếp điểm). Gọi C là một điểm bất kì trên cung nhỏ AB của đường tròn tâm M bán kính MA (cung AB nằm trong đường tròn (O)). Các tia AC, BC cắt đường tròn (O) tại P, Q (P khác A, Q khác B). Chứng minh đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C thay đổi.
Bài 19. Cho đường tròn (O) tâm O có đường kính AB cố định. Một đường thẳng d tiếp xúc với (O) tại A. Gọi M là điểm thuộc đường tròn (O), M khác A, B. Tiếp tuyến của (O) tại M cắt d tại C. Xét đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với d tại C. Giả sử CD là đường kính của (I). Chứng minh đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường tròn (O).

D/ KẾT LUẬN:

* Trong toán học cũng như thực tế việc dự đoán đóng một vai trò quan trọng hàng đầu. Việc dự đoán chính xác đóng vai trò quan trọng hàng đầu trong tất cả các công việc. Trong khoa học việc dự đoán một vấn đề gì, một chuyên đề gì về toán học đóng một vai trò hàng đầu như kim chỉ nam cho những người nghiên cứu. Hàng năm các hội nghị toán học đều đề ra đường lối, dự báo các vấn đề của toán học.
* Việc dự đoán trong bài toán tìm điểm cố định của chuyên đề này giúp cho học sinh, có suy nghĩ dự đoán phù hợp dựa vào các yếu tố đã biết của bài toán.
* Các bài toán tìm điểm cố định có nét tương đồng với bài toán tập hợp điểm, trong bài toán tập hợp điểm, bước đầu tiên yêu cầu học sinh "Dự đoán tập hợp".
* Các bài toán chứng minh đi qua điểm cố định ở lớp 9, trong chuyên đề này sử dụng kiến thức về tứ giác nội tiếp để giải. Khi làm các bài tập này yêu cầu học sinh phải thành thạo trong việc chứng minh tứ giác nội tiếp, và một số tính chất liên quan trong tứ giác nội tiếp.
* Qua chuyên đề này rèn luyện cho học sinh về khả năng dự đoán, củng cố việc chứng minh tứ giác nội tiếp và một số tính chất của tứ giác nội tiếp.
* Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn các đồng nghiệp, các cấp quản lí lãnh đạo trong ngành giáo dục đã giúp đỡ tôi hoàn thành đề tài này.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Hải Phòng, ngày 20 tháng 1 năm 2011

Chủ đề tài:

Vũ Hữu Chín