MỘT SỐ BÀI TẬP CHỌN LỌC TRONG CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

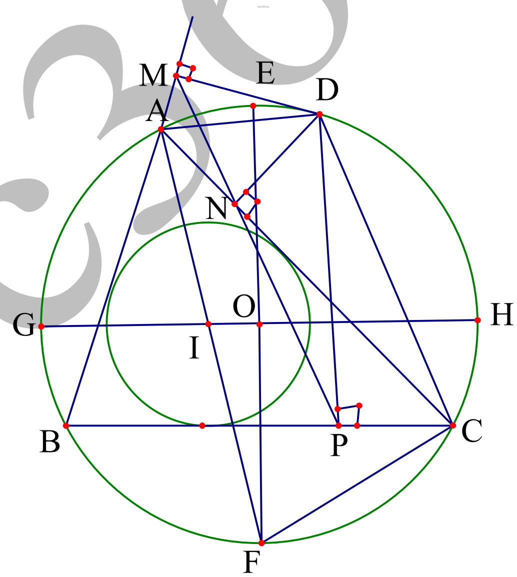
Câu 1. (Đề thi học sinh giỏi thành phố Hà Nội – 2010)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. D là một điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ AD (D khác A và C). Gọi M,N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D tới các đường thẳng AB,AC. Gọi P là giao điểm các đường thẳng MN,BC.

a) Chứng minh DP và BC vuông góc với nhau.

b) Đường tròn $(I;r)$ nội tiếp tam giác ABC. Tính IO với $R=5cm, r=1,6cm$.

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{AMD}+\widehat{AND}=90^0+90^0=180^0$. Do đó tứ giác AMDN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MAD}=\widehat{MND}$.Mặt khác $\widehat{MAD}=\widehat{BCD}$ .Suy ra tứ giác NDCP nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DPC}=\widehat{DNC}=90^0$.Vậy $DP\perp BC$.

b) Vẽ đường kính EF của đường tròn (O) (F là giao điểm của AI với đường tròn (O)). Do AF là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{FC}\Rightarrow \widehat{BAF}=\widehat{CEF}$.
Gọi K là tiếp điểm của tiếp tuyến AB với đường tròn (I,r). Ta có:
$\sin\widehat{BAC}=\sin\widehat{CEF}\Rightarrow \dfrac{IK}{AI}=\dfrac{CF}{EF}\Rightarrow AI.CF=2R.r$ (1). Do CI là phân giác của $\widehat{ACB}$ nên $\widehat{BCK}=\widehat{ACK}\Rightarrow \widehat{CIF}=\widehat{CAF}+\widehat{ACK}=\widehat{BCK}+\widehat{BCF}=\widehat{ICF}\Rightarrow \Delta IFC$ cân tại $F\Rightarrow FI=FC$. Từ (1) suy ra $AI.AF=2R.r$ (2). Gọi G,H là giao điểm của đường thẳng IO với $(O;R)$.
Tacó: $\Delta AIG=\Delta HIF$
$\Rightarrow AI.IF=IG.IH=(OG-OI)(OH+OI)=(OI+R)(R-OI)=R^2-OI^2$ (3). Từ (2) và (3) suy ra:
$R^2-OI^2=2Rr\Rightarrow OI^2=R^2-2Rr=5^2-2.5.1,6=9\Rightarrow OI=3cm$.

Nhận xét: Đường thẳng M,N,P trong bài toán này thực chất là đường thẳng Sim son của điểm D. Vì vậy ta cũng có thể chứng minh bài toán theo cách khác theo cách chứng minh đường thẳng Sim son. (Xem thêm phần các định lý hình học nổi tiếng)

Câu 2. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Quảng Ngãi).

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, một đường tròn (O) tiếp xúc với AB,AC tại B,C. Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ nằm trong tam giác ABC lấy một điểm M $(M\neq B;C)$. Gọi I,H,K lần lượt là hình chiếu của M trên $BC;CA;AB$ và P là giao điểm của MB với IK, Q là giao điểm của MC với IH.

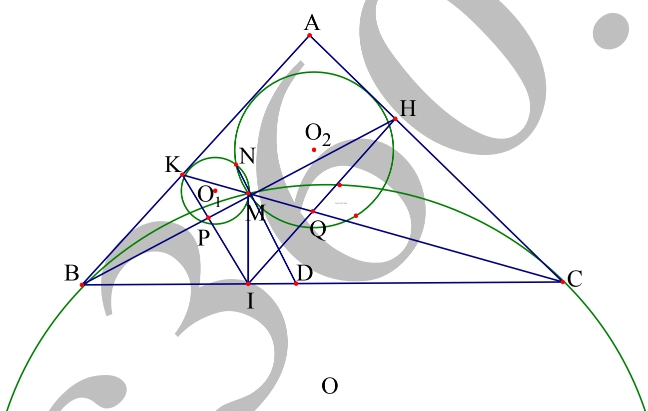
a) Chứng minh rằng tia đối của tia MI là phân giác của $\widehat{MHK}$.

b) Chứng minh $PQ//BC$.

c) Gọi (O_1) và (O_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp ΔMPK và ΔMQH. Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

d) Gọi D là trung điểm của BC; N là giao điểm thứ hai của (O_1), (O_2). Chứng minh rằng M, N, D thẳng hàng.

Lời giải:



a) Vì ΔABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Gọi tia đối của tia MI là Mx. Ta có tứ giác $BIMK$ và tứ giác $CIMH$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{IMH} = 180^0 - \widehat{ACB} = 180^0 - \widehat{ABC} = \widehat{IMK}$

$\Rightarrow \widehat{KMx} = 180^0 - \widehat{IMK} = 180^0 - \widehat{IMH} = \widehat{HMx}$. Vậy Mx là tia phân giác của $\widehat{MHK}$.

b) Do tứ giác $BIMK$ và $CIMH$ nội tiếp nên $\widehat{KIM} = \widehat{KBM}; \widehat{HIM} = \widehat{HCM}$.

$\widehat{PIQ} = \widehat{KIM} + \widehat{HIM} = \widehat{KBM} + \widehat{HCM}$. Mà $\widehat{HCM} = \widehat{IBM}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{CM}$)

$\Rightarrow \widehat{PIQ} = \widehat{ICM} + \widehat{IBM}$. Mặt khác,

$\widehat{PMQ}+\widehat{ICM}+\widehat{IBM}=180^0 \Rightarrow \widehat{PMQ}+\widehat{PIQ}=180^0$. Do đó tứ giác $MPIQ$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{MQP}=\widehat{MIK}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$sđ$\overparen{PM}$). Mà $\widehat{MIK}=\widehat{MIC}$ (cùng bằng $\widehat{KBM}$)

$\Rightarrow \widehat{MQP}=\widehat{MCI} \Rightarrow PQ//BC$.

c) Ta có: $\widehat{MHI}=\widehat{MCI}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$sđ$\overparen{IM}$). Mà $\widehat{MQP}=\widehat{MCI}$ (cmt)

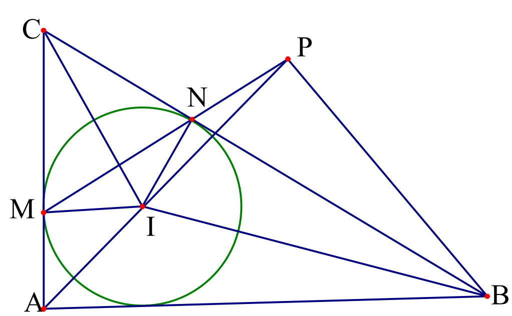
$\Rightarrow \widehat{MQP}=\widehat{MHI}=\frac{1}{2}$sđ$\overparen{MQ}$. Hai tia QP, QH nằm khác phía đối với QM. Suy ra PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O_2) tại tiếp điểm Q. Chứng minh tương tự ta có PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O_2) tại tiếp điểm P. Vậy PQ là tiếp tuyến chung của đường tròn (O_1) và (O_2).

d) Gọi E, E' lần lượt là giao điểm của NM với PQ và BC. Ta có:
$PE^2 = EM.EN$ (vì $\Delta QEM \sim \Delta NEQ$). Suy ra: $PE^2 = QE^2 \Rightarrow PE = QE$. Tam giác MBC có $PQ//BC$ nên $\frac{EP}{E'B}=\frac{EQ}{E'C}$. Mà $EP = EQ$ nên $E'B = E'C \Rightarrow E' \equiv D$.
Vậy N, M, D thẳng hàng.

Câu 3. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Gia Lai – 2010)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với CA và CB lần lượt tại M và N. Đường thẳng MN cắt đường thẳng AI tại P. Chứng minh rằng $\widehat{IPB}$ vuông.

Lời giải:



Ta có $\widehat{PIB}=\widehat{IAB}+\widehat{IBA}=45^0+\widehat{IBA}=45^0+\widehat{IBC}$ (1).Mặt khác,

$\widehat{PNB}=\widehat{CNM}=\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{ACB}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[90^0\left(90^0-\widehat{ACB}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(90^0+\widehat{ACB}\right)=45^0+\frac{1}{2}\widehat{ABC}=45^0+\widehat{IBC}$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{PIB}=\widehat{PNB}$.

Do đó bốn điểm P,N,I,B cùng nằm trên một đường tròn. Mặt khác, $\widehat{INB}=90^0$ nên IB là đường kính của đường tròn này $\Rightarrow \widehat{IPB}=90^0$.

Câu 4. (Đề thi học sing giỏi tỉnh Hải Dương).

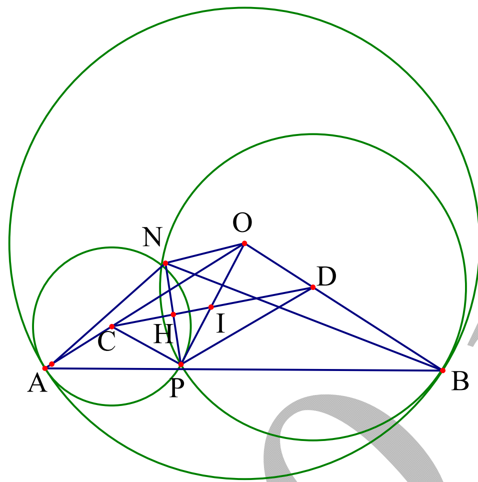
Cho đường tròn tâm O và dây AB cố định (O không thuộc AB). P là điểm di động trên đoạn AB (P khác A,B). Qua A,P vẽ đường tròn tâm C tiếp xúc với (O) tại A. Qua B,P vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với (O) tại B. Hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại N (khác P).

a) Chứng minh $\widehat{ANP}=\widehat{BNP}$.

b) Chứng minh $\widehat{PNO}=90^0$.

c) Chứng minh khi P di động thì N luôn nằm trên một cung tròn cố định.

Lời giải:



a) Vì (O) và (C) tiếp xúc trong tại A nên A, C, O thẳng hàng. Vì (O) và (C) tiếp xúc trong tại B nên B, D, O thẳng hàng. Xét (C) có $\widehat{ANP} = \frac{1}{2}\widehat{ACP}$

Tam giác ACP cân tại C, tam giác AOB cân tại O nên suy ra:

$\widehat{APC} = \widehat{ABO}\left(= \widehat{CPA}\right) \Rightarrow CP // OB$ $\widehat{ACP} = \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{ANP} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (1).

Tương tự, ta có $DP // OA \Rightarrow \widehat{BDP} = \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{BNP} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{ANP} = \widehat{BNP}$.

b) Gọi H là giao điểm của NP và CD; I là giao điểm của OP và CD. Theo chứng minh trên ta có $CP // OB; Dp // CO$. Suy ra tứ giác $CPDO$ là hình bình hành.Do đó $IO = IP$, (C) và (D) cắt nhau tại P và N suy ra $CD \perp NP$ (3)

$HN = HP$ do đó HI là đường trung bình của tam giác PNO nên $HI // NO$ hay $CD // NO$ (4). Từ (3) và (4), suy ra $NO \perp NP \Leftrightarrow \widehat{PNO} = 90^0$.

c) Theo chứng minh trên ta có: $\widehat{ANB} = \widehat{ANP} + \widehat{PNB} \Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{AOB}$ (5). Dễ thấy N,O thuộc nửa mặt phẳng bờ AB (6).Từ (5) và (6) suy ra điểm N thuộc cung tròn AOB của đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB. Do A,B,O cố định nên N thuộc cung tròn cố định.

Câu 5. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ - 2010).

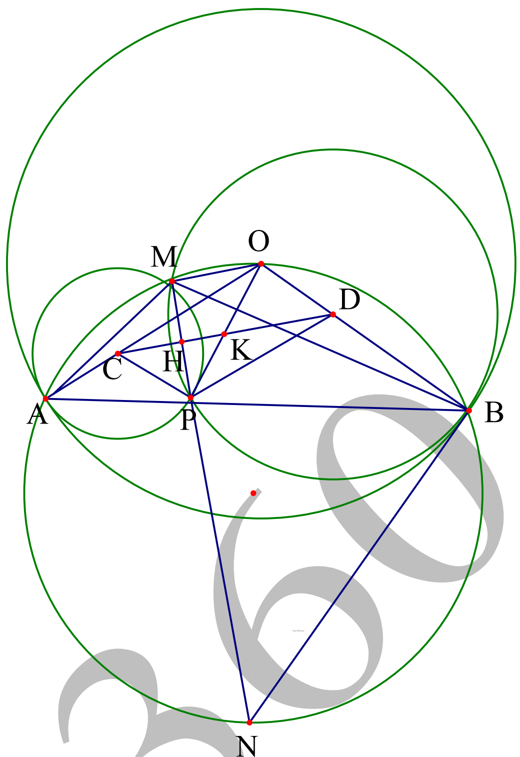
Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung AB cố định, $AB=R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C;R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại A, $(D;R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với $(O;R)$ tại B. Hai đường tròn $(C;R_1)$ và $(D;R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai M.

a) Trong trường hợp P không trùng với trung điểm dây AB, chứng minh $OM//CD$ và bốn điểm C,D,O,M cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh khi P di động trên dây AB thì điểm M di động trên đường tròn cố định và đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định N.

c) Tìm vị trí của P để tích $PM.PN$ lớn nhất? Diện tích tam giác AMB lớn nhất?

Lời giải:



a) Nối CP, PD. Ta có: $\Delta ACP, \Delta OAB$ lần lượt cân tại C, O nên $\widehat{CPA} = \widehat{CAP} = \widehat{OBP}$. Do đó $CP // OD$ (1). Tương tự, ta có $OD // CP$ (2)
Từ (1) và (2) suuy ra tứ giác $ODPC$ là hình bình hành. Gọi H là giao điểm của CD và MP, K là giao điểm của CD với OP. Do đó K là trung điểm của OP.

Theo tính chất của hai đường tròn cắt nhau thì $CD \perp MP \Rightarrow H$ là trung điểm của MP. Do đó $HK // OM \Rightarrow CD // OM$.
Giả sử $AP < BP$.
Vì tứ giác $CDOM$ là hình bình hành nên $OC = DP, DP = DM = R_2$ nên tứ giác $CDOM$ là hình thang cân. Do đó bốn điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có: $OA^2 + OB^2 = 2R^2 = AB^2$.Do đó ΔAOB vuông cân tại O. Vì bốn điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn (kể cả M trùng O) nên $\widehat{COB} = \widehat{CMD}$ (1).

Ta có: $\widehat{MAB} = \widehat{MCP}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$sđ$\widehat{MP}$ của đường tròn (C)). $\widehat{MBP} = \widehat{MDP}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$sđ$\widehat{MP}$ của đường tròn (D)). Do đó $\Delta MAB \sim \Delta MCD$ (g.g.)

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{COD} \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AOB} = 90^0$. Do AB cố định nên điểm M thuộc đường tròn tâm I đường kính AB.

Ta có $\widehat{ACP} = \widehat{BDP} = \widehat{AOB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AMP} = \frac{1}{2}\widehat{ACP} = 45^0$ (góc nội tiếp và góc ở tâm của (C)) $\Rightarrow \widehat{BMP} = \frac{1}{2}\widehat{BDP} = 45^0$ (góc nội tiếp và góc ở tâm của (D)).Do đó MP là phân giác của $\widehat{AMB}$. Mà $\widehat{AMB} = \widehat{AOB} = 90^0$ nên M thuộc đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác AOB.

Giả sử MP cắt đường tròn (I) tại N thì N là trung điểm cung AB không chứa điểm O nên N cố định.

c) Ta có $\widehat{MPA} = \widehat{BPN}; \widehat{AMP} = \widehat{PBN}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung). Do đó $\Delta MAP \sim \Delta BNP$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{PA}{PN} = \frac{PM}{PB} \Leftrightarrow PM.PN = PA.PB \le \left(\frac{PA+PB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{R^2}{2} \text{ (không đổi).}$$

Vậy $PM.PN$ lớn nhất là $\frac{R^2}{2}$ khi $PA = PB$ hay P là trung điểm của dây AB.

Tam giác AMB vuông tại M nên:

$S_{AMB} = \frac{1}{2}AM.BM \le \frac{1}{4}\left(AM^2 + BM^2\right) = \frac{AB^2}{4} = \frac{R^2}{2}$. Vậy S_{AMB} lớn nhất là $\frac{R^2}{2}$ khi $PA = PB$ hay P là trung điểm của dây AB.

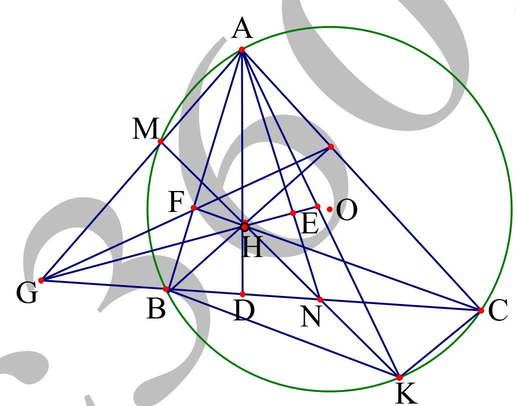
Câu 16. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Vĩnh Phúc – năm 2010)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). AD, BE, CF là ba đường cao $(D \in BC, E \in CA, F \in AB)$. Đường thẳng EF cắt BC tại G, đường thẳng AG cắt lại đường tròn (O) tại điểm M.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, M, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi N là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng $GH \perp AN$.

Lời giải:



a) Nhận xét rằng : Cho tứ giác $ABCD$, P là giao điểm của AB và CD. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi: $PA.PB = PC.PD$. Áp dụng nhận xét trên cho tứ giác $AMBC$ nội tiếp, ta được: $GM.GA = GB.GC$. Áp dụng cho tứ giác $BEFC$ nội tiếp, ta được: $GB.GC = GF.GE$. Suy ra $GF.GE = GM.GA$. Do đó tứ giác $AMEF$ nội tiếp.

b) Theo kết quả trên, và tứ giác $AEFH$ nội tiếp suy ra M nằm trên đường tròn đường kính AH. Do đó $HM \perp MA$. Tia HM cắt lại đường tròn (O) tại K, khi đó $\widehat{AMK} = 90^0$ nên AK là đường kính của (O). Từ đó suy ra:

$KC \perp CA, KB \perp BA \Rightarrow KC // BH, KB // CH$ $\Rightarrow$ tứ giác $BHCK$ là hình bình hành $\Rightarrow KH$ đi qua điểm N. Khi đó M, H, N thẳng hàng. Trong tam giác GAN có hai đường cao AD, NM cắt nhau tại H, nên H là trực tâm của tam giác $GAN \Rightarrow GH \perp AN$.

Câu 17. (Để thi học sinh giỏi cấp Quận –TPHCM – 2010).

Cho điểm M thuộc đường tròn (O) và đường kính AB ($M \neq A, B$ và $MA < MB$). Tia phân giác của góc AMB cắt AB tại C. Qua C, vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt các đường thẳng AM và BM lần lượt tại D và H.

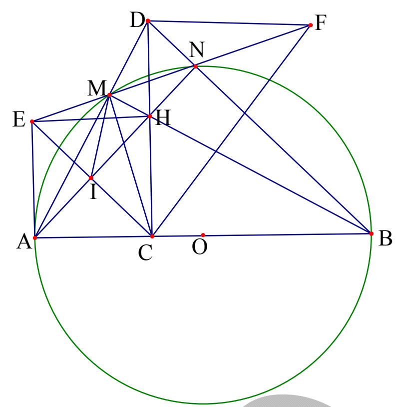
a) Chứng minh hai đường thẳng AH và BD cắt nhau tại điểm N nằm trên đường tròn (O).

b) Gọi E là hình chiếu của H trên tiếp tuyến tại A của đường tròn (O). Chứng minh tứ giác $ACHE$ là hình vuông.

c) Gọi F là hình chiếu của D trên tiếp tuyến tại B của đường tròn (O). Chứng minh bốn điểm E, M, N, F thẳng hàng.

d) Gọi S_1, S_2 là diện tích của tứ giác $ACHE$ và $BCDF$. Chứng minh $CM^2 < \sqrt{S_1 S_2}$.

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{AMB} = 90^0$.Trong tam giác ABD có $DC \perp AB$ nên DC là đường cao thứ nhất. Do đó BM là đường cao thứ hai, suy ra H là trực tâm của tam giác ABD. Suy ra AH là đường cao thứ ba $\Rightarrow AH \perp BD$ tại N.

$\Rightarrow \widehat{ANB} = 90^0 \Rightarrow N$ thuộc đường tròn đường kính AB. Vậy AH và BD cắt nhau tại điểm N nằm trên đường tròn (O).

b) Ta có $\widehat{ACH} = \widehat{AEH} = 90^0; \widehat{EAC} = 90^0$. Do đó tứ giác $ACHE$ là hình chữ nhật. Mặt khác: $\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB}; \frac{CH}{CB} = \frac{MA}{MB}$ suy ra $CH = CA$. Vậy tứ giác $ACHE$ là hình vuông.

c) Do tứ giác $ACHE$ là hình vuông nên hai đường chéo AH, CE bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

suy ra MI là trung tuyến ứng với cạnh huyền của trong tam giác vuông MAH $\Rightarrow MI = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}CE \Rightarrow \Delta MCE$ vuông tại $M \Rightarrow ME \perp MC$. Chứng minh tương tự ta có: $MF \perp MC$ (2). Xét ΔDMN và ΔDBA có $\widehat{ADB}$ chung; $\frac{DM}{DB} = \frac{DN}{DA} \Rightarrow \Delta DMN \sim \Delta DBA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DMN} = \widehat{DBA} = 45^0$. Mà

$\widehat{AMC} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = 45^0$ nên $\widehat{CMN} = 180^0 - \left(\widehat{AMC} + \widehat{DMN}\right) = 90^0 \Rightarrow MN \perp MC$ (3). Từ (1),(2) và (3) suy ra bốn điểm E, M, N, F thẳng hàng.

d) Ta có $\widehat{ECD} = \widehat{DCF} = 45^0$. Do đó $\widehat{ECF} = \widehat{ECD} + \widehat{DCF} = 90^0$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông CEF, ta có: $\frac{1}{CM^2} = \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CF^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{1}{CM^2} = \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CF^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{CE^2}.\frac{1}{CF^2}} = 2.\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{2}.CA\right)^2}.\frac{1}{\left(\sqrt{2}.CB\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{CA^2}.\frac{1}{CB^2}} = \sqrt{\frac{1}{S_1}.\frac{1}{S_2}} = \frac{1}{\sqrt{S_1S_2}} \Rightarrow CM^2 \leq \sqrt{S_1S_2}.$$

Do $\begin{cases} MA < MB \\ \frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB} \end{cases} \Rightarrow CA < CB \Rightarrow \frac{1}{CE^2} > \frac{1}{CF^2}$ nên dấu "=" trong bất đẳng thức không thể xảy ra $\Rightarrow CM^2 < \sqrt{S_1S_2}$.

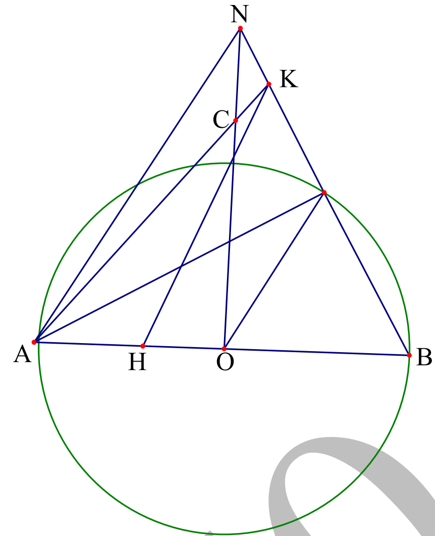
Câu 18. (Đề thi học sinh giỏi thành phố Hà Nội – 2009).

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và C là điểm chính giữa cung AB. Lấy điểm M tùy ý trên cung BC (M khác B). Gọi N là giao điểm của hai tia OC và BM; H, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AO, AM; K là giao điểm của các đường thẳng BM và HI.

a) Chứng minh rằng A, H, K và N cùng nằm trên một đường tròn.

b) Xác định vị trí của điểm M trên cung BC (M khác B) sao cho $AK = \frac{R\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải:



a) Ta có tam giác NAB cân tại N (ON là trung trực của AB)

$\Rightarrow \widehat{NAB} = \widehat{NBA}$ (1). Lại có $OM = OB = R \Rightarrow \widehat{NBA} = \widehat{BOM}$ (2). Do H, I là trung điểm của OA, AM nên HI là đường trung bình của tam giác AOM.

Suy ra $HI//OM \Rightarrow \widehat{BMO} = \widehat{KHB}$ (3). Từ (1),(2) và (3) suy ra: $\widehat{NAB} = \widehat{HKB}$.

Do đó tứ giác $AHKN$ nội tiếp, hay cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có: $AH = HO = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{R}{2}$. $KH//OM \Rightarrow \dfrac{KH}{MB} = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$ Đặt

$MB = x \Rightarrow MK = \dfrac{x}{2}$. Áp dụng định lý Pitago trong các tam giác vuông AKM và AMB, ta có:

$$AK^2 - KM^2 = AM^2 = AB^2 - BM^2 \Leftrightarrow \left(\frac{R\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} = 4R^2 - x^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \sin\widehat{MAB} = \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2R} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MAB} = 45^0$. Mặt khác:

$\widehat{CAB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC} = \dfrac{1}{4}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = 45^0 \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{CAB} \Rightarrow M \equiv C$. Vậy khi $M \equiv C$ thì $AK = \dfrac{R\sqrt{10}}{2}$.

Câu 19. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Thanh Hóa – 2009).

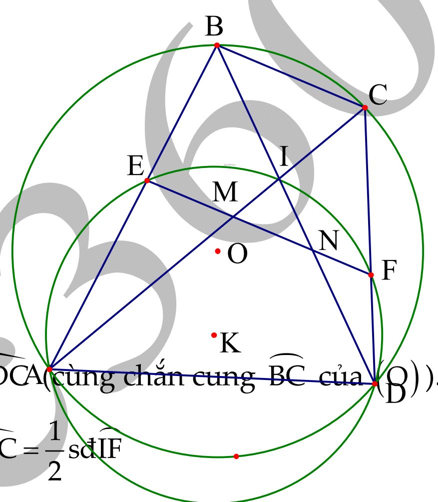
1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) tâm O. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Biết đường tròn (K) tâm K ngoại tiếp tam giác IAD cắt các cạnh AB, CD của tứ giác lần lượt tại E và $F(E \neq A; F \neq D)$. Đường thẳng EF cắt AC, BD lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh tứ giác $AMND$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh $KI \perp BC$.

2. Cho tam giác ABC cân tại A và có góc A bằng 36^0. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

Lời giải:



1. a) Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$ của (O)). Xét đường tròn (K) có $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} sđ\overset{\frown}{IE}; \widehat{BDC} = \frac{1}{2} sđ\overset{\frown}{IF}$

$\widehat{AME} = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{AI} + sđ\overset{\frown}{IF}\right) = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{AE} + sđ\overset{\frown}{IE}\right) = \frac{1}{2} sđ\overset{\frown}{AI} = \widehat{ADN} \Rightarrow$ tứ giác $AMND$ nội tiếp.

b) Ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O)). Mà $\widehat{AME} = \widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ACB} \Rightarrow EF // BC$ (1). Mặt khác $\overset{\frown}{IE} = \overset{\frown}{IF} \Rightarrow KI \perp EF$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $KI \perp BC$ (đpcm).

2. Kẻ phân giác BD, khi đó $\widehat{ABD}=36^0;\widehat{BDC}=\widehat{ACB}=72^0$. Suy ra ΔADB và ΔBDC cân $\Rightarrow DA=DB=BC$. Theo tính chất đường phân giác ta có:

$\frac{AB}{BC}=\frac{DA}{DC}\Rightarrow\frac{DA}{AB}=\frac{DC}{BC}=\frac{DA+DC}{AB+BC}$. Mặt khác $DC=AC-AD=AB-BC$

$$\Rightarrow\frac{AB.BC}{AB+BC}=AB-AC\Leftrightarrow AB.BC=AB^2-BC^2\Leftrightarrow\left(\frac{AB}{BC}\right)^2-\frac{AB}{BC}-1=0$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

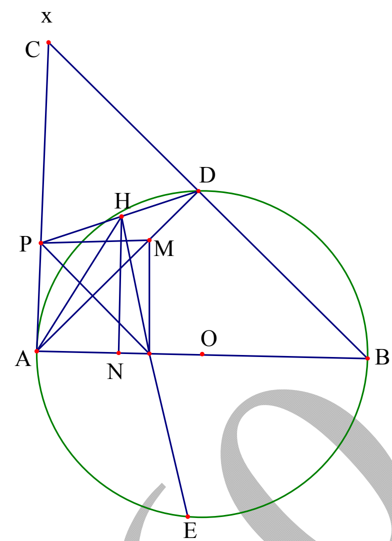
Câu 20. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Bình Định – 2009).

Cho đường tròn (O), đường kính AB. Trên tia tiếp tuyến Ax với đường tròn (O) lấy điểm C sao cho $AC=AB$. Đường thẳng BC cắt đường tròn (O) tại D, M là một điểm thay đổi trên đoạn AD. Gọi N và P lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB và AC, H là chân đường vuông góc hạ từ N xuống đường thẳng PD.

a) Xác định vị trí của M để tam giác AHB có diện tích lớn nhất.

b) Chứng minh rằng khi M thay đổi, HN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{PAN}+\widehat{PHN}=90^0+90^0=180^0$. Do đó tứ giác $APHN$ nội tiếp. Tứ giác $APMN$ là hình vuông nên cũng nội tiếp. Suy ra năm điểm A,N,M,P,H cùng thuộc một đường tròn. Do đó $\widehat{AHM}=\widehat{APM}=90^0$. Mà tứ giác $MPCD$ nội tiếp nên $\widehat{MPD}=\widehat{MCD}$. Tam giác ABC cân tại A, có AD vừa là đường cao vừa là đường trung trực nên $MB=MC\Rightarrow\Delta MBC$ cân tại M $\Rightarrow\widehat{MCD}=\widehat{MBD}\Rightarrow\widehat{MPD}=\widehat{MBD}$ (1). Mặt khác $\widehat{AMB}=\widehat{MBD}+\widehat{MDB}=\widehat{MBD}+90^0$ (2). $\widehat{APH}=\widehat{APM}+\widehat{MPH}=\widehat{MPD}+90^0$ (3). Từ (1),(2) và (3) suy ra: $\widehat{APH}=\widehat{AMB}$ (4). Tứ giác $APHM$ nội tiếp nên $\widehat{APH}+\widehat{AMH}=180^0$ (5). Từ (4) và (5) suy ra: $\widehat{AMB}+\widehat{AMH}=180^0$. Do đó H,M,B thẳng hàng $\Rightarrow\widehat{AHB}=90^0\Rightarrow H$ thuộc đường tròn $(O)\Rightarrow\Delta AHB$ có diện tích lớn nhất $\Leftrightarrow HK$ lớn nhất $\Rightarrow HK=R\Rightarrow H\equiv D\Rightarrow M\equiv D$. Vậy khi $M\equiv D$ thì S_{AHB} đạt giá trị lớn nhất là R.

Câu 21. (Đề thi học sinh giỏi cấp Quận – TPHCM).

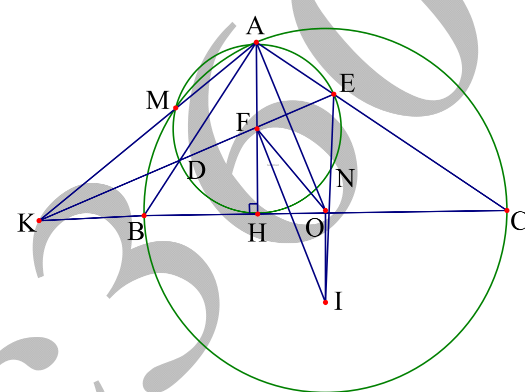
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC. Kẻ đường cao AH của ΔABC. Cho biết $BC = 20cm, \frac{AH}{AC} = \frac{3}{4}$.

a) Tính độ dài cạnh AB và AC.

b) Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O), AB, AC lần lượt tại M, D, E. Đường thẳng DE cắt đường thẳng BC tại K. Chứng minh ba điểm A, M, K thẳng hàng.

c) Chứng minh bốn điểm B, D, E, C cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải:



a) Xét ΔABC và ΔHAC có $\widehat{BAC} = \widehat{AHC} = 90^0$; $\hat{C}$ chung.

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta HAC \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC} = \frac{3}{4}$. Mà $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên

$\frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{AB^2 + AC^2}{25} = \frac{20^2}{25} = 16 \Rightarrow AB^2 = 16.9; AC^2 = 16.16$. Vậy $AB = 12cm$ và $AC = 16cm$.

b) Gọi F là tâm của đường tròn đường kính AH. Ta có $\widehat{DAE} = 90^0$. Do đó DE là đường kính của đường tròn (F). Suy ra D, E, F thẳng hàng. Mặt khác (O) và F cắt nhau tại A và N nên OF là trung trực của AM

$\Rightarrow OF \perp AM$ (1). Gọi N là giao điểm của OA và DE. Ta có $OA = OC = R$. Do đó ΔOAC là tam giác cân tại O. Suy ra $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$;

$FA = EF = r \Rightarrow \Delta FAE$ cân tại $F \Rightarrow \widehat{FEA} + \widehat{FAE}$. Mà $\widehat{OCA} + \widehat{FAE} = 90^0$ nên $\widehat{OAC} + \widehat{FEA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ANE} = 90^0 \Rightarrow KN \perp OA$. Ta có F là trực tâm của tam giác KAO nên $OF \perp KA$ (2). Từ (1) và (2) suy ra A, M, K thẳng hàng.

c) Gọi I là giao điểm của hai trung trực của DE và BC. Ta có:

$\begin{cases} AF \perp BC \\ OI \perp BC \end{cases} \Rightarrow AF // OI; \begin{cases} IF \perp OA \\ OA \perp DE \end{cases} \Rightarrow IF // OA$. Do đó $FAOI$ là hình bình hành.

Suy ra $IF = OA; FA = OI \Rightarrow IF = OC; FE = OI$. Mà $\widehat{IFE} = \widehat{IOC}$ nên $\Delta IFE = \Delta COI$

Suy ra $IE = IC$. Mà $IE = ID; IB = IC$ nên $IB = ID = IE = IC$. Vậy B, D, E, C cùng nằm trên đường tròn (I).

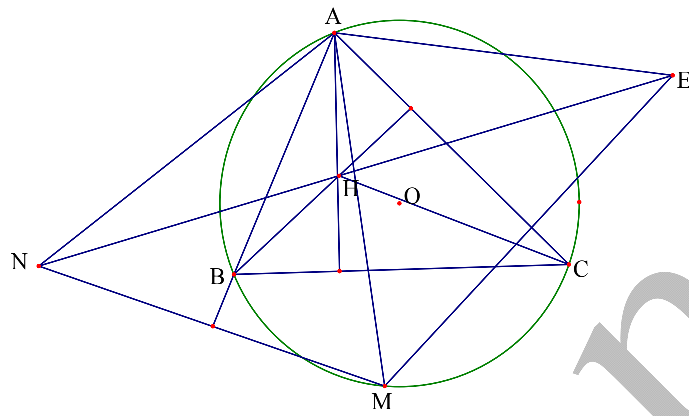
Câu 22. (Đề thi học sinh giỏi TPHCM – 2008) .

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) và có trực tâm là H.

a) Xác định vị trí của điểm M thuộc cung BC không chứa điểm A sao cho tứ giác $BHCM$ là hình bình hành.

b) Lấy điểm M là điểm bất kỳ trên cung BC không chứa A. Gọi N và E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC. Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng.

Lời giải:



a) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Ta có $BH \perp AC; CH \perp AB$. Do đó tứ giác $BHCM$ là hình bình hành $\Rightarrow BH//MC; CH//MB$ và $AC \perp MC; AB \perp MB \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ACM} = 90^0 \Rightarrow AM$ là đường kính của đường tròn $(O) \Rightarrow M$ là điểm đối xứng của A qua O.

b) Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ (tính chất đối xứng trục), $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB). Do đó $\widehat{ANB} = \widehat{ACB}$. Mà $\widehat{AHB} + \widehat{ACB} = 180^0$. Suy ra $\widehat{AHB} + \widehat{ANB} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác $AHBN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NHB} = \widehat{NAB}$. Mặt khác $\widehat{NAB} = \widehat{BAM}$. Suy ra $\widehat{NHB} = \widehat{BAM}$. Tương tự ta có: $\widehat{CHE} + \widehat{MAC}$ và $\widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0$. Suy ra
$\widehat{NHB} + \widehat{CHE} + \widehat{BHC} = \widehat{BAM} + \widehat{MAC} + \widehat{BHC} = \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0$. Suy ra N, H, E thẳng hàng.

Nhận xét: Đường thẳng qua N, H, E trong bài toán này thực chất là đường thẳng Steiner của điểm M

Câu 23. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Hải Dương – 2008).

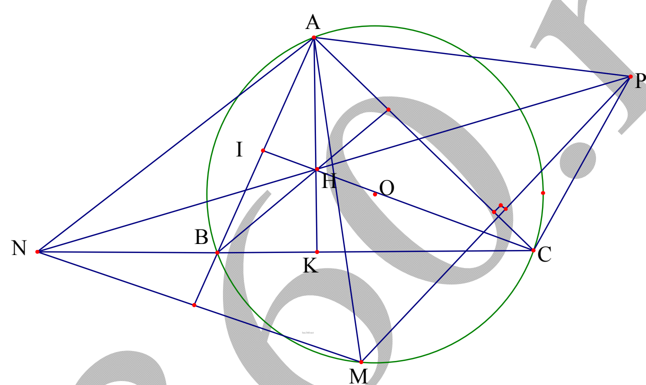
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm là H. Giả sử M là một điểm trên cung BC không chứa A (M khác B,C). Gọi N,P lần lượt là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB,AC.

a) Chứng minh tứ giác $AHCP$ nội tiếp.

b) Chứng minh ba điểm N,H,P thẳng hàng.

c) Tìm vị trí của M để đoạn thẳng NP lớn nhất.

Lời giải:



a) Gọi I là giao điểm của CH và AB, K là giao điểm của AH với BC. Dễ thấy $\widehat{BIK}+\widehat{AHC}=180^0$ (1).

Mặt khác, $\widehat{IBK}=\widehat{AMC};\widehat{AMC}=\widehat{APC}$. Do đó $\widehat{IBK}=\widehat{APC}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{APC}+\widehat{AHC}=180^0$. Vậy tứ giác $AHPC$ nội tiếp.

b) Do tứ giác $AHPC$ nội tiếp nên $\widehat{AHP}=\widehat{ACP}$. Mà $\widehat{ACP}=\widehat{AMP}$ nên $\widehat{AHP}=\widehat{ACM}$. Mặt khác, $\widehat{ACM}=\widehat{ABM}=180^0$ nên $\widehat{AHP}=\widehat{ABM}=180^0$. Mà $\widehat{AMB}=\widehat{ABN}$ nên $\widehat{AHP}=\widehat{ABN}=180^0$ (3). Tương tự, $\widehat{ABN}=\widehat{AHN}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{AHB}+\widehat{AHN}=180^0$. Vậy N,H,P thẳng hàng.

c) Ta có $\widehat{MAN}=2\widehat{BAM};\widehat{MAP}=2\widehat{MAC}$. Do đó $\widehat{NAP}=2\left(\widehat{BAM}+\widehat{MAC}\right)=2\widehat{BAC}$ (không đổi) .Ta có

$NP=2AP.\sin\widehat{BAC}=2AM.\sin\widehat{BAC}$. Vậy NP lớn nhất khi và chỉ khi AM lớn nhất. mà AM lớn nhất khi và chỉ khi AM là đường kính của đường tròn (O). Vậy NP lớn nhất khi và chỉ khi M là điểm đối xứng của A qua O.

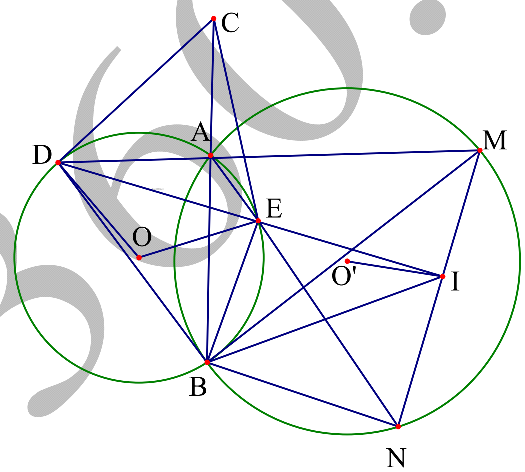
Câu 24. (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh – 2008)

Cho đường tròn $(O;R)$ và đường tròn $(O';R')$ cắt nhau tại A và B. Trên tia đối của AB lấy điểm C. Kẻ tiếp tuyến CD, CE với đường tròn tâm O, trong đó D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn (O'). Đường thẳng AD, AE cắt đường tròn (O') lần lượt tại M và N (M, N khác A). Tia DE cắt MN tại I. Chứng minh rằng:

a) $\Delta MIB \sim \Delta AEB$.

b) $O'I \perp MN$.

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{BAN} = \widehat{BMN}$ (cùng chắn cung BN) (1) do tứ giác $AMNB$ nội tiếp nên $\widehat{MNB} = \widehat{DAB}$. Mà $\widehat{DAB} = \widehat{DEB}$ nên $\widehat{MNB} = \widehat{DEB}$ hay $\widehat{INB} = \widehat{DEB}$. Do đó tứ giác $BEIN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EBI} = \widehat{ENI}$ hay $\widehat{EBI} = \widehat{ANM}$. Mà $\widehat{ANM} = \widehat{ABM}$ nên $\widehat{ABM} = \widehat{EBI}$. Hay $\widehat{CBE} + \widehat{EBM} = \widehat{EBM} + \widehat{IBM}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\Delta MIB \sim \Delta AEB$.

b) Do CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{CDA}=\widehat{CBD}$ suy ra $\Delta CDB\sim\Delta CAD$ (g.g) $\Rightarrow\dfrac{BD}{DA}=\dfrac{CD}{CA}$ (3). Tương tự ta có $\dfrac{CE}{CA}=\dfrac{EB}{EA}$ (4). Mặt khác, $CD=CE$ (tính chất tiếp tuyến) (5). Từ (3),(4),(5) suy ra: $\dfrac{EB}{EA}=\dfrac{BD}{DA}$ (6). Theo (1), $\Delta MIB\sim\Delta AEB\Rightarrow\dfrac{EB}{EA}=\dfrac{IB}{MI}$ (7). Mà $\begin{cases}\widehat{ABD}=\widehat{AED}\\ \widehat{AED}=\widehat{IEN}\end{cases}\Rightarrow\widehat{ABD}=\widehat{IEN}$.

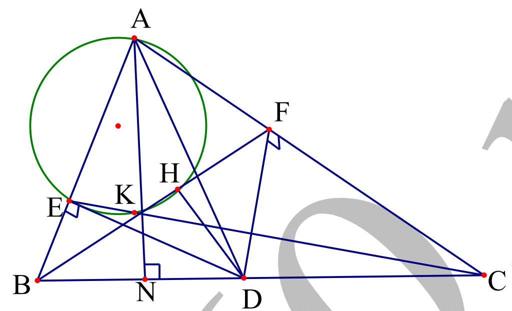
Do tứ giác $BNIE$ nội tiếp nên $\widehat{IEN}=\widehat{IBN}\Rightarrow\widehat{ABD}=\widehat{IBN}$ (8). Mặt khác, theo (1) ta có $\widehat{INB}=\widehat{DAB}$ (9). Từ (8) và (9) suy ra $\Delta DBA\sim\Delta IBN\Rightarrow\dfrac{DB}{DA}=\dfrac{IB}{IN}$ (10). Từ (6),(7) và (10) suy ra $MI=NI\Rightarrow O'I\perp MN$.

Nhận xét: Ta có thể giải câu b theo cách khác: Áp dụng định lý Menelauyt cho tam giác AMN và đường thẳng qua DEI ta có: $\dfrac{DA}{DM}.\dfrac{IM}{IN}.\dfrac{EN}{EA}=1$.Như vậy để chứng minh I là trung điểm của MN ta sẽ chứng minh $\dfrac{DA}{DM}.\dfrac{EN}{EA}=1$ (*) , mặt khác theo tính chất quen thuộc của cát tuyến và tiếp tuyến ta có: $\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{DA}{DB}$ (Xem phần chùm bài tập cát tuyến và tiếp tuyến) thay vào (*) ta quy về chứng minh: $\dfrac{DB}{EB}.\dfrac{EN}{DM}=1\Leftrightarrow\dfrac{DB}{DM}=\dfrac{EN}{EB}\Leftrightarrow\Delta DBM\sim\Delta BEN$ nhưng điều này là hiển nhiên do $\widehat{DMB}=\widehat{ANB}$ (cùng chắn cung AB) và $\widehat{ADB}=\widehat{BEN}$ do tứ giác $ADEB$ nội tiếp.

Câu 25. (Báo toán học tuổi trẻ)

Cho tam giác ABC nhọn, tia phân giác trong của góc BAC cắt BC tại D. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu vuông góc của D trên AB và AC, K là giao của CE và BF, H là giao điểm của BF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEK. Chứng minh rằng $DH \perp BF$.

Lời giải:



Kẻ AN vuông góc với $BC\left(N \in BC\right)$, suy ra các tứ giác $AEND$ và $AFDN$ nội tiếp, từ đó $BD.BN = BE.BA; CN.CD = CF.CA$

$\Rightarrow \dfrac{DB}{DC}.\dfrac{NB}{NC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{BE}{CF} \Rightarrow \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{BE}{CF} \Rightarrow \dfrac{NB}{NC}.\dfrac{FC}{FA}.\dfrac{EF}{EB} = 1$ (do $AE = AF$).

Theo định lý Ceva đảo ta có AN, CE, BF đồng quy tại K, hay $AK \perp BC$ tại N. Từ đó $BK.BH = BE.BA = BN.BD$ nên tứ giác $KNDH$ nội tiếp, suy ra $\widehat{KHD} = \widehat{KND} = 90^0$. Do đó $DH \perp BF$ (đpcm).

Câu 26. (Báo toán học tuổi trẻ số tháng 3 -2012)

Cho tam giác ABC vuông tại A. D là một điểm nằm trong tam giác đó sao cho $CD = CA$; M là một điểm nằm trên cạnh AB sao cho $\widehat{BDM} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACD}$; N là giao điểm của MD và đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh rằng $DM = DN$.

Lời giải:

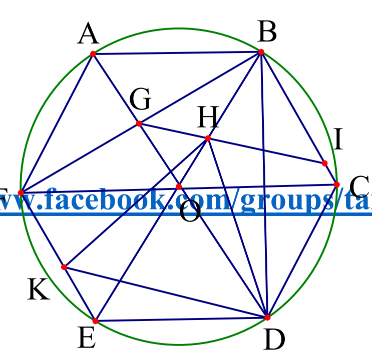
Vẽ đường tròn $(C;CA)$ cắt đường thẳng BD tại $E(E \neq D)$, khi đó BA là tiếp tuyến của đường tròn. Ta có $BD.BE = BA^2$ (do $\Delta BDA \sim \Delta BAE$), $BH.BC = BA^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC). Suy ra $BH.BC = BD.BE \Rightarrow \dfrac{BD}{BH} = \dfrac{BC}{BE} \Rightarrow \Delta BDH \sim \Delta BCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{BEC}$ và tứ giác $DHCE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{BEC} = \widehat{CDE} = \widehat{CHE} \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AHE}$. Mà $AH \perp BC$ nên HA, HB tương ứng là phân giác trong và ngoài của $\widehat{DHE}$.

Do đó nếu I là giao điểm của AH và BE thì: $\dfrac{ID}{IE} = \dfrac{HD}{HE} = \dfrac{BD}{BE}$ (*). Theo giả thiết, ta có $\widehat{MDB} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACD} = \widehat{AEB}$ nên $MN // AE$ .Do đó $\dfrac{MD}{AE} = \dfrac{BD}{BE}; \dfrac{DN}{AE} = \dfrac{DI}{IE}$.

Kết hợp với (*) ta có $\dfrac{MD}{AE} = \dfrac{DN}{AE} \Rightarrow DM = DN$.

Câu 27. (Báo toán học tuổi trẻ)

Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi G là trung điểm của BF. Lấy điểm I trên cạnh BC sao cho $BI = BG$, điểm H trên cạnh BC sao cho $BI = BG$, điểm H nằm trên đoạn IG. Sao cho $\widehat{CDH} = 45^0$, điểm K trên cạnh EF sao cho $\widehat{DKE} = 45^0$. Chứng minh rằng tam giác DKH là tam giác đều.



Cách 1: Từ giả thiết $ABCDEF$ là lục giác đều, suy ra $\widehat{BDG}=30^0, \widehat{CDG}=60^0, DG\perp BF, \widehat{GBC}=90^0$. Từ đó,

$\widehat{HDG}=\widehat{CDG}-\widehat{CDH}=60^0-45^0=15^0=\frac{1}{2}\widehat{BDG}$. Vậy DH là phân giác của góc $\widehat{BDG}$. Kết hợp với GH là phân giác của góc $\widehat{BGD}$ (do ΔBGI vuông cân nên $\widehat{DGH}=\widehat{DGB}$), suy ra BH là phân giác của góc $\widehat{DBF}$; do đó B,H,O thẳng hàng (O là tâm của lục giác đều).

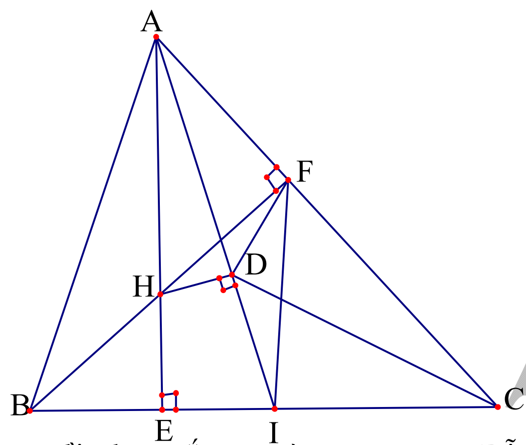
Hai tam giác ΔDHO và ΔDKE có $DO=DE, \widehat{HDO}=\widehat{KDE}=15^0$, $\widehat{HOD}=\widehat{KED}=120^0$ nên chúng bằng nhau (g.c.g), suy ra $HD=KD$. Lại có $\widehat{HDK}=\widehat{HDO}+\widehat{ODK}=\widehat{ODK}+\widehat{KDE}=\widehat{ODE}=60^0$. Vậy ΔHDK đều.

Cách 2: Vì $\widehat{FDC}=\widehat{FBC}=90^0$ nên $\widehat{FDH}=\widehat{BGH}=45^0$, do đó tứ giác $GHDF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{FHD}=\widehat{FGD}=90^0$ nên tam giác HFD vuông cân $\Rightarrow H,O,E$ cùng thuộc trung trực của đoạn FD $\Rightarrow \widehat{EHD}=\frac{1}{2}\widehat{FHD}=45^0=\widehat{EKD}$. Suy ra tứ giác $EKHD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDK}=\widehat{HEK}=60^0$, $\widehat{HKD}=\widehat{HED}=60^0$. Vậy tam giác HKD đều.

Câu 28. (Báo toán học tuổi trẻ)

Cho đoạn thẳng AB. M là điểm trong mặt phẳng sao cho tam giác MAB là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác MAB, I là trung điểm cạnh AB và D là hình chiếu của H trên MI. Chứng minh rằng tích $MI.DI$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

Lời giải:



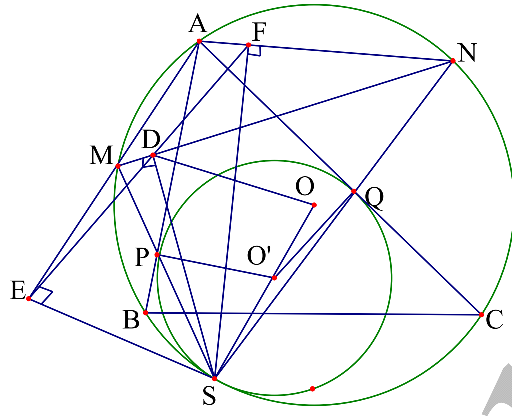
Kéo dài MH và AH lần lượt cắt AB và MB tại E, F. Dễ thấy các tứ giác $MHDF$ và $HEID$ nội tiếp, suy ra $\widehat{DFB} = \widehat{MHD} = \widehat{DIE}$, do đó tứ giác $DFBI$ nội tiếp. từ đó $\widehat{IDB} = \widehat{IFB}$ (1). Lại có FI là trung tuyến của tam giác vuông AFB nên tam giác IFB cân tại $I \Rightarrow \widehat{IFB} = \widehat{IBF}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IDB} = \widehat{IBF}$, do đó $\Delta IDB \sim \Delta IBM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{ID}{IB} = \frac{IB}{IM}$. Suy ra $ID.IM = IB^2 = \frac{AB^2}{4}$.

Vậy $MI.DI$ không phụ thuộc vào vị trí của M.

Câu 29. (Báo toán học tuổi trẻ)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh AB, AC theo thứ tự tại P, Q và tiếp xúc với đường tròn (O) tại S. Hai đường thẳng SP, SQ cắt lại đường tròn (O) theo thứ tự tại M, N. Gọi E, D, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của S trên các đường thẳng AM, MN, NA. Chứng minh rằng $DE = DF$.

Lời giải:



Từ $\widehat{O'PS} = \widehat{O'SP} = \widehat{OSM} = \widehat{OMS}$, suy ra $O'P // OM$. Lại vì $O'P \perp AP$ nên $OM \perp AB$, nghĩa là M là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$ không chứa điểm C. Tương tự, N là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AC}$ không chứa điểm B. Từ đó $\widehat{MAP} = \widehat{MSB} = \widehat{MSA}$, dẫn đến $\Delta MSA \sim \Delta MAP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{SM}{AM} = \dfrac{SA}{AP}$. Lập luận tương tự ta có $\dfrac{SN}{AN} = \dfrac{SA}{AQ}$, mà $AP = AQ$ nên $\dfrac{SM}{SN} = \dfrac{AM}{AN}$ (1). Bốn điểm M, D, S, E cùng nằm trên đường tròn đường kính SM, suy ra $\widehat{DSE} = \widehat{AMN}$. Từ đây, áp dụng định lý sin cho tam giác SED ta có.

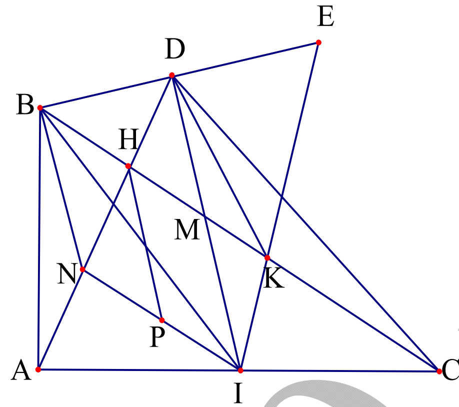
$DE = SM.\sin\widehat{DSE} = SM.\sin\widehat{AMN}$. Tương tự $DF = SN.\sin\widehat{ANM}$. Vậy

$\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{SM.\sin\widehat{AMN}}{SN.\sin\widehat{ANM}}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{AM.\sin\widehat{AMN}}{AN.\sin\widehat{ANM}} = 1$ (áp dụng định lý sin cho tam giác AMN). Do đó $DE = DF$ (đpcm).

Câu 30. (Báo toán học tuổi trẻ)

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho $HA = 2HD$. Gọi E là điểm đối xứng của B qua D; I là trung điểm của AC; DI và EI cắt BC lần lượt tại M và K. Chứng minh rằng $\widehat{MDK} = \widehat{MCD}$.

Lời giải:

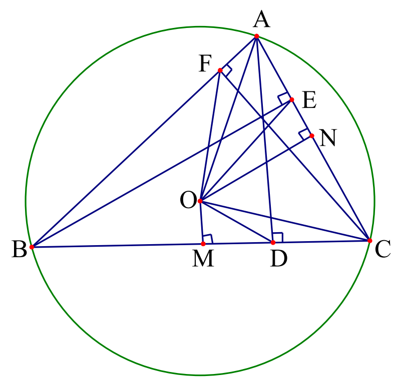


Gọi N, P thứ tự là trung điểm của AH và IN. Dễ thấy $IN//CH$ (tính chất đường trung bình của ΔACH), nên $IN \perp AH$. Xét tam giác vuông ABC, ta có $HB.HC = AH^2 \Rightarrow \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{AH}{HC}$. Vì $AH = ND = 2DH, HC = 2IN$ nên $\dfrac{BH}{DN} = \dfrac{HD}{NI}$. Do đó $\Delta BDH \sim \Delta DIN$, dẫn tới $\widehat{BDH} = \widehat{DIN} \Rightarrow \widehat{BDI} = \widehat{BDN} + \widehat{NDI} = \widehat{DIN} + \widehat{NDI} = 90^0$.

Do đó tứ giác $ABDI$ nội tiếp và E đối xứng với B qua DI, nên $\widehat{KIM} = \widehat{DIB} = \widehat{BAD} = \widehat{MCI}$. Suy ra $\Delta IMK \sim \Delta CMI$ (g.g), ta có $\dfrac{IM}{CM} = \dfrac{MK}{MI} \Rightarrow MK.MC = MI^2$. Do H là trung điểm ND và $HM//NI$ nên $MD = MI$, suy ra $MK.MC = MD^2$, hay $\dfrac{MK}{MD} = \dfrac{MD}{MC}$, do đó $\Delta MDK \sim \Delta MCD$ (c.g.c), dẫn đến $\widehat{MDK} = \widehat{MCD}$. (đpcm).

Câu 31. (Báo toán học tuổi trẻ)
Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O với các đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng các đường thẳng OA, OF, OB, OD, OC chia tam giác ABC thành ba cặp tam giác có diện tích bằng nhau.

Lời giải:



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CA. Khi đó

$OM\perp MC, ON\perp CA \Rightarrow \widehat{MOB}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}=\widehat{BAC}; \widehat{NOA}=\widehat{CBA}$. Theo giả thiết

$BE\perp CA$ nên $\Delta MOB\sim\Delta EAB$ (g.g), suy ra $\frac{OM}{AE}=\frac{OB}{AB}=\frac{OA}{AB}$ (1). Tương tự có

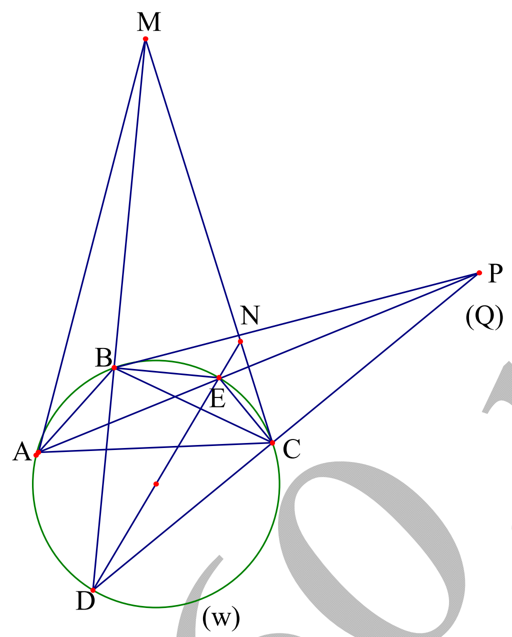
$\Delta NAO\sim\Delta DAB$, suy ra $\frac{ON}{AE}=\frac{OB}{AB}$ (2). Từ (1) và (2) ta có

$\frac{OM}{AE}=\frac{ON}{BD}\Rightarrow OM.BD=ON.AE$. Do đó $S_{OBD}=S_{OAE}$. Chứng minh tương tự ta có $S_{OCD}=S_{OAF}$ và $S_{OCE}=S_{OBF}$. Suy ra điều cần chứng minh.

Câu 32. (Báo toán học tuổi trẻ)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn (ω). Điểm M nằm trên tia đối của tia BD sao cho MA,MC là hai tiếp tuyến của đường tròn (ω). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (ω) cắt MC tại N và cắt CD tại P, ND cắt đường tròn (ω) tại E. Chứng minh rằng ba điểm A,E,P thẳng hàng.

Lời giải:



Do MC là tiếp tuyến của đường tròn (ω) nên

$\widehat{NCB} = \widehat{BDC} \Leftarrow \Delta MCB \sim \Delta MDC$ (g.g). Suy ra $\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{CD}$. Do MA là tiếp tuyến của đường tròn (ω) nên tương tự có $\Delta MAB \sim \Delta MDA$ (g.g). Suy ra $\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DA}$. Do $MA = MC$ suy ra $\frac{BC}{CD} = \frac{AB}{DA} \Leftrightarrow BC.DA = AB.CD$. Áp dụng định lý Ptolemy với tứ giác $ABCD$ nội tiếp ta có :

$AB.CD + BC.DA = AC.DB \Rightarrow BC.DA = \frac{1}{2}AC.DB \Rightarrow \frac{AC}{DA} = \frac{2BC}{DB}$ (1). Do NB, NC là tiếp tuyến của đường tròn (ω) nên $\Delta NBE \sim \Delta NDB$ và $\Delta NCE \sim \Delta NDC$ (g.g), suy ra $\frac{NB}{ND} = \frac{BE}{DB}; \frac{NC}{ND} = \frac{CE}{DC}$. Kết hợp với $NB = NC$ suy ra $\frac{BE}{DB} = \frac{CE}{DC} \Rightarrow BE.DC = CE.DB$. Lại áp dụng định lý Ptolemy với tứ giác nội tiếp $BECD$ ta được: $BE.DC = CE.DB = \frac{1}{2}BC.DE \Rightarrow \frac{BC}{DB} = \frac{2CE}{DE}$ (2).

Vì PB là tiếp tuyến của đường tròn (ω) nên $\Delta PCB \sim \Delta PBD$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PB}{PD} = \frac{CB}{DB} \Rightarrow PC.PD = PB^2$. Mặt khác $\frac{PC}{PD} = \frac{PC.PD}{PD^2} = \left(\frac{PB}{PD}\right)^2 = \left(\frac{CB}{DB}\right)^2$,

Kết hợp với (2) ta có: $\frac{PC}{PD} = \left(\frac{CB}{DB}\right)^2 = \left(\frac{2CE}{DE}\right)^2$ (3). Giả sử AE cắt đường thẳng CD tại Q thì: $\Delta QEC \sim \Delta QDA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{QC}{QA} = \frac{EC}{DA}$

$\Delta QDE \sim \Delta QAC \Rightarrow \frac{QD}{QA} = \frac{DE}{AC}$. Từ đó $\frac{QC}{QA} : \frac{QD}{QA} = \frac{EC}{DA} : \frac{DE}{AC}$ Kết hợp với (1),(2) ta được: $\frac{QC}{QD} = \frac{EC.AC}{DE.DA} = \frac{EC}{DE} . \frac{4EC}{DE} = \left(\frac{2CE}{DE}\right)^2$ (4). Từ (3)và (4) suy ra $\frac{PC}{PD} = \frac{QC}{QD} \Rightarrow P \equiv Q$. Do đó ba điểm A, E, P thẳng hàng.

Câu 33. Cho tam giác cân $ABC\left(AB = AC, \widehat{BAC} < 90^0\right)$. Kẻ đường cao BD $(D \in AC)$. Gọi M, N và I theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BC, BM, BD. Tia NI cắt cạnh AC tại K. Chứng minh rằng :

a) Các tứ giác $ABMD$ và $ABNK$ nội tiếp.

b) $3BC^2 = 4CA.CK$.

Giải:

a) Do tam giác ABC cân tại A nên $AM \perp BM$. Mặt khác $BD \perp AD$, do đó tứ giác $ABMD$ nội tiếp đường tròn tâm là trung điểm AB, bán kính bằng $\frac{AB}{2}$ (theo dấu hiệu 1). Lại có, từ giả thiết đề bài NI là đường trung bình của tam giác BMD, nên $NI//MD$. Do đó $\widehat{KNC} = \widehat{DMC}$. Hơn nữa, $\widehat{DMC} = \widehat{KAB}$ (vì tứ giác $ABMD$ nội tiếp). Suy ra $\widehat{KNC} = \widehat{KAB}$ (1). Từ đó ta thấy tứ giác $ABNK$ nội tiếp trong một đường tròn (theo dấu hiệu 2).

b) Theo trên, tứ giác $ABNK$ nội tiếp, suy ra $\widehat{NKC} = \widehat{ABC}$. Kết hợp với (1) ta có $\Delta ABC \sim \Delta NKC \Rightarrow \frac{BC}{CK} = \frac{CA}{NC}$. Mặt khác ta thấy $NC = \frac{3}{4}BC$. Do đó

$BC^2 = \frac{4}{3}BC.NC = \frac{4}{3}CA.CK$, hay $3BC^2 = 4CA.CK$ (đpcm).