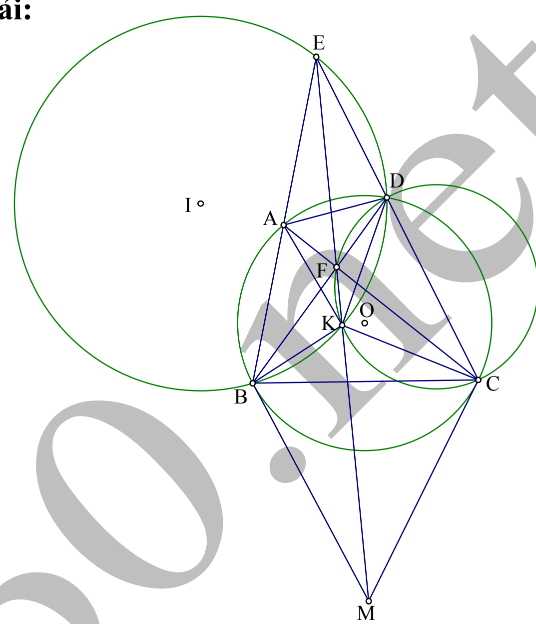
HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI TẬP KHÓ

Câu 1) Phân tích và định hướng giải:



a). Để chứng minh tứ giác $BKCM$ nội tiếp ta chứng minh $\widehat{BKC}+\widehat{BMC}=180^0$. Điểm K trong bài toán có mối quan hê với hai đường tròn ngoại tiếp các tứ giác $EBKD, KFDC$ vì vậy ta tìm cách tính các góc $\widehat{BKC},\widehat{BMC}$ theo các góc có liên quan đến 2 tứ giác này.

Ta có: $\widehat{BKC}=360^0-\left(\widehat{BKE}+\widehat{CKE}\right)=360^0-\left[\widehat{BDE}+\widehat{CKE}\right]$

$=360^0-\left(180^0-\widehat{BDC}+180^0-\widehat{BDC}\right)=2\widehat{BDC}$ (1)

Mặt khác ta cũng có: $\widehat{BMC}=180^0-2\widehat{MBC}=180^0-2\widehat{BDC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{BKC}+\widehat{BMC}=180^0$.

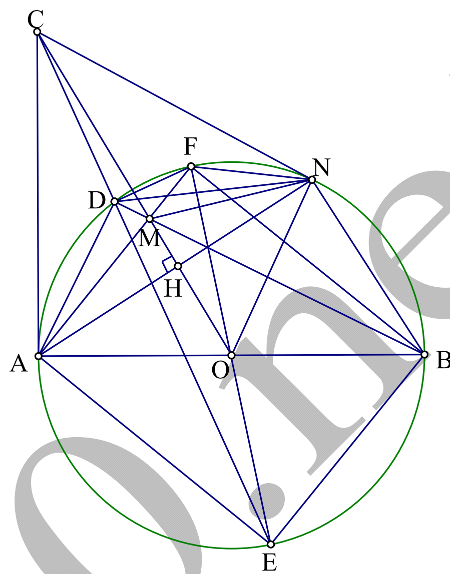
b). Thực nghiệm hình vẽ cho ta thấy E,K,M thẳng hàng. Thật vậy ta có: $\widehat{EKB}+\widehat{BKM}=\widehat{EDB}+\widehat{BCM}=\widehat{EDB}+\widehat{BDC}=180^0$. Bây giờ ta chứng minh: F,K,M thẳng hàng: Thật vậy ta có: $\widehat{MKC}+\widehat{CKF}=\widehat{MBC}+\widehat{CKF}=\widehat{BDC}+\widehat{CKF}=180^0$. Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Group: https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/

hoc360.net

Câu 2)

Phân tích định hướng giải:



a). Tứ giác $CNMD$ có liên quan đến tiếp tuyến CN nên ta tập trung khai thác giả thiết về góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây.

Ta thấy: $\widehat{MCN} = \widehat{MCA}$, mặt khác $\widehat{MCA} = \widehat{BAN}$ cùng phụ với góc $\widehat{NAC}$, nhưng $\widehat{BAN} = \widehat{BDN}$ (góc nội tiếp) từ đó ta suy ra $\widehat{MDN} = \widehat{MCN}$ hay tứ giác $CNMD$ nội tiếp.

b). Dễ thấy $\widehat{ADM} = 90^0$. Từ đó suy ra $\widehat{ADM} + \widehat{AHM} = 180^0$ suy ra đpcm.

c). Để chứng minh E, O, F thẳng hàng: Ta chứng minh:

$\widehat{EOA} + \widehat{AOF} = 180^0$, điều này cũng tương đương với việc chứng minh:

$\widehat{EAF} = 90^0$. Thật vậy ta có: $\widehat{EAF} = \widehat{EAB} + \widehat{BAF}$, nhưng $\widehat{EAB} = \widehat{EDB}$ (Cùng chắn cung EB), mặt khác $\widehat{EDB} = \widehat{MNC}$ do $CMND$ nội tiếp, suy ra $\widehat{EAB} = \widehat{MNC} = \widehat{MAC}$,Từ đó suy ra $\widehat{EAF} = \widehat{MAC} + \widehat{MAF} = 90^0$. (đpcm).

Câu 3).

Phân tích định hướng giải:

Để chứng minh tứ giác $BNJK$ nội tiếp ta sẽ chứng minh

hoc360.net

$\widehat{BJN}=\widehat{BKN}$. Ta có:

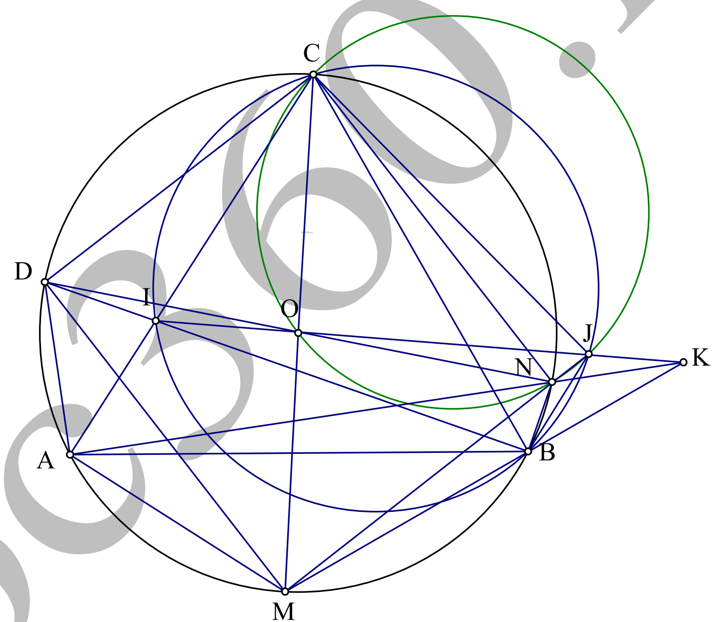
$\widehat{BJN}=\widehat{BJC}-\widehat{NJC}=180^0-\widehat{BIC}-\left(180^0-\widehat{NOC}\right)=\widehat{NOC}-\widehat{BIC}$

Mặt khác ta cũng có: $\widehat{NOC}=\frac{1}{2}\left(\overset\frown{DM}+\overset\frown{NC}\right)$,

$\widehat{BIC}=\frac{1}{2}\left(\overset\frown{BC}+\overset\frown{AD}\right)$ từ đó suy ra: $\widehat{BJN}=\frac{1}{2}\left(\overset\frown{DM}+\overset\frown{NC}-\overset\frown{BC}-\overset\frown{AD}\right)$

Ta cũng có: $\widehat{NKB}=\frac{1}{2}\left(\overset\frown{AM}-\overset\frown{NB}\right)=\frac{1}{2}\left[\overset\frown{DM}-\overset\frown{AD}-\left(\overset\frown{BC}-\overset\frown{NC}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\overset\frown{DM}+\overset\frown{NC}-\overset\frown{BC}-\overset\frown{AD}\right)$. Từ đó suy ra đpcm.



b). Ta có tứ giác $BNJK$ nội tiếp nên

$\widehat{NJK}+\widehat{NBK}=180^0\Leftrightarrow$
$\widehat{NJK}+\widehat{NAM}=180^0\Leftrightarrow\widehat{NJK}+\widehat{NCM}=180^0\Leftrightarrow\widehat{NJK}+\widehat{NJO}=180^0$ hay
O,J,K thẳng hàng. Mặt khác ta cũng có:

hoc360.net

$\widehat{KJB}+\widehat{IJB}=\widehat{KNB}+\widehat{BCI}=\widehat{KNB}+\widehat{BNA}=180^0$ hay K,I,J thẳng hàng. Từ đó suy ra I,K,O thẳng hàng.

Câu 4) Phân tích định hướng giải:

Ta có: $\widehat{BEC}=\widehat{CFB}=90^0$. Suy ra H

là trực tâm của tam giác ABC.

Hay $AH\perp BC\Rightarrow \widehat{BFH}=\widehat{HDB}=90^0$

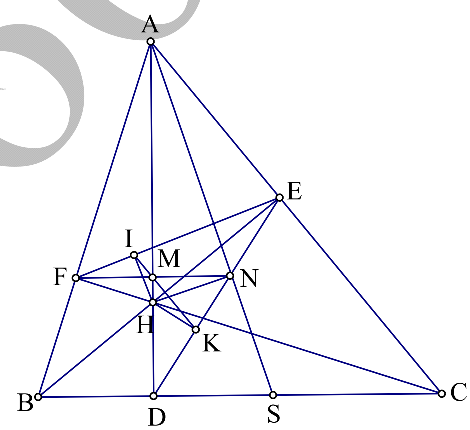
hay tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

Tương tự ta cũng có: $DHEC$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{FBH}=\widehat{FDH}=\widehat{HCE}=\widehat{HDE}\Rightarrow \widehat{FDE}=2\widehat{FBE}=\widehat{FIE}$ tức là

$FIDE$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 5)



+ Ta có tính chất quen thuộc:

BE là phân giác trong của góc

$\widehat{FED}$. (Học sinh tự chứng minh

điều này dựa vào các tứ giác

nội tiếp $BFHD, HIEK, HDEC$).

Từ đó suy ra $HK=HI$ và $EI=EK$. Do đó

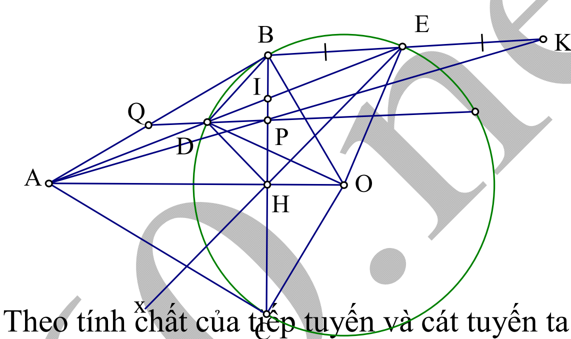
$\widehat{KIE}=\frac{1}{2}\left(180^0-\widehat{IEK}\right)=90^0-\widehat{IEH}$. Mặt khác ta cũng có

$\widehat{MHF}=90^0-\widehat{FAH}=90^0-\widehat{FEH}=90^0-\widehat{IEH}$. Suy ra đpcm.

+ Xét tứ giác $HMNK$ ta có: $\widehat{HKN}=90^0$, mặt khác ta vừa chứng minh $FIMH$ nội tiếp nên suy ra $\widehat{FMH}=\widehat{HIF}=90^0 \Rightarrow \widehat{HMN}=90^0$. Như vậy $\widehat{HKN}+\widehat{HMN}=180^0$ suy ra đpcm.

+ Ta có: $\widehat{HNM}=\widehat{HKM}=\widehat{HIM}=\widehat{HFM} \Rightarrow \Delta FHN$ cân tại $H \Leftrightarrow MF=MN$. Từ đó dễ dàng chứng minh được: $\widehat{MAN}=\widehat{DAS}$.

Câu 6)



Phân tích định hướng giải:

a). Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO ta có: $AB^2=AH.AO$. Theo tính chất của tiếp tuyến và cát tuyến ta có: $AB^2=AD.AE$ nên suy ra $AH.AO=AD.AE \Leftrightarrow OHED$ nội tiếp.

<u>Ta có thể giải thích tường minh hơn như sau:</u>

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO ta có: $AB^2=AH.AO$.

Xét tam giác ABD và tam giác AEB ta có: $\widehat{BAD}$ chung, $\widehat{ABD}=\widehat{BED}$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây). Từ đó suy ra ΔABD đồng dạng với ΔAEB nên $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AB}{AE} \Leftrightarrow AD.AE=AB^2$.

b). Để giải quyết tốt câu hỏi này ta cần nắm chắc tính chất liên quan đến cát tuyến và tiếp tuyến. (Xem thêm phần: ‘’Chùm bài tập liên quan đến cát tuyến và tiếp tuyến’’) đó là: HI là phân giác trong của góc $\widehat{DHE}$ và HA là phân giác ngoài của góc $\widehat{DHE}$

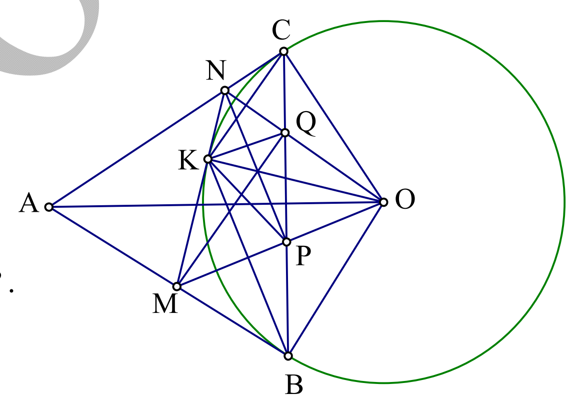
Thật vậy ta có: $\widehat{OHE}=\widehat{ODE}=\widehat{OED}$ mặt khác ta cũng có: $\widehat{AHD}=\widehat{OED}$ (Tính chất tứ giác nội tiếp). Suy ra $\widehat{AHD}=\widehat{OHE} \Rightarrow \widehat{DHB}=\widehat{BHE}$ hay HI là phân giác của góc $\widehat{DHE}$ do $HA \perp HI$ nên suy ra HA là phân giác ngoài của góc $\widehat{DHE}$.

Quay trở lại bài toán:

Ta thấy rằng : Từ việc chứng minh: HI là phân giác trong của góc $\widehat{DHE}$ và HA là phân giác ngoài của góc $\widehat{DHE}$ ta có: $\frac{ID}{IE} = \frac{HD}{HE}$ và $\frac{AD}{AE} = \frac{HD}{HE}$ suy ra $\frac{ID}{IE} = \frac{AD}{AE}$

Mặt khác theo định lý Thales ta cũng có: $\frac{ID}{IE} = \frac{DP}{BE}$ suy ra $\frac{DP}{BE} = \frac{AD}{AE}$ mà $EK = BE$ nên $\frac{DP}{EK} = \frac{AD}{AE}$. Điều này chứng tỏ D là trung điểm của PQ và A, P, K thẳng hàng.

Câu 7).



Ta thấy rằng: Nếu tứ giác $MBOQ$ nội tiếp thì $\widehat{MQB} = \widehat{MOB}$

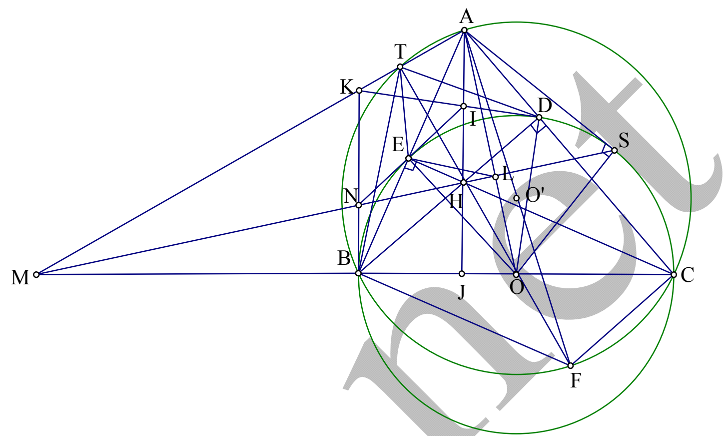
Mặt khác $\widehat{MOB} = \widehat{MKB}$ do tứ giác $MBOK$ nội tiếp suy ra $\widehat{MQB} = \widehat{MKB}$.

Như vậy ta cần quy bài toán về chứng minh $MKQB$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{NKQ}$ (Tính chất tiếp tuyến).

Như vậy $MKQB$ là tứ giác nội tiếp. Hoàn toàn tương tự ta cũng có: $NKPC$ nội tiếp nên cũng suy ra được: $NCOP$ nội tiếp.

Câu 8).



a). Giả sử đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ABC. Dễ thấy H là trực tâm tam giác ABC O là trung điểm BC. Những điểm đặc biệt này giúp ta nghĩ đến bài toán đặc biệt liên quan đến đường thẳng, đường tròn Ơ le.

Kẻ đường kính AF của (O')**.** Ta dễ chứng minh được: $BHCF$ là hình bình hành và H,O,F thẳng hàng**.** Ta có: $\widehat{MTB}=\widehat{ACB}$ do $BTAC$ là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác $\widehat{KDB}=\widehat{DBC}\equiv\widehat{ACB}$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây). Từ đó suy ra $\widehat{KDB}=\widehat{KTB}$ tức là tứ giác $TKBD$ nội tiếp.

Để ý rằng: Tứ giác $BKDO$ nội tiếp, từ đó suy ra 5 điểm O,B,K,T,D cùng nằm trên một đường tròn đường kính OK hay $\widehat{OTK}=90^0$. Mặt khác $\widehat{FTA}=90^0$ suy ra F,O,T thẳng hàng. Do đó 4 điểm F,O,H,T thẳng hàng. Tam giác MAO có AH,OT là hai đường cao nên suy ra H là trực tâm, do đó $ML\perp AO$ nên 5 điểm A,E,H,L,D cùng nằm trên một đường tròn. Suy ra $\widehat{ELA}=\widehat{EDA}=\widehat{EBC}$ tức là tứ giác $BELO$ nội tiếp.

b). Ta có 5 điểm B,N,E,L,O cùng nằm trên đường tròn đường kính NO nên $\widehat{NEO}=\widehat{NLO}=90^0$, nhưng $\widehat{KDB}=\widehat{DCB}=\widehat{BHJ}=\widehat{IHD}$ suy ra I là trung điểm của $AH\Rightarrow IE=ID\Rightarrow\widehat{IEO}=90^0$. Như vậy: $\widehat{IEO}+\widehat{NEO}=180^0$ nên N,E,I thẳng hàng.

c) Ta có $\widehat{MTE} = \widehat{ADE}$ do $TADE$ nội tiếp.

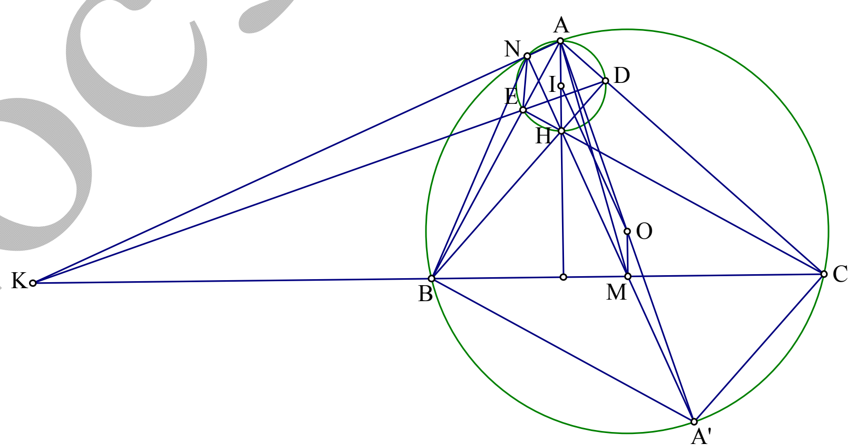
$\widehat{ADE} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{MTE} \Rightarrow MTEB$ nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{MTB}$. Mà $\widehat{BED} = \widehat{BTA}$ cùng bù với $\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{MEB} + \widehat{BED} = \widehat{MTB} + \widehat{BTA} = 180^0$ hay M, E, D thẳng hàng.

d) Vì $OE \perp IE \Rightarrow OE$ là tiếp tuyến của đường tròn đi qua các điểm A, E, T, H, D, L tâm I. Suy ra

$\widehat{OEL} = \widehat{OAE} \Rightarrow \Delta OEL \backsim \Delta OAE \Rightarrow OA.OL = OE^2 \Leftrightarrow OA.OL = OS^2 \Rightarrow \Delta OLS \backsim \Delta OSA$. Mặt khác $\widehat{OSA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OLS} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MLO} + \widehat{OLS} = 180^0 \Leftrightarrow M, L, S$ thẳng hàng. Mà H, M, N, L thẳng hàng nên suy ra M, H, S thẳng hàng.

Câu 9) Phân tích định hướng giải toán:

Bài toán này làm ta liên tưởng đến đường thẳng Ơle, đường tròn Ơ le**.** Dựng đường kính AA'.Ta dễ thấy 4 điểm A, E, H, D cùng nằm trên đường tròn tâm I đường kính AH. Suy ra $HN \perp AN$. Mặt khác từ tính chất quen thuộc khi chứng minh $BHCA'$ là hình bình hành ta cũng suy ra $HIOM$ là hình bình hành do đó $HM // OI$. Ta lại có OI là đường nối tâm của 2 đường tròn $(O), (I)$ nên $OI \perp AN$ (Do OI nằm trên đường trung trực của AN). Từ đó suy ra $MH \perp AN$. Hay M, H, N thẳng hàng.



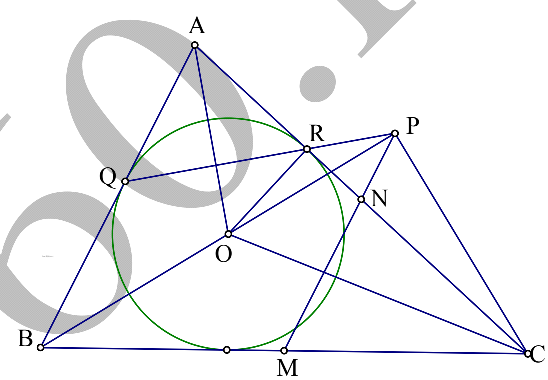
hoc360.net

*) Để chứng minh K, E, D thẳng hàng. Ta chứng minh: $\widehat{KEN} + \widehat{NED} = 180^0$. Ta tìm cách quy 2 góc này về 2 góc đối nhau trong một tứ giác nội tiếp.

+ Ta có: $\widehat{NEA} = \widehat{NHA}$ (Cùng chắn cung NA), $\widehat{NHA} = \widehat{NKB}$ cùng phụ với góc $\widehat{KAH}$ suy ra $\widehat{NEA} = \widehat{NKB} \Leftrightarrow NKBE$ nội tiếp suy ra $\widehat{NEK} = \widehat{NBK}$. Mà $\widehat{NBK} = \widehat{NAD}$ (Do $NBCA$ nội tiếp).

+ Từ đó suy ra $\widehat{KEN} + \widehat{NED} = \widehat{NAD} + \widehat{NED} = 180^0$ (Điều phải chứng minh).

Câu 10) Phân tích định hướng giải:



a). Ta cần dùng các góc để tận dụng điều kiện AR, AQ là các tiếp tuyến của (O)

Thật vậy: $\widehat{ORC} = 90^0$,

vì vậy ta cần chứng minh

$\widehat{OPC} = 90^0$.

Mặt khác do NM là đường trung bình của tam giác ABC nên $\widehat{ABP} = \widehat{BPM}$ nhưng $\widehat{ABP} = \widehat{PBM}$ (Tính chất phân giác trong)

Từ đó suy ra ΔBMP cân tại $M \Rightarrow MB = MP = MC \Leftrightarrow \Delta BPC$ vuông tại $P \Rightarrow \widehat{ORC} = \widehat{OPC} = 90^0$ hay $ORPC$ là tứ giác nội tiếp.

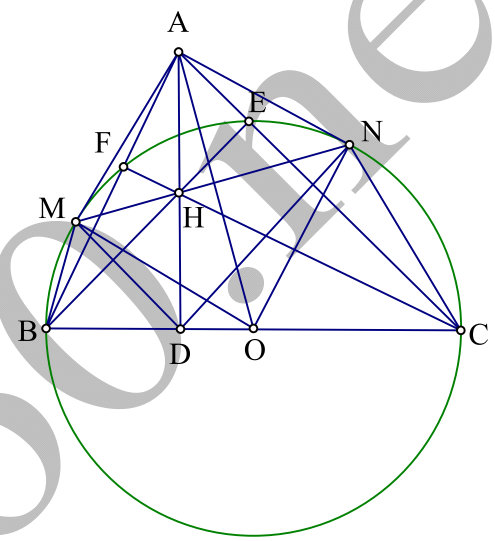
b). Để chứng minh P, Q, R thẳng hàng ta chứng minh: $\widehat{PRC} + \widehat{CRQ} = 180^0$.

Thật vậy ta có: $\widehat{PRC} = \widehat{POC}$ mà $\widehat{POC} = \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$,

$\widehat{CRQ}=180^0-\widehat{ARQ}=180^0-\left(\dfrac{180^0-\widehat{A}}{2}\right)=90^0+\dfrac{\widehat{A}}{2}$ suy ra

$\widehat{PRC}+\widehat{CRQ}=\dfrac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}+90^0+\dfrac{\widehat{A}}{2}=180^0$ (Đpcm).

11) Phân tích định hướng giải:



a). Ta có: $\widehat{AMO}=\widehat{ANO}=\widehat{ADO}=90^0$ nên 5 điểm A,M,D,O,N cùng nằm trên đường tròn đường kính AO.
Suy ra các tứ giác

$AMDN, MNDO$ là tứ giác nội tiếp.

b). Ta có: $BDHF$ là tứ giác nội tiếp

nên: $AH.AD=AF.AB$

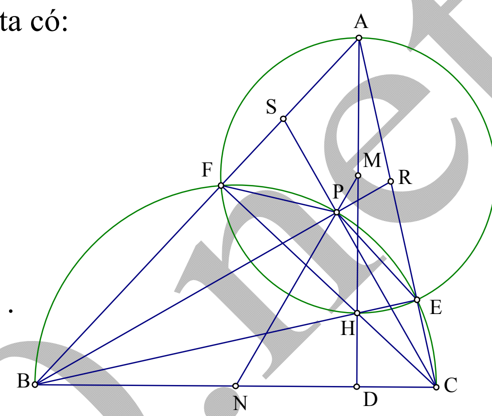
Mặt khác $AF.AB=AM^2$

nên $AM^2=AH.AD=AF.AB$. Hay AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MHD suy ra $\widehat{AMH}=\widehat{ADM}$. Ta cũng có: $AMDN$

là tứ giác nội tiếp nên: $\widehat{AMN}=\widehat{ANM}=\widehat{ADM}$ từ đó ta suy ra
$\widehat{AMH}=\widehat{AMN}$ hay M,H,N thẳng hàng.

Câu 12) Phân tích định hướng giải:

a). Ta thấy các điểm B, C, E, F nằm trên đường tròn đường kính BC. Để chứng minh 5 điểm B, C, E, P, F nằm trên một đường tròn



Ta cần chứng minh $\widehat{BPC} = 90^0$. Thật vậy ta có:

$\widehat{PBC} = \widehat{PBE} + \widehat{EBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABE} + \widehat{EBC}$

$= \frac{1}{2}\left(90^0 - \widehat{A}\right) + \left(90^0 - \widehat{C}\right)$

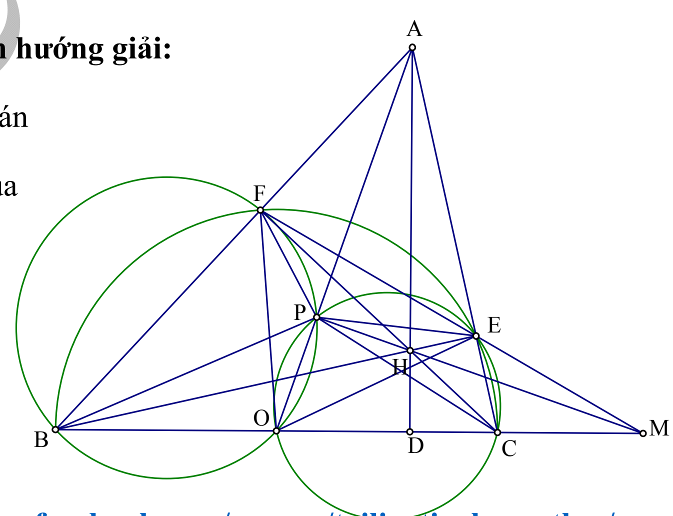
Tương tự ta cũng có: $\widehat{PCB} = \widehat{PCF} + \widehat{FCB}$.

$= \frac{1}{2}\left(90^0 - \widehat{A}\right) + \left(90^0 - \widehat{B}\right)$. Từ đó suy ra

$\widehat{PBC} + \widehat{PCB} = 270^0 - \left(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}\right) = 90^0 \Rightarrow \widehat{BPC} = 90^0$. Vậy điểm P thuộc đường tròn đường kính BC.Mặt khác BP là phân giác của góc $\widehat{ABH}$ nên P là trung điểm của cung nhỏ EF.

b). Để ý rằng M, N là tâm của hai đường tròn đường kính BC và đường tròn đường kính AH Do hai đường tròn cắt nhau theo dây cung EF nên MN đi qua trung điểm của cung EF. Hay M, N, P thẳng hàng.

Câu 13) Phân tích định hướng giải:



a). Điểm P trong bài toán chính là điểm Miquel của tam giác ABC.

+ Ta dễ thấy 4 điểm A, F, H, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AH.

Bây giờ ta chứng minh $AFPE$ là tứ giác nội tiếp.

Thật vậy ta có: $\widehat{FPE}=360^0-\widehat{FPO}-\widehat{EPO}$

$=360^0-\left(180^0-\widehat{B}\right)-\left(180^0-\widehat{C}\right)=\widehat{B}+\widehat{C}$ suy ra $\widehat{EPF}+\widehat{A}=180^0\Rightarrow AEPF$ là tứ giác nội tiếp hay 5 điểm A,E,P,F,H cùng nằm trên đường tròn đường kính $AH\Rightarrow EFPH$ là tứ giác nội tiếp.

+ Xét tứ giác $BPHC$ ta có:

$\widehat{BPH}=\widehat{BPE}-\widehat{HPE}=\widehat{BPO}+\widehat{OPE}-\widehat{HFE}=\widehat{BFO}+180^0-\widehat{C}-\widehat{HBC}$

$=\widehat{B}+180^0-\widehat{C}-\left(90^0-\widehat{C}\right)=90^0+\widehat{B}$. Mặt khác ta cũng có:

$\widehat{HCB}=90^0-\widehat{B}\Rightarrow\widehat{HCB}+\widehat{BPH}=180^0$ hay $BCHP$ là tứ giác nội tiếp.

+ Ta có: Ta có: $\widehat{FPA}=\widehat{FEA}=\widehat{FBC}\Rightarrow\widehat{FPA}+\widehat{FPO}=180^0\Rightarrow A,P,O$ thẳng hàng.

$\widehat{FEP}=\widehat{FAP}=\frac{1}{2}sđ\left(\overparen{BO}-\overparen{FP}\right)$, $\widehat{PBM}=\widehat{PFO}=\frac{1}{2}sđ\overparen{PO}=\frac{1}{2}sđ\left(\overparen{FO}-\overparen{FP}\right)$,

mặt khác ta có: $OB=OF\Rightarrow sđ\overparen{OB}=sđ\overparen{OF}$ suy ra $\widehat{FEP}=\widehat{PBM}\Leftrightarrow MEPB$ là tứ giác nội tiếp.

b). Theo câu a ta có: $MEPB$ nội tiếp nên

$\widehat{BPM}=\widehat{BEM}\Leftrightarrow\widehat{BPO}+\widehat{OPM}=\widehat{BEC}+\widehat{CEM}$

$\Leftrightarrow\widehat{BPO}+\widehat{OPM}=\widehat{BEC}+\widehat{AEF}$ mà

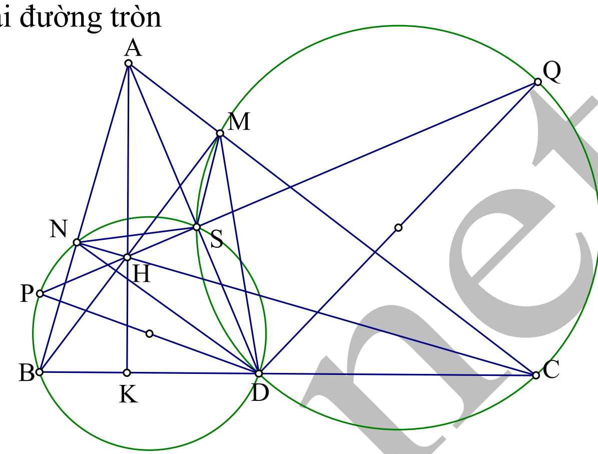
$\widehat{AEF}=\widehat{FBO}=\widehat{BFO}=\widehat{BPO}\Rightarrow\widehat{OPM}=\widehat{BEC}=90^0$ hay ΔOPM là tam giác vuông tại P

Chú ý: Bài toán này có thể giải theo cách như bài 1: Đó là chỉ ra $OH\perp AM$ suy ra H là trực tâm tam giác AOM, ngoài ra ta cũng thấy P,H,M thẳng hàng.

hoc360.net

Câu 14) Phân tích định hướng giải.

Gọi S là giao điểm thứ 2 của hai đường tròn $(w_1),(w_2)$. Ta dễ chứng minh được $ANSM$ là tứ giác nội tiếp (Đây là bài toán rất quen thuộc) từ đó suy ra 5 điểm A,N,H,S,M cùng nằm trên một đường tròn.



+ Trước hết ta chứng minh: A,S,D thẳng hàng:

Ta có: $\widehat{ASN} = \widehat{AHN}$ cùng chắn cung AN, $\widehat{NSD} = 180^0 - \widehat{NBD} = \widehat{NHK}$ do các tứ giác $NSDB, NHKB$ nội tiếp . Suy ra

$\widehat{ASN} + \widehat{NSD} = \widehat{AHN} + \widehat{NHK} = 180^0$ do đó A,S,D thẳng hàng:

+ Vì 5 điểm A,N,H,S,M cùng nằm trên một đường tròn nên: $\widehat{ASH} = 90^0$.

Vì DP là đường kính của (w_1) suy ra $\widehat{PSD} = 90^0$, DQ là đường kính của (w_2) nên $\widehat{DSQ} = 90^0$ điều đó chứng tỏ các tia PS,HS,QS trùng nhau. Hay P,S,Q thẳng hàng.

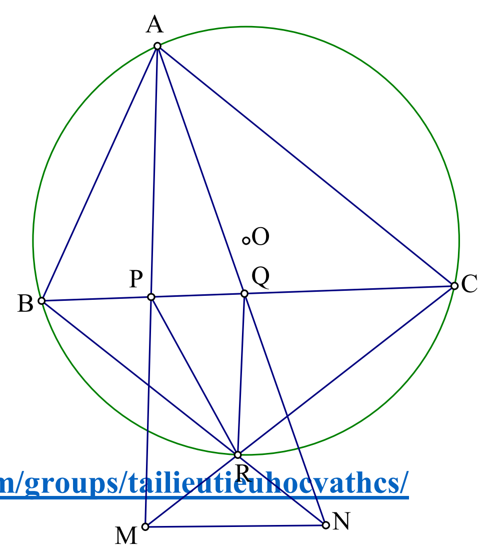
Câu 15).

Giả sử BN,CM cắt nhau tại R.

Ta cần chứng minh $ABRC$ nội tiếp.

Ta có $\Delta ABC \# \Delta PAC$ vì

($\widehat{C}$ chung, $\widehat{CAP} = \widehat{ABC}$)



suy ra $\frac{PA}{AB}=\frac{PC}{AC}$ (1) $\Delta ABC\# \Delta QBA$

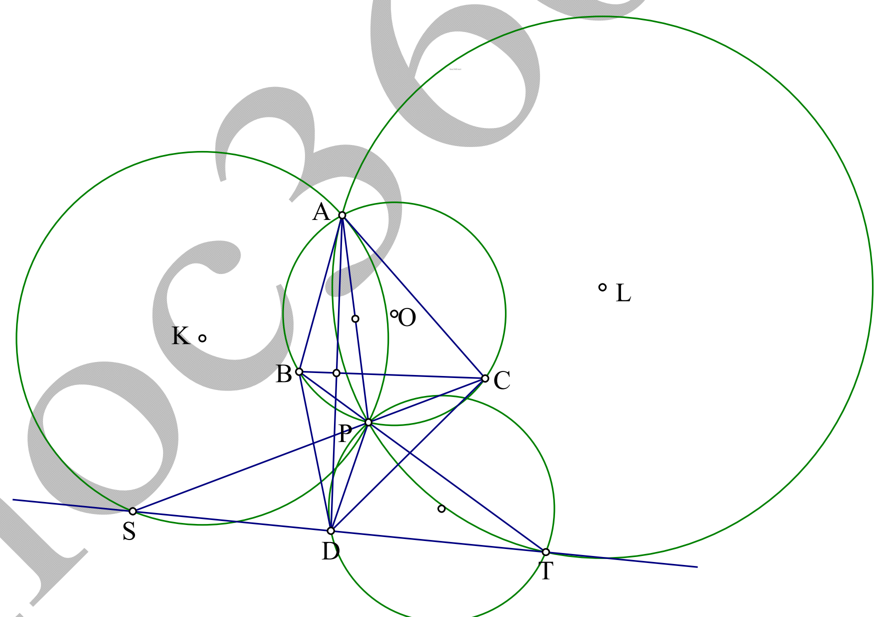
vì ($\hat{B}$ chung, $\widehat{BCA}=\widehat{QAB}$) suy ra

$\frac{QB}{AB}=\frac{QA}{AC}$ (2). Từ (1), (2) ta có: $\frac{QB}{QA}=\frac{PA}{PC}$. Vì $PA=PM$, $QA=QN$ suy ra $\frac{QB}{QN}=\frac{PM}{PC}$. Mặt khác $\widehat{MPC}=\widehat{PAC}+\widehat{ACB},\widehat{NQB}=\widehat{ABC}+\widehat{QAB}$ (Tính chất góc ngoài tam giác). Suy ra $\widehat{MPC}=\widehat{NQB}$ hay

$\Delta MPC\# \Delta BQN\Rightarrow \widehat{BNQ}=\widehat{PCM}\Rightarrow QCNR$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra

$\widehat{CRN}=\widehat{CQN}=\widehat{BAC}\Leftrightarrow ABRC$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 16). Phân tích định hướng giải:



a). Do A đối xứng với D qua BC nênta có $BA=BD$. Để ý rằng: AB là tiếp tuyến của (L) nên $BA^2=BT.BP\Rightarrow$ $BD^2=BT.BP$ điều này chứng tỏ

BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DPC.

b). Từ chứng minh ở câu a ta có: $\Delta BDT \# \Delta BPD \Rightarrow \widehat{BDT} = \widehat{BPD}$.

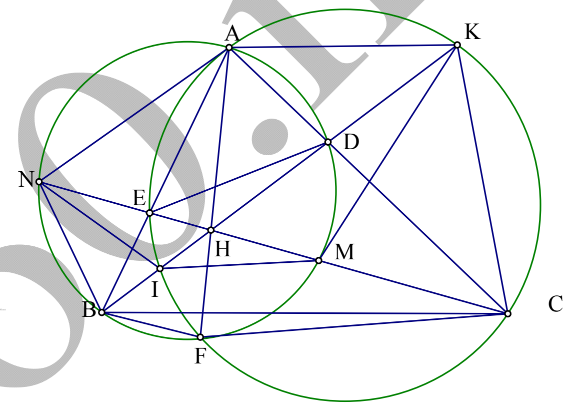
Tương tự ta cũng có: $\widehat{CDS} = \widehat{CPD}$.

Ta có:

$$\widehat{SDB} + \widehat{BDT} = \widehat{SDC} - \widehat{BDC} + \widehat{BDT} = \widehat{CPD} - \widehat{BAC} + \widehat{BPD} = \left(\widehat{CPD} + \widehat{BPD}\right) - \widehat{BAC}$$

Mặt khác ta có: $\widehat{CPD} + \widehat{BPD} = 360^0 - \widehat{BPC}$. Nhưng $\widehat{BPC} + \widehat{BAC} = 180^0$ do tứ giác $ABPC$ nội tiếp. Vậy $\widehat{SDB} + \widehat{BDT} = 180^0$ hay 3 điểm S, D, T thẳng hàng.

Câu 17)



Phân tích định hướng giải:

a). Theo giả thiết ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$

suy raTứ giác $BEDC$ là tứ giác

nội tiếp.Suy ra $HB.HD = HE.HC$

Tứ giác $BNDM$ nội tiếp nên:

$HB.HD = HM.HN$. Tứ giác $EICK$ nội tiếp nên $HI.HK = HE.HC$

Kết hợp các đẳng thức trên ta suy ra $HM.HN = HI.HK$ suy ra $NIMK$ là tứ giác nội tiếp.

Hay bốn điểm N, I, M, K cùng nằm trên một đường tròn.

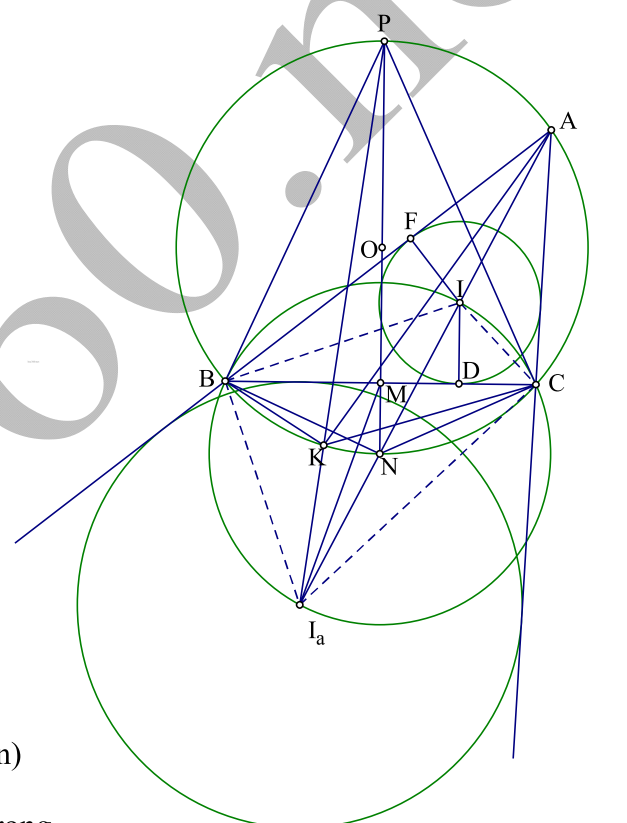
b). Giả sử đường thẳng AH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tại điểm F. Ta có tứ giác $NFMA$ nội tiếp nên: $HF.HA = HM.HN$ mặt khác theo chứng minh ở câu a) ta có: $NIMK$ nội tiếp nên: $HM.HN = HI.HK$ suy ra $HF.HA = HI.HK$ suy ra 4 điểm I, F, K, A cùng nằm trên một đường tròn. Điều đó chứng tỏ hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, ACE cắt nhau tại F và A, H, F thẳng hàng.

hoc360.net

c) Ta có $\widehat{AMN} = \widehat{MAC} + \widehat{MCA}$ (Góc ngoài của tam giác). Mặt khác $\widehat{ACM} = \widehat{ABD}$ (giả thiết) suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{ABD} + \widehat{MAC} = \widehat{AND} + \widehat{MAD} = \widehat{AND} + \widehat{MND} = \widehat{ANM}$. Suy ra tam giác AMN cân tại A.

Chú ý rằng: Chứng minh tương tự ta cũng có: AIK cân tại A suy ra A là tâm vòng tròn ngoại tiếp tứ giác $NIMK$.

Câu 18) Phân tích định hướng giải :



a). Gọi N là giao điểm của PO với đường tròn (O) thì N là điểm chính giữa của cung BC (không chứa A). F là tiếp điểm của (I) với AB.

Ta có các tính chất quen thuộc sau:

+ A, I, N, I_a thẳng hàng

+ Tam giác NIB, NIC cân tại N (Hay N là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác IBC)

(Xem thêm phần góc với đường tròn)

+ $BI_a \perp BI, CI_a \perp CI$ (Phân giác trong và phân giác ngoài cung một góc thì vuông góc với nhau).

Từ đó suy ra tứ giác IBI_aC là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm N.

hoc360.net

b). Để chứng minh NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP ta chứng minh: $NI_a^{\,2} = NM.NP$.

Mặt khác $NI_a = NB$ nên ta cần chứng minh: $NB^2 = NM.NP$. Nhưng điều này là hiển nhiên do:

+ NP là đường kính của (O) nên $\widehat{NBP} = 90^0$, M là trung điểm của BC nên $PN \perp BC$ tại M + Hệ thức lượng trong tam giác vuông PBN cho ta $NB^2 = NM.NP$.

c). Vì $\widehat{KAI} \equiv \widehat{KAN} = \widehat{KPN}$ (Góc nội tiếp), $\widehat{KPN} \equiv \widehat{I_aPN}$ nhưng NI_a là tiếp tuyến của ngoại tiếp tam giác I_aMP nên $\widehat{I_aPN} = \widehat{NI_aM}$.

Như vậy ta cần chứng minh: $\widehat{NI_aM} = \widehat{DAI}$ (*).Ta có: $MN // ID$ nên $\widehat{MNI_a} = \widehat{DIA}$ do đó ta cần chứng minh: $\Delta NMI_a \# \Delta IDA$.

Điều này tương đương với: $\dfrac{NM}{ID} = \dfrac{NI_a}{IA}$, nhưng ta có: $ID = IF$, $NI_a = NB$ nên ta cần chứng minh: $\dfrac{NM}{FI} = \dfrac{NB}{IA}$.

Để ý rằng: $\Delta MNB, \Delta FIA$ có:

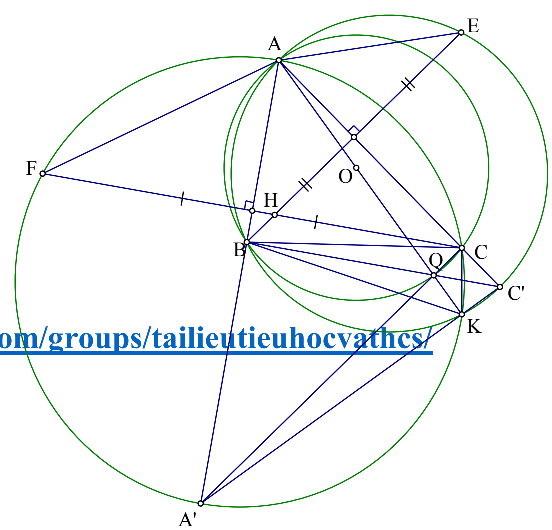
$\widehat{MNB} = \widehat{IFA} = 90^0$, $\widehat{NBM} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{IAF} \Rightarrow \Delta MNB \# \Delta FIA$. (Bài toán được giải quyết).

Câu 19) Phân tích định hướng:

Vì $BC = R\sqrt{3}$. Áp dụng công thức

$BC = 2R\sin\widehat{BAC} = R\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sin\widehat{BAC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ do đó



hoc360.net

$A = 60^0$. Trong bài toán

có các yếu tố cố định là

$BC, \widehat{A}$ nên ta tập trung khai

thác các yếu tố này.

a). Ta có: $\widehat{BKC} = \widehat{AKB} + \widehat{AKC}$. Mà $\widehat{AKB} = \widehat{AEB} = \widehat{ABE} = 90^0 - \widehat{A} = 30^0$,

$\widehat{AKC} = \widehat{AFC} = \widehat{ACF} = 90^0 - \widehat{A} = 30^0$, suy ra $\widehat{BKC} = \widehat{AKB} + \widehat{AKC} = 60^0$. Do đó K luôn thuộc cung chứa góc nhìn đoạn BC dưới một góc 60^0.

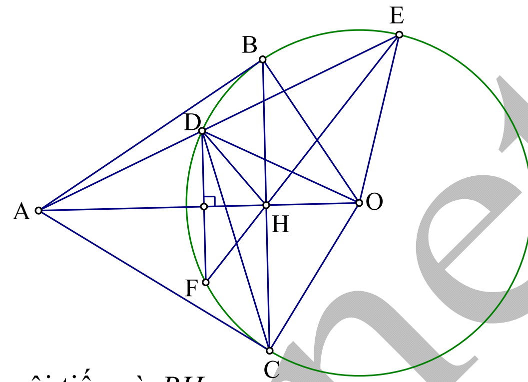
b). Ta có tam giác KBC có độ dài cạnh BC không đổi , nên diện tích lớn nhất khi và chỉ khi đường cao hạ từ K đến BC lớn nhất. Tức là K là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$, khi đó A là trung điểm cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. Tam giác KBC đều nên độ dài đường cao tam giác đều KBC là $\sqrt{3}R.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}R$,

$\Rightarrow S_{\Delta KBC} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}R.\sqrt{3}R = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

c) Để ý rằng: $AB \perp CF$ tại trung điểm của CF, $AC \perp BE$ tại trung điểm của CE nên kéo dài AB cắt đường tròn (ACF) tại A' thì AA' là đường kính của đường tròn. Kéo dài AC cắt đường tròn (ABE) tại $C' \Rightarrow AC'$ là đường kính của đường tròn.

Dễ thấy A', K, C' thẳng hàng. $\widehat{ACA'} = 90^0$, $\widehat{ABC'} = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nữa đường tròn) nên các đường cao CA', BC' của tam giác $AA'C'$ cắt nhau tại trực tâm Q.Nên đường thẳng AK đi qua Q. Mặt khác tứ giác $ABQC$ nội tiếp $\widehat{ABQ} = \widehat{ACQ} = 90^0 \Rightarrow CQ$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABQC$. Điều đó chứng tỏ CQ đi qua O cố định.

Câu 20) Bài toán này làm ta liên tưởng đến tính chất quen thuộc: Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) dựng hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE. Gọi H là giao điểm của BC và AO thì $HDEO$ là tứ giác nội tiếp và BH là đường phân giác trong của DHE. (Các em học sinh tự chứng minh tính chất này)

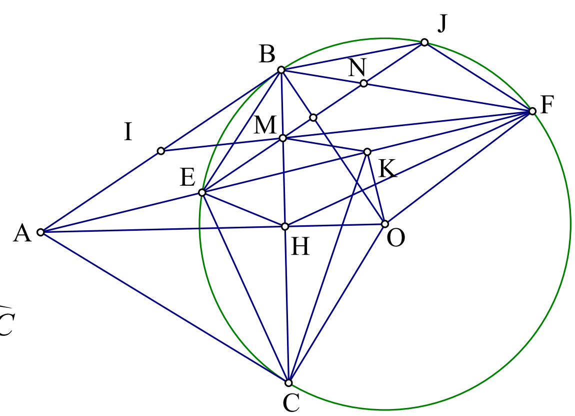


Quay trở lại bài toán:

Ta có BH là đường phân giác trong của DHE nên $\widehat{DHA} = \widehat{EHO} = \widehat{AHF}$. Suy ra $\widehat{AHE} + \widehat{AHF} = 180^0$. Nên ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Câu 21)

Do 5 điểm A, B, K, O, C cùng nằm trên một đường tròn nên ta có: $\widehat{CKO} = \widehat{OBC}$. Mà $\widehat{EKC} = 90^0 - \widehat{CKO}$ suy ra $\widehat{EKC} = 90^0 - \widehat{OBC} = \widehat{BMJ} = \widehat{EMC}$ hay tứ giác $EMKC$ nội tiếp.



Kéo dài FM cắt AB tại I.

Ta chứng minh I là trung điểm của AB. Do tứ giác $EMKC$ nội tiếp nên $\widehat{EKM} = \widehat{ECM}$ mà $\widehat{ECM} = \widehat{EFB}$ suy ra $\widehat{EKM} = \widehat{EFB} \Leftrightarrow MK // FB$

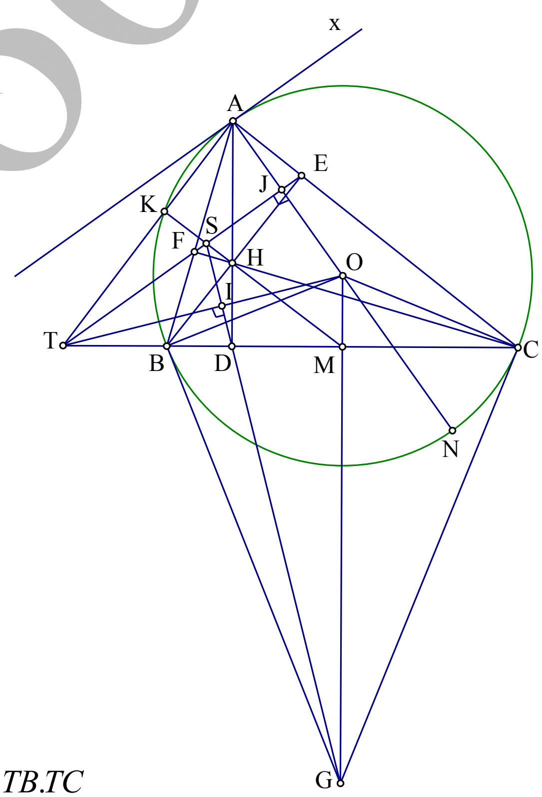
Suy ra M là trung điểm của EN. Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{ME}{AI} = \frac{MN}{BI} = \frac{FM}{FI}$ mà $ME = MN \Rightarrow AI = BI$ (đpcm).

Câu 22) Giả sử GD cắt TO tại I, TF cắt AO tại J. Khi đó ta dễ dàng chứng minh được: $AO \perp EF$ tại J. Thật vậy: Dựng tiếp tuyến Ax của (O) thì $Ax \perp AO$. Ta có: $\widehat{xAC} = \widehat{ABC}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{AEF} \Rightarrow \widehat{xAC} = \widehat{AEF} \Rightarrow Ax // EF$ hay $AO \perp EF$.

Ta cũng chứng minh được: $GS \perp TO$ tại điểm I. Thật vậy ta có:

$\widehat{MFB} = \widehat{MBF} \Leftrightarrow \widehat{MFD} + \widehat{DFB} = \widehat{MTF} + \widehat{TFB}$ mà

$\widehat{DFB} = \widehat{DCA} = \widehat{EFA} = \widehat{TFB}$



suy ra $\widehat{MFD} = \widehat{MTF}$ hay

$\Delta MDF \# \Delta MTF$ suy ra

$MF^2 = MD.MT$. Mặt khác ta

có: $MO.MG = MB.MC = MF^2$

(Do $MB = MC = MF$)

Suy ra $MO.MG = MD.MT$

hay $\Delta MOT \# \Delta MDG \Rightarrow GI \perp OT$.

Dễ thấy 4 điểm A, K, H, E cùng

nằm trên đường tròn đường kính AH.

Tứ giác $AKBC$ nội tiếp nên: $TK.TA = TB.TC$

Tứ giác $EFBC$ nội tiếp nên suy ra $TK.TA = TF.TE$ hay tứ giác $AKFE$ nội tiếp. Từ đó suy ra 5 điểm A, K, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

Tứ giác $JSIO$ nội tiếp nên $TS.TJ = TI.TO$. Tứ giác $IOMD$ nội tiếp

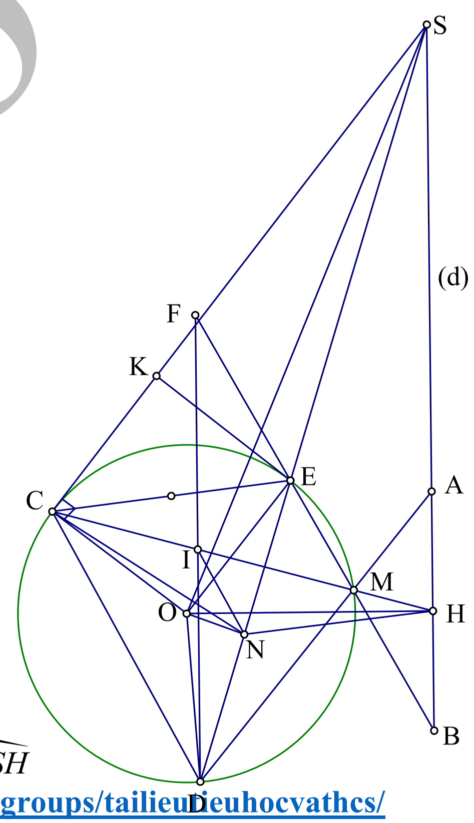
nên $TI.TO = TM.TD$**.** Xét tứ giác $MDFE$ ta có:

$\widehat{FDE} = 180^0 - \widehat{FDB} - \widehat{EDB} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{A} = 180^0 - 2\widehat{A}$ .Mặt khác ta cũng có

$\widehat{FME} = 180^0 - \widehat{FMB} - \widehat{EMC} = 180^0 - \left(180^0 - 2\widehat{B}\right) - \left(180^0 - 2\widehat{C}\right) = 2(\widehat{B} + \widehat{C}) - 180$

$= 180^0 - 2\widehat{A}$. Suy ra tứ giác $MDFE$ nội tiếp. Do đó $TD.TM = TE.TF$.
Nhưng $TE.TF = TK.TA$ suy ra $TS.TJ = TA.TK$ hay tứ giác $AKSJ$ nội tiếp
$\widehat{SKA} = \widehat{SJA} = 90^0 \Rightarrow S \in HK$. Mặt khác từ chứng minh trên ta cũng có:
$AKMD$ nội tiếp nên $\widehat{MKA} = \widehat{MDA} = 90^0$. Suy ra M, H, S, K thẳng hàng.

Câu 23) Trong bài toán có giả thiết H là trung điểm AB .Mặt khác các điểm $A.B, H$ có liên quan đến cát tuyến qua M . Để tận dụng điều này ta sẽ dựng đường thẳng qua D song song với đường thẳng (d) cắt HC, BM tại I, F . Khi đó ta dễ chứng minh được I là trung điểm của DF theo định lý Thales từ đó suy ra IN là đường trung bình của tam giác IEF .Để chứng minh tứ giác $HNCS$ nội tiếp ta chứng minh:



$\widehat{NCH} = \widehat{HSN}$. Mặt khác ta có: $\widehat{IDN} = \widehat{NSH}$

hoc360.net

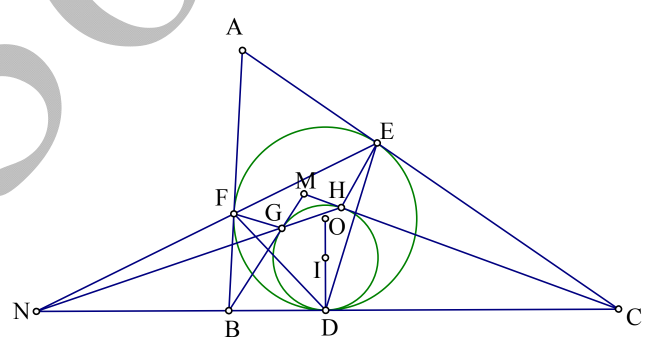
so le trong. Như vậy ta cần chứng minh:

$\widehat{NCH}=\widehat{IDN}$ tức là ta cần chứng minh $ICDN$ nội tiếp.

+ Thật vậy: $\widehat{INE}=\widehat{NEM}$ (so le trong) mà $\widehat{MEN}\equiv\widehat{MED}=\widehat{MCD}$ suy ra $\widehat{INE}=\widehat{MCD}$ hay $ICDN$ là tứ giác nội tiếp.

+ Ta có tứ giác $HNCS$ nên: $\widehat{SNH}=\widehat{SCH}$. Tứ giác $ONHS$ nội tiếp nên $\widehat{SNH}=\widehat{SOH}$ suy ra $\widehat{SCH}=\widehat{SOH}$. Hay tứ giác $SCOH$ là tứ giác nội tiếp. Nhưng $\widehat{OHS}=90^0\Rightarrow\widehat{OCS}=90^0\Rightarrow SC$ là tiếp tuyến của (O). Mà KC cũng là tiếp tuyến của (O) nên ta suy ra S,K,C thẳng hàng.

Câu 24)



Theo tính chất tuyến tuyến ta có: $CE=CD=CH$, $BF=BD=BG$, $MH=MG$, $AE=AF$

+ Ta có:

$\widehat{HEF}=180^0-\widehat{AEF}-\widehat{HEC}$. Mặt khác

$\widehat{AEF}=\dfrac{180^0-\widehat{A}}{2},\widehat{HEC}=\dfrac{180^0-\widehat{ECH}}{2}$ suy ra $\widehat{HEF}=\dfrac{\widehat{ECH}+\widehat{A}}{2}$ (1)

+ Ta có: $\widehat{EGH}=\widehat{FGM}+\widehat{MGH}$ nhưng

$\widehat{FGM} = 180^0 - \widehat{FGB} = 180^0 - \dfrac{180^0 - \widehat{FBG}}{2} = 90^0 + \dfrac{\widehat{FBG}}{2}$,

$\widehat{MGH} = \dfrac{180^0 - \widehat{GMH}}{2} = 90^0 - \dfrac{\left(180^0 - \widehat{MBC} - \widehat{MCB}\right)}{2} = \dfrac{\left(\widehat{MBC} + \widehat{MCB}\right)}{2}$ suy ra $\widehat{EGH} = 90^0 + \dfrac{\widehat{FBG} + \widehat{MBC} + \widehat{MCB}}{2}$ (2) . Từ (1) và (2) ta có:

$\widehat{HEF} + \widehat{EGH} = \dfrac{\widehat{ECH} + \widehat{A}}{2} + 90^0 + \dfrac{\widehat{FBG} + \widehat{MBC} + \widehat{MCB}}{2} = 90^0 + \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 180^0$

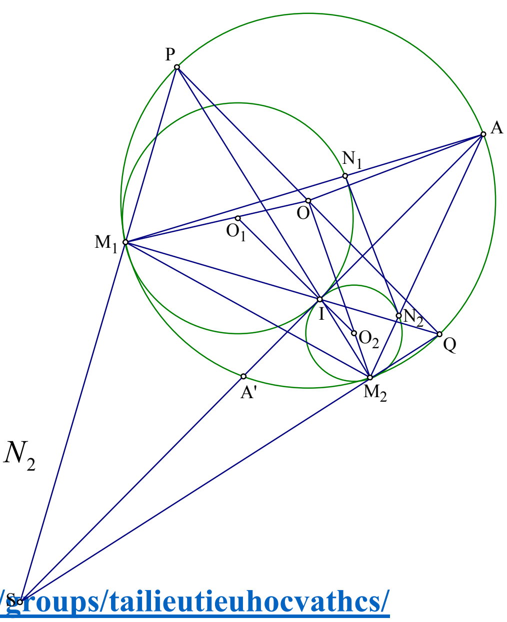
Hay tứ giác $EHGF$ nội tiếp.

Việc chứng minh trực tiếp N, G, H thẳng hàng là rất khó. Để khắc phục khó khăn này ta giả sử NG cắt đường tròn (I) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EHGF$ lần lượt tại H_1, H_2. Ta sẽ chứng minh $H_1 \equiv H_2 \equiv H$.

Thật vậy: Theo tính chất tiếp tuyến, cát tuyến ta có: $NG.NH_1 = ND^2$,
$NG.NH_1 = NE.NF$, $NE.NF = ND^2$,
$NG.NH_2 = NE.NF \Rightarrow NH = NH_1 = NH_2 \Leftrightarrow H_1 \equiv H_2 \equiv H$ là điều phải chứng minh.

Câu 25)

Phân tích định hướng giải toán:



a). Do AI là tiếp tuyến chung của các đường tròn $(O_1),(O_2)$ nên $AN_1.AM_1 = AI^2 = AN_2.AM_2$

Từ đó suy ra tứ giác $N_1M_1N_2M_2$ nội tiếp.

b). Để chứng minh OA vuông góc với N_1N_2

Ta chứng minh $\widehat{AN_1N_2} + \widehat{OAM_1} = 90^0$

hoc360.net

Thật vậy ta có: Từ việc chứng minh

$N_1M_1N_2M_2$. Ta suy ra $\widehat{AN_1N_2} = \widehat{N_2M_2M} = \frac{1}{2}\widehat{M_1OA}$

Do đó $\widehat{AN_1N_2} + \widehat{OAM_1} = \frac{1}{2}\widehat{M_1OA} + \frac{1}{2}\left(\widehat{OAM_1} + \widehat{OM_1A}\right) = 90^0$ (Do tam giác M_1OA cân tại O). Vậy OA vuông góc với N_1N_2.

c) Ta có $AI \perp PQ \Rightarrow PQ//O_1O_2$. Gọi S là giao điểm của PM_1 và QM_2 thì O, O_2, M_2 thẳng hàng và $O_2I//OP \Rightarrow \widehat{O_2IM_2} = \widehat{M_2PO}$ mặt khác ta có: $\widehat{O_2IM_2} = \widehat{IM_2O_2} \Rightarrow \widehat{M_2PO} = \widehat{O_2IM_2}$. Suy ra P, I, M_2 thẳng hàng . Tương tự Q, I, M_1 thẳng hàng. Mà PQ là đường kính của (O) nên $QM_1 \perp M_1P, QM_2 \perp M_2P$. Suy ra I là trực tâm tam giác SPQ. Suy ra AI qua S. Vậy ba đường thẳng AI, PM_1, QM_2 đồng quy tại I.

Câu 26)

a) Có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: E nằm trong đoạn NP. Ta có $\widehat{OEN} = \widehat{OBP} + \widehat{BPE}$ (Góc ngoài tam giác). Ta có

$\widehat{OBP} = \frac{\widehat{B}}{2}, \widehat{EPB} = 180^0 - \widehat{NPA} = 180^0 - \frac{\left(180^0 - \widehat{A}\right)}{2} = 90^0 + \frac{\widehat{A}}{2}$. Từ đó suy ra

$\widehat{OEN} = 90^0 + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = 180^0 - \frac{\widehat{C}}{2} = 180 - \widehat{OCA}$.

Trường hợp 2: E nằm ngoài đoạn NP. Ta có

$\widehat{OEN} = 180^0 - \widehat{BPN} - \widehat{EBP} = 180^0 - 90^0 - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} = 90^0 - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\widehat{C}}{2} = \widehat{OCA}$

(Đpcm)

hoc360.net

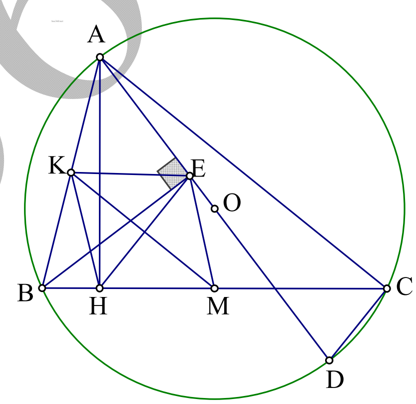
b) Từ kết quả chứng minh ở câu a)

Ta suy ra $ONEC$ là tứ giác nội tiếp suy ra $\widehat{ONC} = \widehat{OEC} = 90^0$, Chứng minh tương tự ta cũng có: $OFPB$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{OFB} = \widehat{OPB} = 90^0$ do đó $\widehat{OFB} = \widehat{OEC} \Leftrightarrow \widehat{CFB} = \widehat{BEC}$ suy ra 4 điểm B, E, C, F cùng nằm trên một đường tròn.

c) Gọi I là giao điểm của BE, CF. Từ chứng minh ở câu b ta suy ra O là trực tâm

của tam giác IBC. Suy ra O, I, M thẳng hàng. Ta cũng có: I, F, E, O cùng nằm trên đường tròn đường kính OI nên K là trung điểm của OI. Từ đó suy ra K, O, M thẳng hàng.

Câu 27)



a). Có $\widehat{BHA} = \widehat{BEA} = 90^0 \Rightarrow$

tứ giác $BHEA$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{ABC}$ mà

$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \Rightarrow$

$\widehat{HED} = \widehat{EDC} \Rightarrow HE // CD$

b) Nối K với E, K với H. Ta được $KE = KH = \frac{1}{2}AB \Rightarrow K$ thuộc trung trực của HE .Có $DC \perp CA$ và $HE // CD \Rightarrow HE \perp AC$.

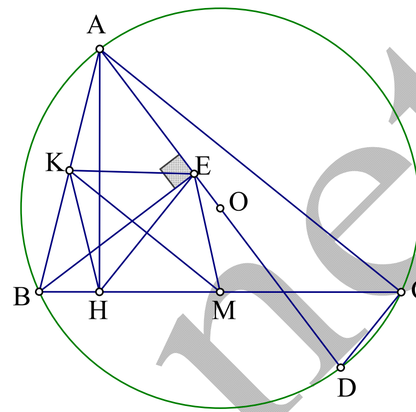
Có $KM // AC$ và $HE \perp AC \Rightarrow KM \perp HE \Rightarrow KM$ là trung trực của $HE \Rightarrow ME = MH$ hay ΔMHE cân tại M.

Câu 28)

a). Ta có $\widehat{AMO}=\widehat{ADO}=\widehat{ANO}=90^0$

nên 5 điểm A,M,D,O,N thuộc đường

tròn tâm O' đường kính AO.



b) Ta có $\widehat{ADB}=\widehat{ADC}=90^0$ (1) mà

$\widehat{ADM}=\widehat{ADN}$ (2) (góc nội tiếp chắn

hai cung bằng nhau).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

c) Qua I ta kẻ đường thẳng song song BC cắt AB,AC tại P,Q. Ta có các tứ giác $OMPI,OQNI$ nội tiếp nên $\widehat{POI}=\widehat{PMI};\widehat{QOI}=\widehat{INA}$ mà $\widehat{PMI}=\widehat{INA}$ (do ΔAMN cân tại A). Nên $\widehat{POI}=\widehat{QOI}$. Xét ΔPOQ có OI vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên $IP=IQ$. Áp dụng hệ quả định lý Talet cho hai tam giác ABK và ACK có $PQ//BC$. Ta có $\frac{BK}{IP}=\frac{AK}{AI}=\frac{CK}{IQ}\Rightarrow BK=CK$ (đpcm).

Câu 29)

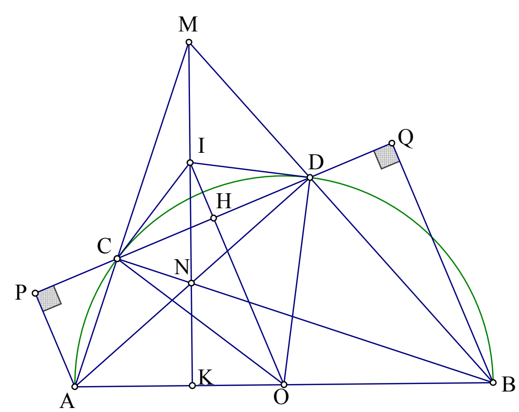
a). Ta có $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}=90^0$

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $\widehat{MCN}=\widehat{MDN}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{MCN}+\widehat{MDN}=180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $MCDN$ nội tiếp



đường tròn tâm I đường kính MN (theo định lý đảo). Kẻ AP và AQ vuông góc với đường thẳng CD ta có tứ giác $APQB$ là hình thang vuông có OH là đường trung bình nên $AP + BQ = 2OH$. Trong ΔOCD đều có OH là đường cao nên $OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ không đổi. Vậy $AP + AQ = R\sqrt{3}$ không đổi. Theo giả thiết $\widehat{COD} = 60^0$ nên sđ$\overset{\frown}{CD} = 60^0$.

$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{CD}\right) = 60^0$ nên $\widehat{CMD} = 60^0$, ta có

$\widehat{CID} = 2\widehat{CMD} = 120^0$

Trong tam giác DIH vuông có $DH = DI.\sin 60^0 \Rightarrow DI = \frac{DH}{\sin 60^0} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ (không đổi). Ta có tam giác CID, COD cân tại I và O có H là trung điểm CD nên IH và OH cùng vuông góc với CD suy ra I, H, O thẳng hàng.

c) $\Delta MCD \sim \Delta MBA$ (g.g)

nên $\frac{S_{MCD}}{S_{MBA}} = \left(\frac{MD}{MA}\right)^2 = \left(\sin 30^0\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{MCD} = \frac{1}{4}S_{MBA}$.

S_{MCD} lớn nhất khi S_{MBA} lớn nhất. Kéo dài MN cắt AB tại K thì MK vuông góc với AB. Ta có MN không đổi, MK lớn nhất khi NK lớn nhất và N chạy trên cung 120^0 dựng trên AB; NK max khi N thuộc trung điểm cung này, khi đó tam giác MAB đều,

$S_{MBA} = \frac{1}{2}AB.MH = R^2\sqrt{3}$; $\max\left(S_{MCD}\right) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Cách khác: Kẻ $ME \perp CD$ thì $ME \le MH \le MI + IH$. Tính được $IH; MI$ theo R.

Câu 30)

a). Ta có $\widehat{BOK} = \widehat{OAM}$ (1) (đồng vị);

$\widehat{MOK} = \widehat{AMO}$ (2) (so le trong);

$\widehat{OMA} = \widehat{OAM}$ (3) (ΔAOM cân) (3).

Từ (1),(2),(3) ta có $\widehat{BOK} = \widehat{KOM}$.

Xét ΔBOK và ΔKOM có $OB = OM = R; \widehat{BOK} = \widehat{KOM}$; OM chung nên $\Delta BOK = \Delta MOK$ (c.g.c) suy ra $\widehat{OMK} = \widehat{OBK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OMK} + \widehat{OBK} = 180^0$ nên bốn điểm O, B, K, M cùng thuộc một đường tròn đường kính OK.

b) Ta có tứ giác $CHDM$ là hình chữ nhật nên CD và MH cắt nhau tại I và là trung điểm của mỗi đường. Ta chứng minh K, I, A thẳng hàng. Gọi MB cắt OK tại P; KA cắt (O) tại N cắt MH tại I' ta có tứ giác $BPNK$ nội tiếp (vì $\widehat{BPK} = \widehat{BNK} = 90^0$) nên cùng bù với $\widehat{PNK}$ mà so le. Nên $\widehat{I'NP} = \widehat{I'MP}$ suy ra tứ giác $I'MNP$ nội tiếp suy ra $\widehat{MNA} = \widehat{MPI}$ mà $\widehat{MNA} = \widehat{MBA} \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MPI'}$ ở vị trí đồng vị nên $PI' // AB$ mà $PI // AB$ nên $I \equiv I'$. Vậy AK đi qua I hay ba đường thẳng CD, MH, AK đồng quy.

c) Ta có $EF = \frac{1}{2}(AH + HB) = \frac{1}{2}AB = R$ (không đổi) $\Delta EHI = \Delta ECI$ (c.c.c); $\Delta FHI = \Delta DHI$ (c.c.c) nên $S_{CDFE} = 2.S_{EIF}$

$S_{EFI} = \frac{1}{2}EF.IH = \frac{R.MH}{4} \le \frac{R.MO}{4} = \frac{R^2}{4} \Rightarrow S_{CDFE} \le \frac{R^2}{4}$

$\max(S_{CDFE}) = \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow H \equiv O$ khi M thuộc chính giữa $\overset{\frown}{AB}$.

hoc360.net

Câu 31)

a). Tam giác ABI cân tại B nên

$\widehat{BAI} = \widehat{BIA}$ suy ra $\widehat{EAI} = \widehat{EIA}$

hay $EA = EI$ (1).Xét ΔDIE vuông

cân đỉnh I do đó $IE = ID$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AE = ID$ (đpcm).

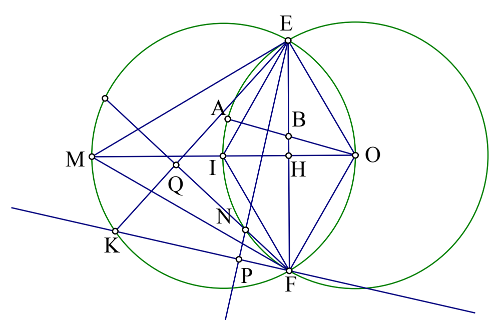
b) Do $\dfrac{DA}{DI} = \dfrac{ID}{FD} \Leftrightarrow DA.DF = ID^2$ và $EI \perp BD$ nên đường tròn (E) đi qua I và nhận BD làm tiếp tuyến. Từ đó ta có $\widehat{DAI} = \widehat{DIF}$.

Xét $\Delta AID \sim \Delta IFD$ có $\dfrac{DA}{DI} = \dfrac{ID}{FD} \Leftrightarrow DA.DF = ID^2$. Mặt khác $ID = IE$ nên $DA.DF = IE^2$ (1). Do ΔABI cân tại B nên $EB \perp AI$.

Xét $\Delta IHE \sim \Delta BIE$ có $\dfrac{IE}{EB} = \dfrac{EH}{IE} \Leftrightarrow EH \pm EB = IE^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DF.DA = EH.EB$ (đpcm).

Câu 32)



a). Ta có ME, MF là tiếp tuyến của đường tròn (O), từ đó dễ dàng chứng minh được $\overset{\frown}{EI} = \overset{\frown}{FI}$ của đường tròn (O). Dễ dàng chứng minh được EI, FI, MI là các đường phân giác của

ΔMEF.

b) Gọi EF cắt OM tại H. Dễ chứng minh được
$OA.OB = OH.OM = OE^2$

c) Ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMEF và ΔMEF đều có cạnh bằng $R\sqrt{3}$. Sử dụng góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung để chứng minh $FQ \perp EK$. Ta có $PN.PK + QN.QK = 2S_{KPNQ} \le KN.QP$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $KN \perp PQ$ (*). Mà N là trực tâm tam giác EKF nên $KN = 2.IH = R$ (1). Ta có $\Delta KPQ \sim \Delta KEF$ nên
$\dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{KP}{KE} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow PQ = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ (2). Thay (1),(2) vào (*) ta có đpcm, dấu bằng khi $KN \perp PQ$ hay N, I trùng nhau.

Câu 33)

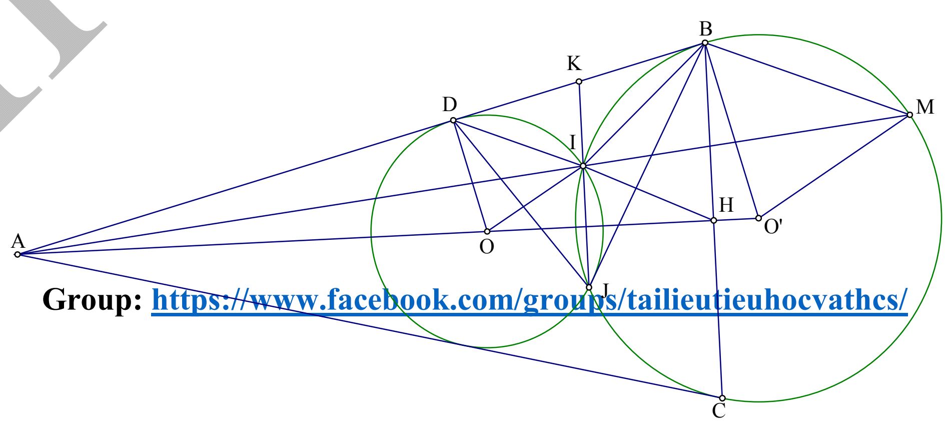
a) $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{PC}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} - \text{sđ}\overset{\frown}{PC}\right) = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AP} = \widehat{ABP}$.

b) $\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PC} \Rightarrow \widehat{CAP} = \widehat{ABP} = \widehat{AMB} \Rightarrow CM = AC = AB$.

Xét $\Delta MAC \sim \Delta MBP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MP}$

$\Rightarrow MA.MP = MB.MC = MB.AB$.

Câu 34)



a) Do AO và AO' là hai phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow A,O,O'$ thẳng hàng.

Có $\widehat{BJI} = \widehat{IBK} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BI}; \widehat{BKI}$ chung $\Rightarrow \Delta KBI \sim \Delta KJB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{KI}{KB} = \frac{KB}{KJ} \Rightarrow KB^2 = KI.KJ$ (1). Tương tự

$\Delta KDI \sim \Delta KJD \Rightarrow \frac{KI}{KD} = \frac{KD}{KJ} \Leftrightarrow KD^2 = KI.KJ$ (2). Từ (1) và (2)

$\Rightarrow KB = KD$.

b) Xét $\Delta ABO'$ vuông có: $AB^2 = AH.AO'$ (3).

Lại có $\widehat{ABI} = \widehat{AMB} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BI}$, $\widehat{BAI}$ chung$\Rightarrow \Delta ABI \sim \Delta AMB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow AB^2 = AM.AI$ (4). Từ (3) và (4)

$\Rightarrow AI.AM = AH.AO' \Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AM}{AO'} \Rightarrow \Delta AHI \sim \Delta AMO'$ (vì

$\frac{AH}{AI} = \frac{AM}{AO'}$, $\widehat{A}$ chung) $\Rightarrow \widehat{AHI} = \widehat{AMO'} \Rightarrow$ tứ giác $MIHO'$ nội tiếp

hay 4 điểm I,H,M,O' cùng thuộc một đường tròn.

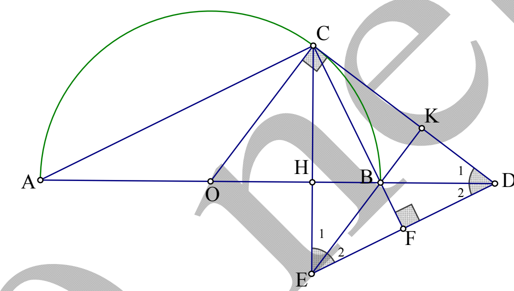
c) Do $OD // O'B$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \frac{AO}{AO'} = \frac{OD}{O'B} = \frac{R}{R'} = \frac{OI}{O'M} = \frac{OI}{O'I}$

nhưng OI cắt $O'I$ và A,I,M thẳng hàng

$\Rightarrow OI // O'M \Rightarrow \widehat{DOI} = \widehat{BO'M}$. Mà $\widehat{BDI} = \frac{1}{2}\widehat{DOI} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{DI}$ và

$\widehat{BIM} = \frac{1}{2}\widehat{BO'M} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BM} \Rightarrow \widehat{BDI} = \widehat{BIM} \Rightarrow IM$ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔBID hay AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔIBD.

Câu 35)



a). Ta có $\widehat{DCB} = \widehat{CAB}$

(cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$), $\widehat{BCE} = \widehat{CAB}$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \widehat{DCB} = \widehat{BCE}$. Do đó CB là tia phân giác của $\widehat{DCE}$.

b) Xét ΔCDE có: $\begin{cases} EK \perp CD\left(BK \perp CD\right) \\ DH \perp CE\left(CH \perp AB\right) \end{cases} \Rightarrow B$ là trực tâm ΔCDE

$\Rightarrow CB \perp DE$ tại F hay CB là đường cao của ΔCDE. Mà CB là tia phân giác của $\widehat{DCE}$ nên ΔCDE cân tại $C \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CDE}$. Mặt khác $\widehat{D_1} = \widehat{E_1}$ (góc cạnh tương ứng vuông góc), $\widehat{D_2} = \widehat{E_2}$. Do đó ΔBDE cân tại $B \Rightarrow BD = BE \Rightarrow BD + BK = BE + BK = EK$

Trong tam giác CKE vuông tại K có $EK < EC$ (cạnh huyền lớn nhất)

$\Rightarrow BK + BD < EC$.

c) Xét ΔABC có $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
$\Rightarrow BH.BA = BC^2$ (hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông)

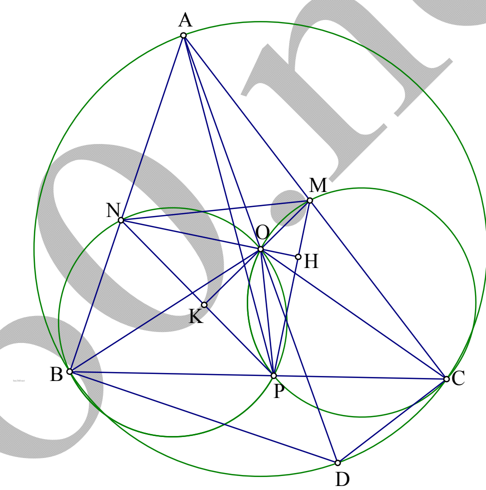
Ta lại có: $\Delta BHC \sim \Delta BFD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BH}{BF} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BH.BD = BC.BF$

$\Rightarrow BH.\left(BA + BD\right) = BC.\left(BC + BF\right) \Leftrightarrow BH.AD = BC.CF$ (1)\

Mặt khác ta có: $AC//DE$ (cùng vuông góc với CF) $\Rightarrow \widehat{D_2} = \widehat{CAB}$ (so le trong) mà $\widehat{AHC} = \widehat{DFB} = 90^0 \Rightarrow \Delta ACH \sim \Delta DBE$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AH}{DF} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow AH.BD = DF.AC$ (2). Mặt khác $\Delta ABC \sim \Delta CDF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CF}{DF} \Rightarrow BC.CF = DF.AC$ (3). Từ (1),(2) và (3) suy ra $BH.AD = AH.BD$.

Câu 36)



a) $\widehat{OPM} = \widehat{OCM}$ (nội tiếp chắn $\overset{\frown}{OM}$) mà $\widehat{OPM} = \widehat{OAC}$ (ΔOAC cân) nên $\widehat{OPM} = \widehat{OAC}$ (1).

b) Tương tự $\widehat{OPN} = \widehat{OAB}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{MPN} = \widehat{BAC}$. Kéo dài AO cắt (O) tại D. Ta có $\widehat{DBA} = \widehat{DBC}; \widehat{OBA} = \widehat{OAB}$ nên

$90^0 = \widehat{DBA} = \widehat{DBC} + \widehat{CBO} + \widehat{OBA} = \widehat{DAC} + \widehat{COB} + \widehat{OAB} = \widehat{OBC} + \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{OBC} + \widehat{BAC} = 90^0$ (đpcm)

c) Gọi H là giao điểm của NO và MP, MO cắt NP tại K. Ta có $\widehat{HNP} = \widehat{OBC}$ mà $\widehat{OBC} + \widehat{BAC} = 90^0$ và $\widehat{BAC} = \widehat{HPN}$

$\Rightarrow \widehat{HNP} + \widehat{HPN} = 90^0$ hay $NH \perp MP$ (3). Tương tự $MK \perp NP$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra O là trực tâm ΔMNP (đpcm)

Câu 37)

hoc360.net

a). Gọi A', B' lần lượt là hình

chiếu vuông góc của A, B lên

đường thẳng MN. Gọi H là

trung điểm đoạn thẳng MN

thì $OH \perp MN$.

Xét hình thang $AA'B'B$ có

OH là đường trung bình nên

$OH = \frac{1}{2}\left(AA' + BB'\right) = \frac{R\sqrt{3}}{2}; MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{3R^2}{4}} = \frac{R}{2}$

$\Rightarrow MN = 2MH = R$.

b) Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{KMI} = \widehat{KNI} = 90^0$. Suy ra bốn điểm M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn đường kính KI.

Vì $MN = R$ nên ΔOMN đều.

$\widehat{KAN} = \widehat{MAN} = \frac{1}{2}\widehat{MON} = 30^0 \Rightarrow \widehat{AKN} = 60^0$. Gọi O' là trung điểm của IK thì O' là tâm của đường tròn đi qua bốn điểm M, N, I, K và $R' = O'M$ là bán kính của đường tròn này. Do đó

$\widehat{MO'N} = 2\widehat{MKN} = 2\widehat{AKN} = 120^0 \Rightarrow MN = R'\sqrt{3} \Rightarrow R' = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

c) Gọi P là giao điểm của IK và AB, do I là trực tâm của ΔKAB nên $KI \perp AB$, nên KP là đường cao tam giác KAB hạ từ K. Do O, O' nằm trên trung trực đoạn MN, nên O, O', H thẳng hàng. Xét $\Delta MOO'$ có $\widehat{OMO'} = 90^0$ $\left(\widehat{MOO'} = 30^0, \widehat{MO'O} = 60^0\right)$. Suy ra $OO' = 2MO' = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

mà ΔKAB có AB không đổi nên nó có diện tích lớn nhất khi KP lớn

Truy cập Website: hoc360.net – Tải tài liệu học tập miễn phí

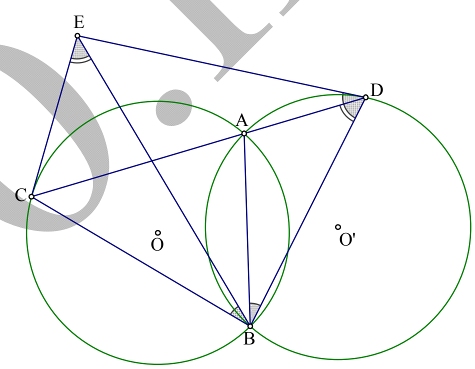
nhất. Ta có $KP \le KO' + OO' = \dfrac{R}{\sqrt{3}} + \dfrac{2R}{\sqrt{3}} = R\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $P \equiv O \Leftrightarrow OO' \perp AB \Leftrightarrow MN / / AB \Leftrightarrow \Delta KAB$ cân tại $K \Leftrightarrow KAB$ đều (do $\widehat{AKB} = 60^0$).

Do đó $S_{KAB} = \dfrac{1}{2}AB.KP = R.KP \le \sqrt{3}R^2$.

Kết luận: Diện tích ΔKAB lớn nhất bằng $\sqrt{3}R^2$ khi và chỉ khi $MN / / AB$ (hay ΔKAB đều).

Câu 38)



a) $\widehat{ABD} = \widehat{ADE} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$ của (O'),

$\widehat{ABC} = \widehat{ACE} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AC}$ của (O)

$\Rightarrow \widehat{CED} + \widehat{CBD} = \widehat{CED} + \widehat{ABD} + \widehat{ABC}$
$= \widehat{CED} + \widehat{ACE} + \widehat{ADE} = 180^0$

(tổng ba góc trong ΔECD).

Vậy tứ giác $BDEC$ nội tiếp.

b) Vì tứ giác $BCED$ nội tiếp nên $\widehat{CEB} = \widehat{CDB}; \widehat{EBC} = \widehat{EDC}$ mà $\widehat{EDC} = \widehat{ABD}$ nên $\widehat{EBC} = \widehat{ABD}$.

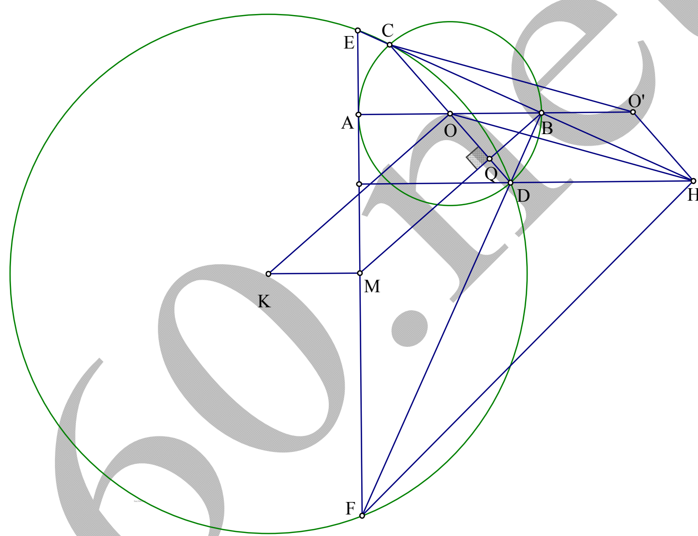
$\Rightarrow \Delta EBC \sim \Delta DBA \Rightarrow \dfrac{EC}{EB} = \dfrac{DA}{DB} \Rightarrow EC.DB = DA.EB$ (1). Tương tự $\Delta EBD \sim \Delta CBA \Rightarrow \dfrac{ED}{EB} = \dfrac{CA}{CB} \Rightarrow ED.CB = CA.EB$ (2). Từ (1) và (2) ta được: $EC.DB = ED.CB = DA.EB + CA.EB = (DA + CA)EB = CD.EB$.

Group: https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/

Nhận xét: Kết quả câu b) thực chất là định lý **Ptolemy** (Xem thêm phần *''Các định lý hình học nổi tiếng''*)

Câu 39)

a). Vì CD là đường kính $\left(OB = OD = R\right)$



nên $\widehat{CBD} = 90^0$. Do đó $\widehat{BEF} = \widehat{ABF}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn), mà $\widehat{ABF} = \widehat{ODB}$ $\left(OB = OD = R\right)$

nên $\widehat{BEF} = \widehat{CDB}$. Do đó tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

b) Gọi $Q = BM \cap CD$, ΔBEF vuông tại B nên $BM = ME \Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{MEB}$ (1)

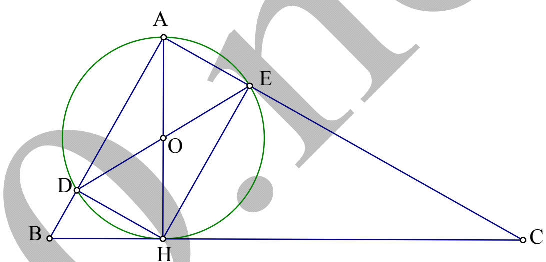
ΔBCD vuông tại B nên $\widehat{BCD} + \widehat{BDC} = 90^0$ mà $\widehat{BDC} = \widehat{BEF}$ (chứng minh ở câu a) nên $\widehat{BCD} + \widehat{BEF} = 90^0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BCD} + \widehat{MBE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BQC} = 90^0$ hay $BM \perp CD$.

c) K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDEF$, M là trung điểm của EF nên $KM \perp EF \Rightarrow KM//AB$ (vì cùng vuông góc với EF). Tương tự $KO//BM$ (cùng vuông góc với CD). Do đó tứ giác $KMBO$ là hình bình hành nên $MK = BO = R$.

d) H là trực tâm của tam giác DEF, do đó $HD \perp EF$ suy ra $HD//AB$. Tương tự $BH//AD$ (cùng vuông góc với EF). Do đó tứ giác $BHDA$ là hình bình hành nên $BH = AD$. Mặt khác tứ giác $BDAC$ là hình chữ nhật nên $AD = BC \Rightarrow BH = BC$ (3).Lấy O' đối xứng với O qua B ta có $BO' = BO$ (4) với O' cố định vì B,O cố định. Từ (3) và (4) suy ra tứ giác $HO'CO$ là hình bình hành nên $O'H = OC = R$. Vậy H chạy trên đường tròn $(O';R)$ cố định.

Câu 40)



a) Nối H với E.

$\widehat{HEA} = 90^0$ (vì AH là đường kính),

$\widehat{AHC} = 90^0$ (AH là đường cao)

$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{EHC}$) (1) $\widehat{ADE} = \widehat{AHE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$) (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ACB} \Rightarrow$ tứ giác $BDEC$ nội tiếp đường tròn

b) Vì $\widehat{DAE} = 90^0 \Rightarrow DE$ là đường kính $\Rightarrow D,O,E$ thẳng hàng (đpcm).

c) Ta có $S_{BDEC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADE}$

ΔABC vuông có AH là đường cao:

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4cm \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.AC}{2} = 6\left(cm^2\right)$

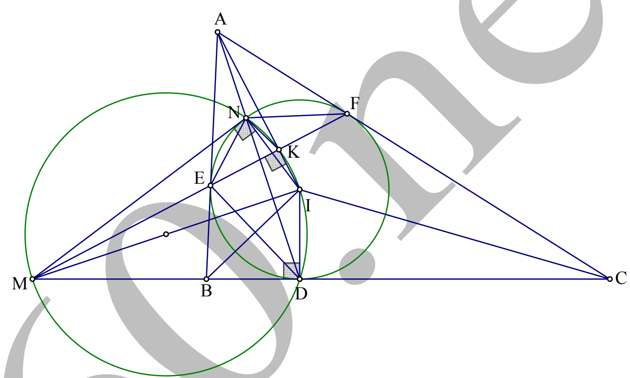
$DE = AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{12}{5}(cm)$ (cùng là đường kính đường tròn (O))

ΔADE và ΔABC có $\hat{A}$ chung; $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (câu a)

$\Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$ (g.g) $\Rightarrow$ Tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng $\Leftrightarrow \dfrac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{DE}{BC}\right)^2 \Leftrightarrow S_{\Delta AED} = \dfrac{S_{\Delta ABC}.DE^2}{BC^2}$

$$S_{BDEC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ABC}\left(1 - \frac{DE^2}{BC^2}\right) = 6\left(1 - \frac{12^2}{5^2.5^2}\right) = \frac{2886}{625}\left(cm^2\right)$$

Câu 41)



a) Nối N với F, D với F.

+ Xét ΔANF và AFD có $\widehat{AFN} = \widehat{ADF}$ (vì AF là tiếp tuyến) và $\widehat{FAD}$ chung

$\Rightarrow \Delta ANF \sim \Delta AFD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AN}{AF} = \dfrac{AF}{AD} \Leftrightarrow AF^2 = AN.AD$ (1)

+ Xét ΔAFI có $AF \perp IF$ (vì AF là tiếp tuyến, FI là bán kính) và $FK \perp AI$ (vì AF và AE là tiếp tuyến chung và AI nối tâm) $\Rightarrow \Delta AFI$ vuông tại F có FK là đường cao) $\Rightarrow AK.AI = AF^2$ (2).

+ Xét ΔANK và ΔAID có $\widehat{IAD}$ chung. Từ (1) và (2)

$\Rightarrow AN.AD = AK.AI \Rightarrow \dfrac{AN}{AK} = \dfrac{AI}{AD}$

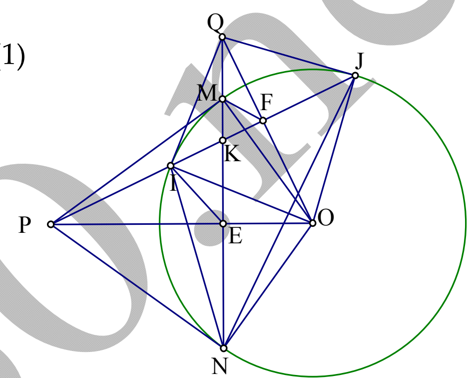
$\Rightarrow \Delta ANK \sim \Delta AID$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NKA} = \widehat{IDN}$ (3). Từ (3) có $\widehat{IDN} + \widehat{DKN} = \widehat{NKA} + \widehat{DKN} = 180^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác $DIKN$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow$ Các điểm I, D, N, K cùng thuộc đường tròn (đpcm)

b) Ta có $ID \perp DM$ (DM là tiếp tuyến, DI là bán kính) và $IK \perp KM$ (câu a) $\Rightarrow$ Tứ giác $DIKM$ nội tiếp đường tròn đường kính MI. Vì bốn

Truy cập Website: hoc360.net – Tải tài liệu học tập miễn phí

điểm D, I, K, N cùng thuộc một đường tròn (câu a) $\Rightarrow$ Hai đường tròn này ngoại tiếp ΔDIK $\Rightarrow$ Hai đường tròn trùng nhau $\Rightarrow$ N cũng nằm trên đường tròn đường kính MI $\Rightarrow \widehat{INM} = 90^0$. Vì IN là bán kính đường tròn (I), $MN \perp IN \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của đường tròn (I) tại tiếp điểm N (đpcm).

Câu 42)



1.a) $\Delta PIN \sim \Delta PNJ \Rightarrow PI.PJ = PN^2$ (1)

Xét ΔPON vuông tại N

có $NE \perp PO \Rightarrow PN^2 = PE.PO$ (2)

$\Delta PKE \sim \Delta POF$

$\Rightarrow PK.PF = PO.PE$ (3)

Từ (1),(2) và (3) $\Rightarrow PI.PJ = PK.PF$

b) $\Delta PIO \sim \Delta POJ$ suy ra tứ giác $IEOJ$ nội tiếp (4)

Ta có $\widehat{IEP} = \widehat{IJO}; \widehat{IEP} + \widehat{QEI} = 90^0; \widehat{IJO} + \widehat{QOJ} = 90^0 \Rightarrow \widehat{QEI} = \widehat{QOJ}$.

Mà $\widehat{QOJ} = \widehat{QOI} \Rightarrow \widehat{QEI} = \widehat{QOI}$. Suy ra tứ giác $QIEO$ nội tiếp (5)

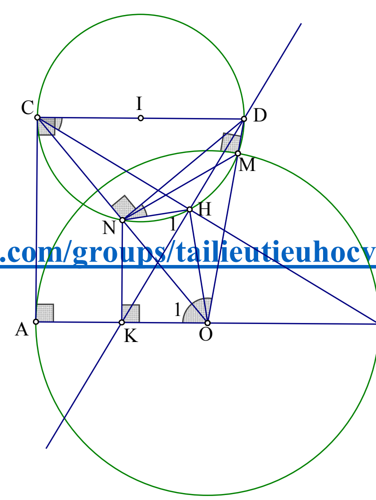
Từ (4) và (5) suy ra Q, I, O, J cùng thuộc một đường tròn.

Câu 43) a). Ta có MC là tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow MC \perp MO$ (1)

Xét đường tròn (I):

Ta có $\widehat{CMD} = 90^0$

$\Rightarrow MC \perp MD$ (2)



Group: https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/

hoc360.net

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow MO//MD \Rightarrow MO$

và MD trùng nhau

$\Rightarrow O, M, D$ thẳng hàng.

b) CA là tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow CA \perp AB$ (3). Đường tròn (I) tiếp xúc với AC tại C $\Rightarrow CA \perp CD$ (4). Từ (3) và (4) $\Rightarrow CD//AB \Rightarrow \widehat{DCO} = \widehat{COA}$ (*) (hai góc so le trong) CA, CM là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O) $\Rightarrow \widehat{COA} = \widehat{COD}$ (**). Từ (*) và (**) $\Rightarrow \widehat{DOC} = \widehat{DCO} \Rightarrow \Delta COD$ cân tại D.

c) Gọi chân đường vuông góc hạ từ D tới BC là H có $\widehat{CHD} = 90^0$ $\Rightarrow H \in (I)$ (bài toán quỹ tích) DH kéo dài cắt AB ở K. Gọi N là giao điểm của CO và đường tròn (I) $\Rightarrow \widehat{CND} = 90^0$ và ΔCOD cân tại $D \Rightarrow NC = NO$. Ta có tứ giác $NHOK$ nội tiếp.

Vì có $\widehat{H_2} = \widehat{O_1} = \widehat{DCO}$ (cùng bù với $\widehat{DHN}$) $\Rightarrow \widehat{NHO} + \widehat{NKO} = 180^0$ (5)

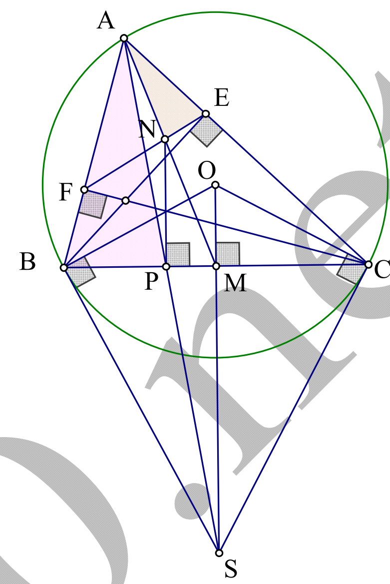
Ta có $\widehat{NDH} = \widehat{NCH}$ (cùng chắn cung NH của đường tròn (I))

$\widehat{CBO} = \widehat{HND} = \widehat{HCD} \Rightarrow \Delta DHN \sim \Delta COB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HN}{HD} = \dfrac{OB}{OC}$.

Tương tự ta có: $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OA}{OC}; \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{CN}{CD} = \dfrac{ON}{CD} \Rightarrow \dfrac{HN}{HD} = \dfrac{ON}{CD}$.

Mà $\widehat{ONH} = \widehat{CDH} \Rightarrow \Delta NHO \sim \Delta DHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NHO} = 90^0$ mà $\widehat{NHO} + \widehat{NKO} = 180^0$ (5) $\Rightarrow \widehat{NKO} = 90^0 \Rightarrow NK \perp AB \Rightarrow NK//AC$ $\Rightarrow K$ là trung điểm của OA cố định $\Rightarrow$ đpcm.

Câu 44)



a) Ta chứng minh $\Delta ABE \sim \Delta BSM$.

b) Từ câu a ta có $\frac{AE}{AB} = \frac{MB}{BS}$ (1)

mà $MB = EM$ (do ΔBEC vuông tại E có M là trung điểm của BC)

nên $\frac{AE}{AB} = \frac{EM}{BS}$

Có $\widehat{MOB} = \widehat{BAE}; \widehat{EBA} + \widehat{BAE} = 90^0$;

$\widehat{MBO} + \widehat{MOB} = 90^0$ nên $\widehat{MBO} = \widehat{EBA}$

do đó $\widehat{MEB} = \widehat{OBA} = \widehat{MBE}$. Suy ra $\widehat{MEA} = \widehat{SBA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AME \sim \Delta ABS$ (đpcm).

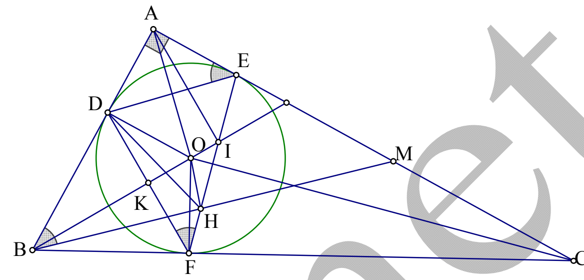
c) Dễ thấy SM vuông góc với BC nên ta chứng minh $NP//SM$.

Xét ΔANE và ΔAPB: Từ câu b) ta có $\Delta AEM \sim \Delta ABS$ nên $\widehat{NAE} = \widehat{PAB}$. Mà $\widehat{AEN} = \widehat{ABP}$ (do tứ giác $BCEF$ nội tiếp). Do đó $\Delta ANE \sim \Delta APB$ nên $\frac{AN}{AP} = \frac{AE}{AB}$. Lại có $\frac{AM}{AS} = \frac{AE}{AB} (\Delta AEM \sim \Delta ABS)$. Suy ra $\frac{AM}{AS} = \frac{AN}{AP}$ nên trong tam giác AMS có $NP//SM$ (định lý Talet đảo). Do đó bài toán được chứng minh.

Câu 45)

a). Gọi K là giao điểm của BO với $DF \Rightarrow \Delta IKF$ vuông tại K có $\widehat{DFE} = \frac{1}{2}\widehat{DOE} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{BIF} = 45^0$



b) Khi $AM = AB$ thì ΔABM vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{DBH} = 45^0$. Có $\widehat{DFH} = 45^0 \Rightarrow$ Tứ giác $BDHF$ nội tiếp $\Rightarrow$ 5 điểm B, D, O, H, F cùng thuộc một đường tròn.

$\widehat{BAH} = \widehat{BIH} = 45^0 \Rightarrow$ Tứ giác $ABHI$ nội tiếp.

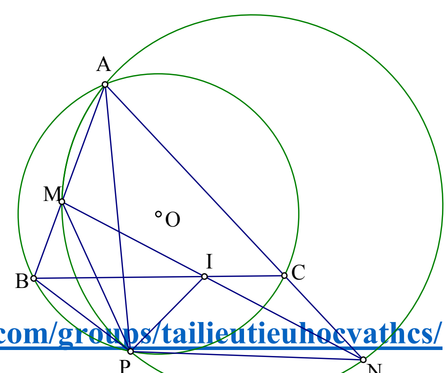
$\widehat{BFO} = \widehat{BHO} = 90^0 \Rightarrow OH \perp BM$, mà $OA \perp BM \Rightarrow A, O, H$ thẳng hàng.

c) Có tứ giác $PNQD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QPN} = \widehat{QDN} = \widehat{EFN}$.Tương tự có $\widehat{NQP} = \widehat{NDP} = \widehat{FEN} \Rightarrow \Delta NEF \sim \Delta NQP$. Cách xác định điểm M: Kẻ đường kính DN của (O), BN cắt AC tại M thì PQ lớn nhất. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv F; Q \equiv E \Rightarrow DN$ là đường kính của (O) $\Rightarrow PQ$ lớn nhất bằng $EF \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NE} \le 1 \Rightarrow PQ \le EF$.

Câu 46)

a). Chỉ ra $\widehat{PBI} = \widehat{PMI}\left(= \widehat{PAC}\right)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMIP$ nội tiếp.



Chỉ ra $\widehat{PNI} = \widehat{PCI}\left(= \widehat{PAB}\right)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CNIP$ nội tiếp.

b) Vì $BP = CP$ (giả thiết) $\Rightarrow \Delta BPC$ cân tại $P \Rightarrow \widehat{PBI} = \widehat{PCI}$.

Kết hợp câu a) $\Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{CAP}; \widehat{PMI} = \widehat{PNI} \Rightarrow \Delta PMN$ cân
$\Rightarrow PM = PN$.

$\Rightarrow PI$ là đường trung trực của $MN \Rightarrow PI \perp MN$

Kết hợp câu a) $\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{ACP} = 90^0 \Rightarrow \Delta ABP = \Delta ACP$ (g.c.g)

$\Rightarrow AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân.

Câu 47)

a). Ta có $MN//BC$ (gt), $ID \perp BC$ $\widehat{IFM} + \widehat{IKM} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

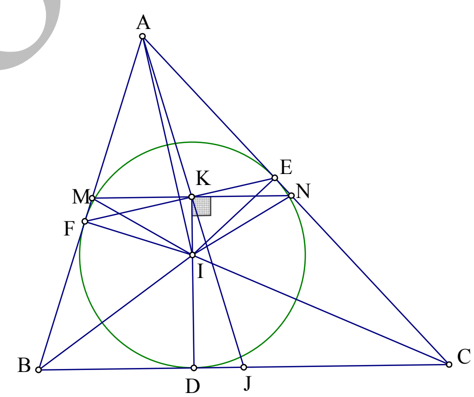
$\left(I\right)$ tiếp xúc với BC tại D

$\Rightarrow ID \perp MN \Rightarrow IK \perp MN$

$\Rightarrow \widehat{IKM} = \widehat{IKN} = 90^0 \Rightarrow$

$\widehat{IFM} + \widehat{IKM} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $IFMK$ nội tiếp.



Mặt khác $\widehat{IKN} = \widehat{IEN} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $IKEN$ nội tiếp. Ta có $\widehat{IMF} = \widehat{IKF}$ (tứ giác $IFMK$ nội tiếp) ; $\widehat{IKF} = \widehat{ANI}$ (tứ giác $IKEN$ nội tiếp)$\Rightarrow \widehat{IMF} = \widehat{ANI} \Rightarrow$ Tứ giác $IMAN$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{IMK} = \widehat{IFK}$ (tứ giác $IFMK$ nội tiếp); $\widehat{INK} = \widehat{IEK}$ (tứ giác $IKEN$ nội tiếp). Mặt khác $IE = IF\left(= r\right) \Rightarrow \Delta IEF$ cân tại

$I \Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{INK} \Rightarrow \Delta IMN$ cân tại I có IK là đường cao $\Rightarrow IK$ là đường trung tuyến của $\Delta IMN \Rightarrow K$ là trung điểm của MN

$\Rightarrow MN = 2MK$

Mà $BC = 2BJ$ (J là trung điểm của BC). Do đó

$\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{2MK}{2BJ} = \dfrac{MK}{BJ}$.Mặt khác ΔABC có $MN//BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$

(hệ quả của định lý Talet). Ta có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MK}{BJ}\left(= \dfrac{MN}{BC}\right)$. Xét ΔAMK và

ΔABJ có: $\widehat{AMK} = \widehat{ABJ}$ (hai góc đồng vị do $MN//BC$); $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MK}{BJ}$

$\Rightarrow \Delta AMK \sim \Delta ABJ$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MAK} = \widehat{BAJ} \Rightarrow$ Hai tia AK, AJ trùng nhau. Vậy ba điểm A, K, J thẳng hàng.

c) AE, AF là các tiếp tuyến của đường tròn $\left(I\right) \Rightarrow AE = AF$, AI là tia phân giác của $\widehat{EAF}$. ΔAEF cân tại A có $\widehat{EAF} = 60^0$ (gt) $\Rightarrow \Delta AEF$ đều $\Rightarrow EF = AE = AF$, ΔAEF đều có AI là đường phân giác $\Rightarrow AI$ là đường cao của $\Delta AEF \Rightarrow AI \perp EF \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}AI.EF$. ΔIAE vuông tại

$E \Rightarrow AE = IE.\cot\widehat{IAE}; IE = AI.\sin\widehat{IAE}$

$\Rightarrow AE = r.\cot 30^0 = r\sqrt{3}; AI = \dfrac{r}{\sin 30^0} = 2r \Rightarrow EF = AE = r\sqrt{3}$.

Vậy $S = \dfrac{1}{2}AI.EF = \dfrac{1}{2}.2r.\sqrt{3}.r = r^2\sqrt{3}$ (đvdt). Gọi H là giao điểm của AI và EF. Ta có $IH \perp EF$, H là trung điểm của EF và $\widehat{HIF} = 60^0$

ΔIHF vuông tại $H \Rightarrow IH = IF.\cos\widehat{HIF} = r.\cos 60^0 = \dfrac{1}{2}r$. Do đó

$S_{IEF} = \frac{1}{2}IH.EF = \frac{\sqrt{3}.r^2}{4}$ (đvdt).

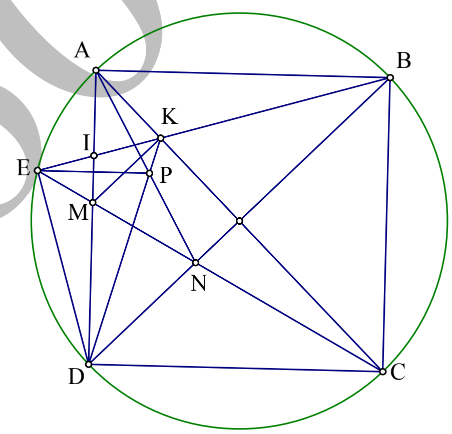
Xét ΔIMN và ΔIEF, ta có $\widehat{IMN} = \widehat{IFE}; \widehat{INM} = \widehat{IEF}$. Do đó

$\Delta IMN \sim \Delta IEF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{S_{IMN}}{S_{IEF}} = \left(\frac{IM}{IF}\right)^2$. Mà

$IF \perp FM \Rightarrow IM \geq IF \Rightarrow \frac{IM}{IF} \geq 1$. Do đó $\frac{S_{IMN}}{S_{IEF}} \geq 1 \Rightarrow S_{IMN} \geq S_{IEF}$. Ta có $S = \sqrt{3}r^2; S_{IEF} = \frac{\sqrt{3}.r^2}{4}; S_{IMN} \geq S_{IEF}$, vậy $S_{IMN} \geq \frac{S}{4}$.

Câu 48.

a).



*) Tứ giác $IABN$ nội tiếp do

+ $\widehat{IBN} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{ED}$,

+ $\widehat{IAN} = \widehat{DAC} - \widehat{NAC} = \widehat{DAN} - \widehat{NCA} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} - \text{sđ}\overset{\frown}{AE}\right)$

$= \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{ED}$

*) Ta có $\widehat{PNE} = \widehat{NAC} + \widehat{NCA} = 2\widehat{NCA}$=sđ$\overset{\frown}{EA}$,

$\widehat{PDE} = \widehat{PDA} + \widehat{ADE} = \widehat{ABE} + \widehat{ADE} = 2\widehat{ABE} =$ sđ$\overset{\frown}{AE}$. Suy ra tứ giác $PNDE$ nội tiếp.

b). Ta thấy tứ giác $AKME$ nội tiếp do $\widehat{MEK} = \widehat{MAK} = 45^0$ suy ra $\widehat{MEA} = \widehat{MKA} = 90^0$ suy ra $MK // BD \Rightarrow \widehat{MKD} = \widehat{KDB} = \widehat{EKM}$.

c). Ta có

$$\Delta MDC\$\ \Delta MEA \Rightarrow \frac{MD}{MC} = \frac{ME}{MA} \Leftrightarrow ME.MC = MD.MA = MD^2 = \frac{CD^2}{4}$$

Mặt khác ta có: $MC^2 = CD^2 + MD^2 = CD^2 + \frac{CD^2}{4} = \frac{5CD^2}{4}$ suy ra

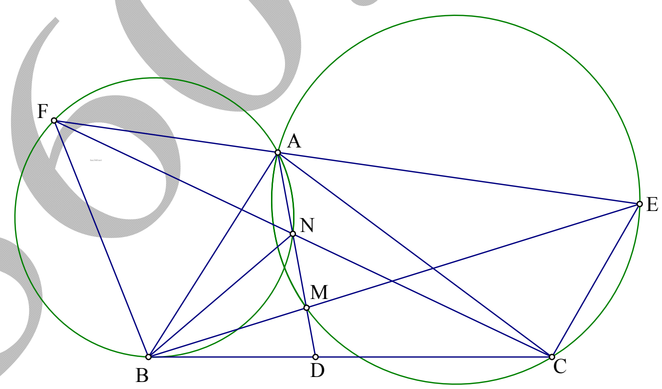
$$\Rightarrow MC = \frac{\sqrt{5}}{2}CD \Rightarrow ME = \frac{\sqrt{5}}{10}CD$$

hay $MC = 5ME$ .Ta có:

$$\frac{EA}{CD} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow EA = \frac{AM.CD}{MC} = \frac{\frac{CD^2}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}CD} = \frac{\sqrt{5}}{5}CD = \frac{\sqrt{10}}{5}R.$$

Câu 49). Giải:

Giả sử CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN tại điểm thứ hai F, BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC tại điểm thứ hai E. Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{CAM} = \widehat{MAB} = \widehat{CFB}$ do đó $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.



Suy ra $\widehat{EFC} = \widehat{EBC} = \widehat{ABN} = \widehat{AFN}$, do đó A, E, F thẳng hàng.

Khi đó $\widehat{ACM} = \widehat{AEM} = \widehat{FCB}$ suy ra $\widehat{BCM} = \widehat{ACN}$.

Câu 50. Giải:

Đường thẳng qua A song song với BD cắt BM tại Q.

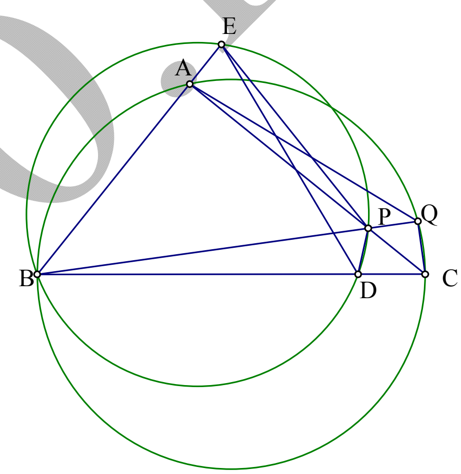
hoc360.net

Ta có $\dfrac{NA}{AB}=\dfrac{NA}{CD}=\dfrac{MA}{MD}=\dfrac{AQ}{BD}$ do đó $NA=AQ$. Mặt khác $\widehat{NAQ}=60^0$ nên tam giác NAQ đều.

Vậy phép quay tâm A góc quay 60^0 biến D thành B, N thành Q. Do đó DN và BQ tạo với nhau một góc 60^0.

Vậy $\widehat{BPD}=60^0$. Do đó P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Câu 51. Giải:



Vì tứ giác $BEPD, AQCB$

nội tiếp nên $\widehat{CAQ}=\widehat{CBQ}=\widehat{DEP}$.

Mặt khác $\widehat{AQC}=180^0-\widehat{ABC}=\widehat{EPD}$

(1).Áp dụng định lý Ptô –lê- mê

cho tứ giác $BEPD$ ta có

$PE.BD+PD.EB+DE.BP$ (2)

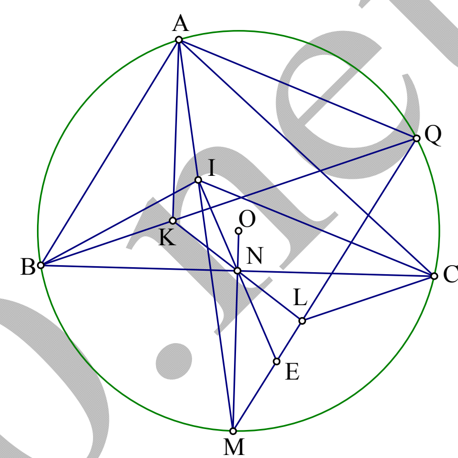
Từ (1) và (2) suy ra $AQ.BD+QC.EB=CA.BP$. Mặt khác $BD=EB=CA$ nên $AQ+QC=BP$.

Câu 52. Giải:

a) Ta có $\widehat{NCE} = \widehat{IBN} = \frac{1}{2}\widehat{B} < \frac{1}{2}\widehat{A} = \widehat{NCM}$. Do đó E nằm trong góc $\widehat{NCM}$ (1). Do $\widehat{B} > \widehat{C}$ nên N và C nằm về cùng một phía đối với AM.

Do đó E và C nằm về cùng một phía đối với AM (2).

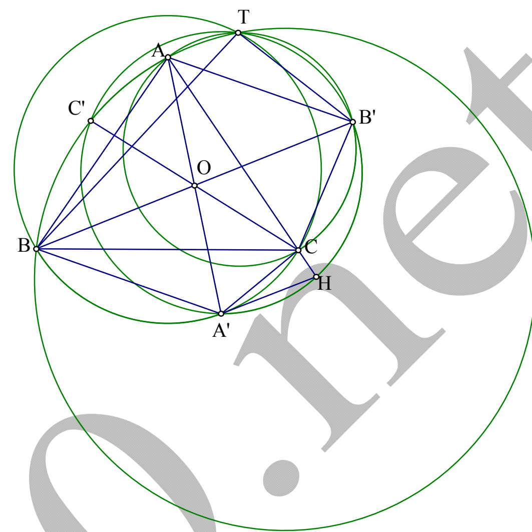
Từ (1) và (2) suy ra E nằm trong góc $\widehat{AMC}$. Vậy Q thuộc cung nhỏ AC.



b) Vì $QK = QA$ (3), suy ra $\widehat{QAK} = \widehat{AKQ} = \frac{1}{2}\widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{B} \Rightarrow \widehat{IAK} + \widehat{CAQ} = \frac{1}{2}\widehat{B} = \widehat{IBK} + \widehat{CBQ}$. Mặt khác $\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ}$ nên $\widehat{CAQ} = \widehat{IBK}$ hay tứ giác $AIKB$ nội tiếp. Từ đó ta có $\widehat{IKQ} = \widehat{BAI} = \frac{1}{2}\widehat{A} = \widehat{KQM}$ nên $KI//MQ$.

Gọi L là giao điểm của KN và MQ, khi đó $KILE$ là hình bình hành. Do đó N là trung điểm của KL.Vậy $BKCL$ là một hình bình hành. Mặt khác ta có $BK//CL, BK = CL$ và $\widehat{CLQ} = \widehat{BLQ} = \widehat{CQM}$ (4) nên $CL = QC$ (5). Từ (4) và (5) suy ra $BK = CL$ (6).
Từ (3) và (6) ta có $BQ = QA + QC$.

Câu 53. Giải:



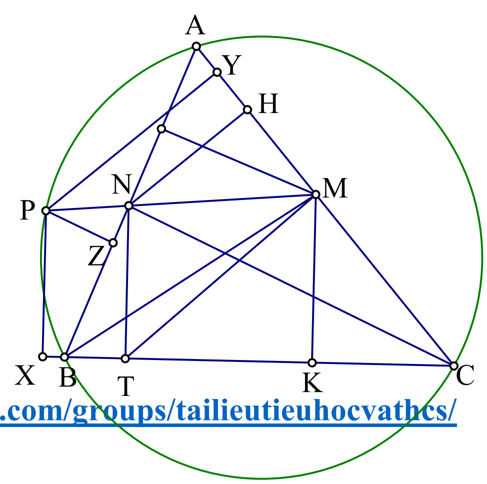
Gọi T là giao điểm (khác A') của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ và tam giác $A'BC$. Tứ giác $BA'CT$ nội tiếp một đường tròn do đó

$\widehat{CTB} = \widehat{CTA'} + \widehat{A'TB}$

$= \widehat{CBA'} + \left(180^0 - \widehat{A'C'B'}\right)$

$= \widehat{CBA'} + \left(180^0 - \widehat{ACB}\right)$ (do $A'C'//AC, BC//B'C'$) $= 180^0 - \left(\widehat{ACB} - \widehat{CBA'}\right)$. Gọi H là giao điểm của BA' và AC. Khi đó $\widehat{ACB} - \widehat{CBA'} = \widehat{BHC} = \widehat{CAB'}$ do đó $BH//AB'$. Suy ra $\widehat{CTB} = 180^0 - \widehat{CAB'}$. Do đó tứ giác $AB'TC$ nội tiếp hay T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $B'CA$. Tương tự T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $C'AB$.

Câu 54. Giải:



a). Gọi K, T lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N xuống BC. H là hình chiếu vuông góc của N xuống

hoc360.net

AC, L là hình chiếu vuông

góc của M xuống AB.

Đặt $MK = ML = a; NT = NH = b; \dfrac{PN}{PM} = c$. Dễ dàng tính được:

$PX = \dfrac{1}{1-c}NT - \dfrac{c}{1-c} = \dfrac{1}{1-c}b - \dfrac{c}{1-c}a$; $PZ = \dfrac{c}{1-c}ML = \dfrac{c}{1-c}a$;

$PY = \dfrac{1}{1-c}NH = \dfrac{1}{1-c}b$. Do đó $PY = PX + PZ$.

b) Dễ dàng chứng minh được $\Delta PZB \sim \Delta PYC$ nên

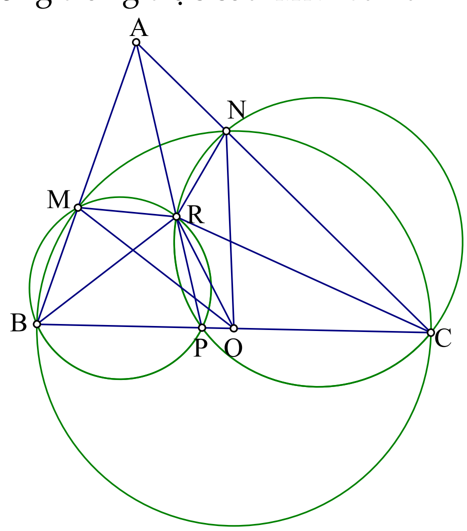
$\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{PZ}{PY}$; $\Delta PXB \sim \Delta PYA$ nên $\dfrac{PB}{PA} = \dfrac{PX}{PY}$. Do đó

$\dfrac{PB}{PC} + \dfrac{PB}{PA} = \dfrac{PX + PZ}{PY} = 1$ hay $\dfrac{1}{PB} = \dfrac{1}{PA} + \dfrac{1}{PC}$.

Câu 55. Giải:

Ta có $OM = ON$ và $\widehat{ROM} = \widehat{RON}$ nên $\Delta OMR = \Delta ONR$ (c.g.c).

Vậy $RM = RN$ .Do N nằm trên đường trung trực của MN và nằm



trên phân giác $\widehat{MAN}$ nên R là

điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{MN}$

(cung không chứa A) của đường

tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

Vậy tứ giác $AMRN$ nội tiếp một

đường tròn. Giả sử đường tròn

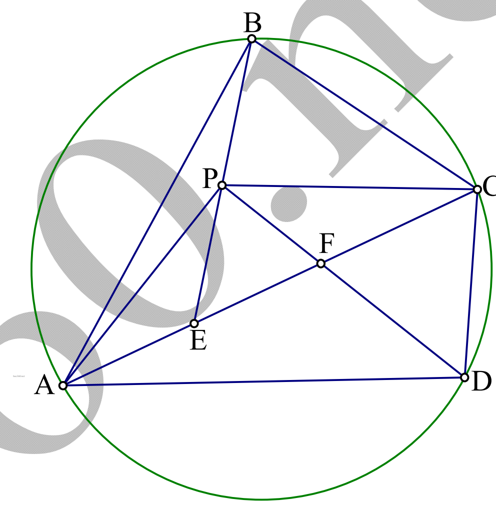
hoc360.net

ngoại tiếp tam giác BMR cắt BC tại P khác B. Do đó các tứ giác $AMRN, BMRP$ nội tiếp được nên tứ giác $CNRP$ cũng nội tiếp.

Vậy hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMR, CNR cắt nhau tại P thuộc BC.

Câu 56. Giải:

Sử dụng tứ giác $ABCD$ nội tiếp.



Ta chứng minh $PA = PC$.

Giả sử BP cắt AC ở E, DP cắt AC ở F. Dễ dàng chứng minh được các cặp tam giác đồng dạng $\Delta BCE \sim \Delta BDA$, $\Delta DAF \sim \Delta DBC$ suy ra

$\dfrac{AF}{BC} = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{CE}{BC}$. Do đó $CE = AF$. Mặt khác $\widehat{PEF} = \widehat{PFE}$ nên $PE = PF$. Từ đó ta có $\Delta PEC = \Delta PFA$ (c.g.c). Vậy $PC = PA$.

Ngược lại, giả sử $PA = PC$. Gọi X, Y tương ứng là giao điểm của CD, DP với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP. Ta có các cặp tam giác đồng dạng $\Delta ADB \sim \Delta PDX, \Delta ADP \sim \Delta BDX$ nên

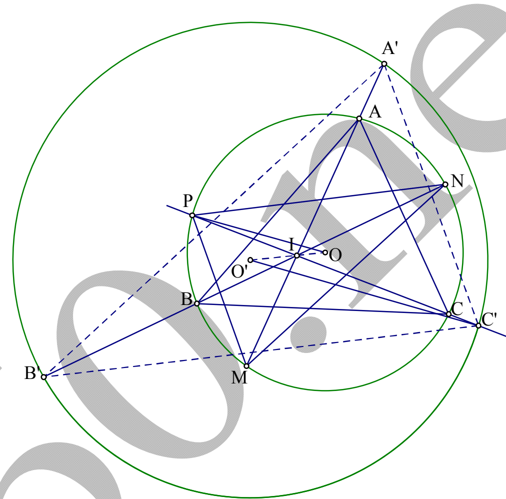
$\dfrac{BX}{AP} = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{XD}{PD}$ (1). Mặt khác $\Delta DPC \sim \Delta DXY$ nên $\dfrac{XY}{CP} = \dfrac{XD}{PD}$ (2). Từ (1) và(2) suy ra $BX = XY$.

Do đó

$\widehat{DCB} = \widehat{XYB} = \widehat{XPY} = \widehat{PDX} + \widehat{PXD} = \widehat{ADB} + \widehat{ABD} = 180^0 - \widehat{BAD}$.
Vậy $ABCD$ nội tiếp.

Câu 57. Giải:

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt các đường thẳng IA, IB, IC lần lượt tại các điểm thứ hai M, N, P. Gọi $(O;R)$, $(O';R')$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC, A'B'C'$.

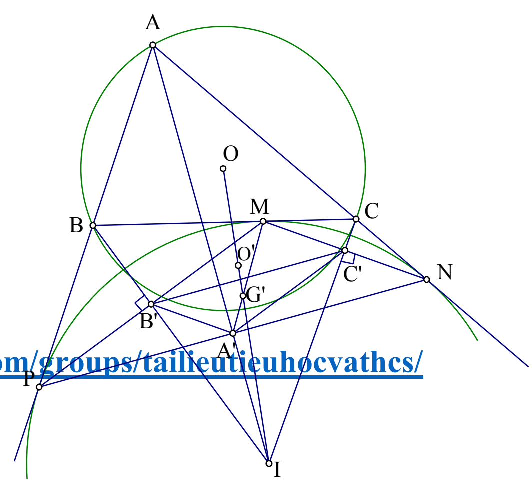


Ta có: $IA.IA' = IB.IB' = IC.IC'; IA.IM = IB.IN = IC.IP$ do đó $\frac{IA'}{IM} = \frac{IB'}{IN} = \frac{IC'}{IP}$. Suy ra hai tam giác $A'B'C'$ và MNP có các cạnh tương ứng song song nên $O'C'//OP$. Mặt khác ta có $\frac{OP}{O'C'} = \frac{R}{R'} = \frac{NP}{C'B'} = \frac{IP}{IC'}$. Vậy ba điểm O, I, O' thẳng hàng.

Câu 58.

Giải:

Khi A thay đổi trên cung lớn BC thì tam giác MNP có $\widehat{NMP}$ không đổi bằng $90^0 + \frac{\widehat{A}}{2}$.



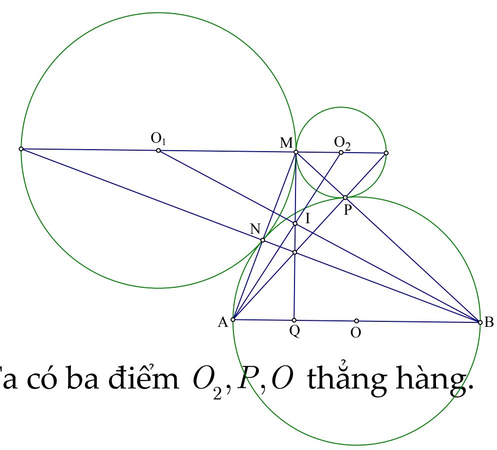
Tam giác ANP luôn cân, có $\widehat{A}$

không đổi nên NP lớn nhất khi

$AB+AC$ lớn nhất, khi đó A là điểm chính giữa của cung lớn $\overset\frown{BC}$. Gọi A_0 là điểm chính giữa của cung lớn BC, ứng với vị trí đó ta có tam giác $M_0N_0P_0$ cân tại M_0; $N_0P_0 \geq NP; \widehat{N_0M_0P_0} = \widehat{NMP}$. Vậy chu vi $\Delta M_0N_0P_0 \geq$ chu vi ΔMNP. Do đó chu vi tam giác MNP lớn nhất khi $A \equiv A_0$.

b) Gọi A' là giao điểm của IA với NP, B' là giao điểm của IB với MP, C' là giao của IC với MN. Các điểm O',G' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Ta có $IA.IA' = IB.IB' = IC.IC' = r_a^2$. Do đó theo câu 9 suy ra ba điểm I,O',O thẳng hàng. Mặt khác ba điểm I,G',O' cùng nằm trên đường thẳng Ơ-le của tam giác MNP luôn đi qua O cố định.

Câu 59) Giải:



Gọi M,N,P lần lượt là các tiếp điểm của các cặp đường tròn $(O_1),(O_2);(O_1),(O);(O_2),(O)$.

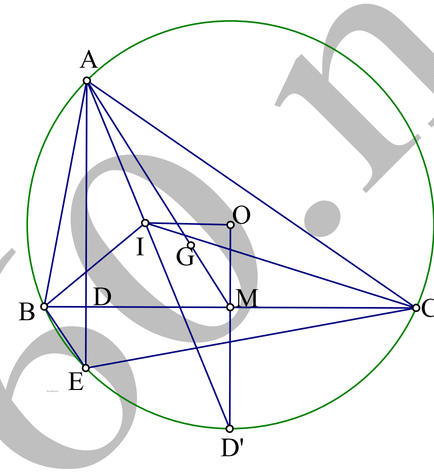
Đường thẳng MI cắt AB tại Q. Ta có ba điểm O_2,P,O thẳng hàng.

Mặt khác $O_2M//OB$ và $\frac{O_2M}{OB} = \frac{r_2}{r} = \frac{O_2P}{OB}$ nên

$\frac{QA}{QB} = \frac{MO_2}{MO_1} = \frac{r_2}{r_1}$. Tương tự $\frac{PB}{PM} = \frac{PO}{PO_2} = \frac{r}{r_2}$ và $\frac{MN}{NA} = \frac{r_1}{r}$. Do đó

$\frac{QA}{QB}.\frac{PB}{PM}.\frac{NM}{NA}=\frac{r_2}{r_1}.\frac{r}{r_2}.\frac{r_1}{r}=1$. Vậy các đoạn thẳng AP, MQ, BN đồng quy nên MQ cũng là đường cao của tam giác MAB hay $MQ \perp AB$ suy ra $MQ \perp O_1O_2$. Vậy I thuộc đường thẳng qua M vuông góc với O_1O_2.

Câu 60. Giải:



Gọi E là giao điểm thứ hai khác A của AI với đường tròn (O). Khi đó E là điểm chính giữa cung BC (cung không chứa A).

Ta có $EB = EI = EC = IA$.

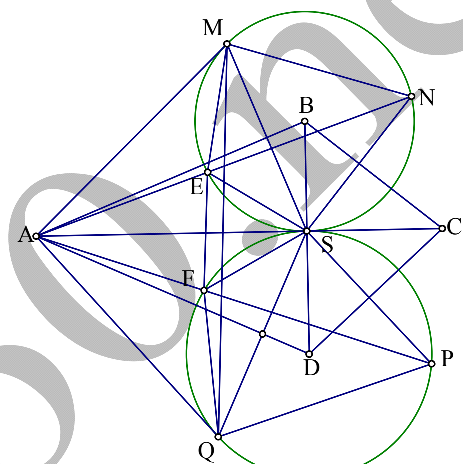
Theo định lý Ptô-lê-mê ta có $EA.BC = EC.AB + EB.AC$ do đó $2BC = AB + AC$. Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có: $\frac{AB}{BD}=\frac{AI}{ID}=\frac{AC}{DC}=\frac{AB+AC}{BD+DC}=\frac{AB+AC}{BC}=2$. Vậy $\frac{AI}{AD}=2$. Gọi M là trung điểm cạnh BC, khi đó $\frac{AG}{GM}=2=\frac{AI}{ID}$. Vậy $GI//BC$.

Câu 61. Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có $d_{O/\Delta_1}=\frac{1}{2}(R_1+R_3)$ (Tính chất đường trung bình trong một hình thang), ở đó d_{O/Δ_1} là khoảng cách từ O tới Δ_1. Tương tự

$d_{O/\Delta_3} = \frac{1}{2}(R_1 + R_3); d_{O/\Delta_2} = \frac{1}{2}(R_2 + R_4) = d_{O/\Delta_4}$. Vậy $d_{O/\Delta_1} = d_{O/\Delta 3} = d_{O/\Delta_4}$. Do đó $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ cùng tiếp xúc với một đường tròn tâm O.

Câu 62. Giải:



Đường tròn ngoại tiếp tam giác SMN có tâm B và tiếp xúc với AS tại S, AM tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SPQ có tâm D và tiếp xúc với AQ tại Q, AS tại S.

Ta có $\widehat{AMQ} = \widehat{AQM}$ suy ra

$\widehat{QME} - \widehat{FQM} = \widehat{AQF} - \widehat{AME} = \widehat{QPF} - \widehat{MNE}$ (1)

Ta có $AE.AN = AM^2 = AF.AP$ hay tứ giác $NEFP$ nội tiếp. Do đó

$\widehat{FEM} - \widehat{EFQ} = \left(\widehat{FEN} + \widehat{NEM}\right) - \left(\widehat{EFP} + \widehat{PFQ}\right)$

$= \left[\left(180^0 - \widehat{FPN}\right) + \widehat{NEM}\right] - \left[\left(180^0 - \widehat{ENP}\right) + \widehat{PFQ}\right]$

$= \left(\widehat{ENP} - \widehat{FPN}\right) + \left(\widehat{NSM} - \widehat{PSQ}\right) = \left(\widehat{ENC} - \widehat{FPC}\right)\left(\widehat{NSM} - \widehat{PSQ}\right)$ (để ý rằng

$CP = CS = CN$)$= \left[\left(\widehat{ENS} + \widehat{NSC}\right) - \left(\widehat{FRS} + \widehat{SPC}\right)\right] + \left(\widehat{NSM} - \widehat{PSQ}\right)$

$= \left[\left(\widehat{ENS} + \widehat{NSC}\right) - \left(\widehat{FPS} + \widehat{CSP}\right)\right] + \left(\widehat{NSM} - \widehat{PSQ}\right)$

$= \left(\widehat{NSC} + \widehat{NSM}\right) - \left(\widehat{CSP} + \widehat{PSQ}\right) + \left(\widehat{NSM} - \widehat{FPS}\right)$

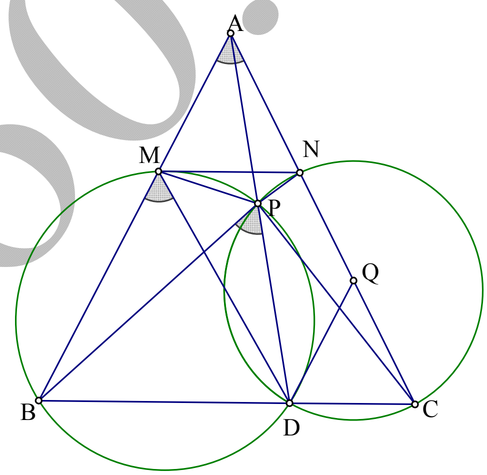
$= \left[\left(90^0 - \widehat{SNM}\right) - \left(90^0 - \widehat{SPQ}\right)\right] + \left(\widehat{ENS} - \widehat{FPS}\right)$

$= \left(\widehat{MSC} - \widehat{QSC}\right) + \left(\widehat{ENS} - \widehat{FPS}\right)$

$= \left(\widehat{SPQ} - \widehat{FPS}\right) - \left(\widehat{SNM} - \widehat{ENS}\right) = \widehat{QPF} = \widehat{MNE} (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{QME} - \widehat{FQM} = \widehat{FEM} - \widehat{EFQ}$ hay $\widehat{QME} + \widehat{EFQ} = \widehat{EFM} + \widehat{FQM}$. Do đó tứ giác $MEFQ$ nội tiếp.

Câu 63. Giải:

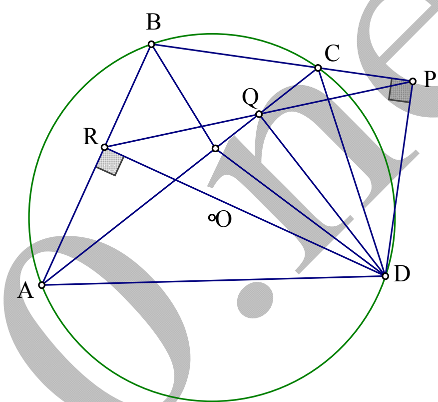


Đường thẳng qua D song song với AC cắt AB tại M. Đường thẳng qua M song song với BC cắt AC tại N. Gọi Q là trung điểm của NC. Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{1}{3}$ nên $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$.

Vậy $CQ = NQ = AN$. Do đó $\frac{QC}{CA} = \frac{DC}{BC} = \frac{1}{3}$ suy ra $DQ // AB$. Do $\widehat{BAC} = \widehat{BPD}$ nên $\widehat{BMD} = \widehat{BPD}$. Vậy tứ giác $BMPD$ là tứ giác nội tiếp. Do đó $\widehat{MPA} = \widehat{MDB} = \widehat{ACB} = \widehat{MNA}$ suy ra tứ giác $AMPN$ nội tiếp.

Vì $BMPD, AMPN$ là các tứ giác nội tiếp nên $CDPN$ là tứ giác nội tiếp. Hơn nữa do $QD = QC = QN$, nên Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDPN$. Vậy $\widehat{DPC} = \frac{1}{2}\widehat{DQC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Câu 64. Giải:



Theo định lý Sim-sơn, ba điểm P, Q, R thẳng hàng. Từ hai bộ bốn điểm $(C, D, P, Q); (A, D, Q, R)$ cùng thuộc một đường tròn ta suy ra $\Delta DCA \sim \Delta DPR$.

Tương tự ta được các cặp tam giác đồng dạng $\Delta DAB \sim \Delta DQP, \Delta DBC \sim \Delta DRQ$. Do đó $\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{PQ}{QR}$. Suy ra $PQ = QR \Leftrightarrow \frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA}$. Điều đó tương đương với chân đường phân giác góc D của tam giác ADC và chân đường phân giác góc B của tam giác ABC trùng nhau, hay các phân giác góc ABC và ADC cắt nhau trên AC.

Câu 65. Giải:

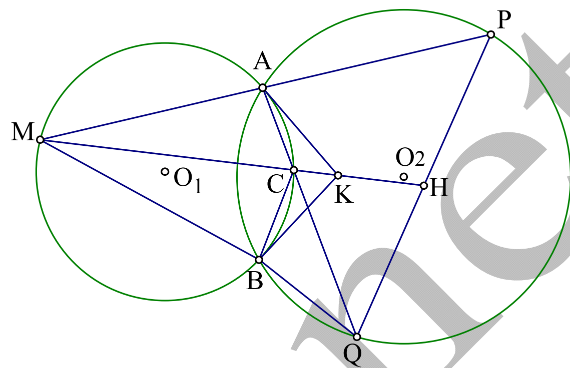
Gọi H là giao điểm của MC với PQ. Ta cần chứng minh H là trung điểm của MQ. Ta có $\Delta KAC \sim \Delta KMA$ suy ra $\frac{MA}{CA} = \frac{KA}{KC}$. Tương tự $\Delta KBC \sim \Delta KMB$ suy ra $\frac{MB}{CB} = \frac{KB}{KC}$.

hoc360.net

Mặt khác $KA = KB$ nên

$\frac{MA}{CA} = \frac{MB}{CB}$ do đó

$AC.BM = BC.AM$ (1).



Dễ dàng nhận thấy

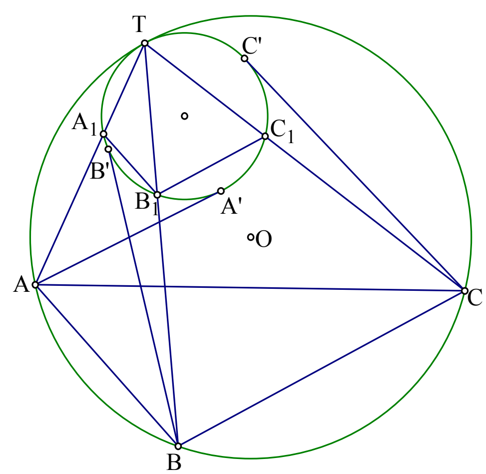
$\Delta BMP \sim \Delta BCQ$

suy ra $\frac{BC}{BM} = \frac{CQ}{MP}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\frac{CA}{CQ}.\frac{MP}{MA} = 1$. Sử dụng định lý Mê-lê-la –uyt cho tam giác QPA với cát tuyến MCH ta có: $\frac{MP}{MA}.\frac{CA}{CQ}.\frac{HQ}{HD} = 1$. Do đó $HQ = HD$.

Câu 66. Giải:

TA, TB, TC cắt đường tròn (O') tại các điểm thứ hai A_1, B_1, C_1.



Khi đó $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$, hơn nữa chúng có các cạnh tương ứng song song. Ta có

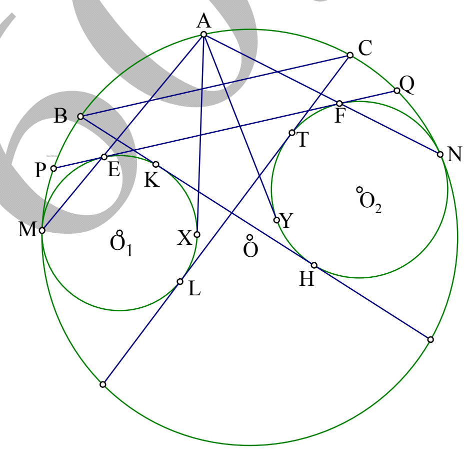
$\dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1B_1}{AB}$ và

$\left(\dfrac{TA_1}{AA'}\right)^2 = \dfrac{TA_1^2}{AA'^2} = \dfrac{TA_1^2}{AA_1.AT} = \dfrac{TB_1^2}{BB_1.BT} = \left(\dfrac{TB_1}{BB'}\right)^2$ .Do đó $\dfrac{TA_1}{AA'} = \dfrac{TB_1}{BB'}$.

Tương tự $\dfrac{TA_1}{AA'} = \dfrac{TC_1}{CC'}$.

Vậy $\dfrac{TA_1}{AA'} = \dfrac{TB_1}{BB'} = \dfrac{TC_1}{CC'}$ do đó $\dfrac{TA}{AA'} = \dfrac{TB}{BB'} = \dfrac{TC}{CC'}$ (1). Theo định lý Ptô- lê-mê ta có $TB.AC = TA.BC + TC.AB$ (2). Từ (1) và (2) ta có: $BB'.AC = AA'.BC + CC'.AB$.

Câu 67. Giải:



Kẻ các tiếp tuyến chung trong KH, LT của (O_1) và (O_2). Giao điểm của KH, LT với (O) lần lượt là B, C.Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF của (O_1) và (O_2) sao cho E và B nằm về cùng một phía đối với O_1O_2. Các điểm M, N lần lượt là các tiếp điểm của $(O_1),(O_2)$ với (O). EF cắt (O) tại P, Q. Ta sẽ chứng minh $BC // PQ$. Gọi A là điểm chính giữa của cung PQ của đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AX, AY của $(O_1),(O_2)$. Dễ dàng chứng minh được ba điểm A, E, M

hoc360.net

thẳng hàng, ba điểm A, F, N thẳng hàng và tứ giác $MEFN$ nội tiếp. Do đó $AX^2 = AE.AM = AF.AN = AY^2$ hay $AX = AY$.

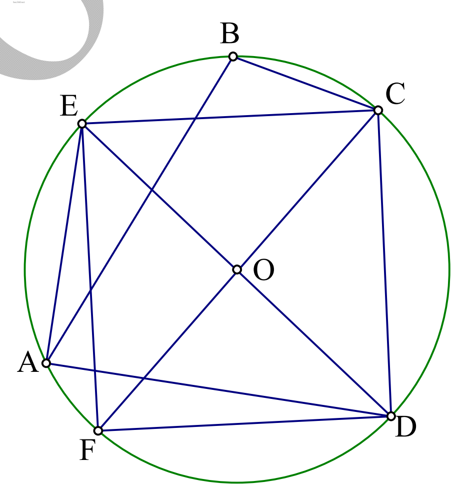
Áp dụng câu 66 cho tam giác ABQ nội tiếp đường tròn (O) và đường tròn (O_1) tiếp xúc với (O) tại M, ta có:
$AX.PQ = BK.AC + CL.AB$. Tương tự $AY.PQ = BH.AC + CT.AB$.

Suy ra $AC(BH - BK) = AB(CL - CT)$ do đó $AC.KH = AB.TL$ hay $AC = AB$. Vậy A là trung điểm của cung BC, do đó $PQ//BC$.

Câu 68. Giải:

Lấy E, F thuộc đường tròn sao cho $\overset{\frown}{CDB} = \overset{\frown}{ADE}, \overset{\frown}{BDA} = \overset{\frown}{DCF}$.

Khi đó $AE = BC, FD = AB, EC = AB, BF = AD$.



Áp dụng định lý Ptô-lê-mê cho hai tứ giác nội tiếp $AECD$ và $BCDF$ ta có:

$AC.ED = AE.CD + AD.EC$

$= BC.CD + AD.AB$ (1)

Và $BD.CF = BC.DF + BF.CD$

$= BC.AB + AD.CD$ (2)

Mặt khác $\overset{\frown}{CDE} = \overset{\frown}{CDB} + \overset{\frown}{BDE} = \overset{\frown}{ADE} + \overset{\frown}{BDE} = \overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{FCD}$

Do đó $\overset{\frown}{FDC} = \overset{\frown}{FDE} + \overset{\frown}{EDC} = \overset{\frown}{FCE} + \overset{\frown}{FCD} = \overset{\frown}{ECD}$ suy ra $ED = FC$ (3)

Từ (1),(2),(3) ta có điều phải chứng minh.

Câu 69. Giải:

Tứ giác $BC'MA'$ và $A'MB'C$

nội tiếp được nên

$\widehat{A'MC'}+\widehat{B}=\widehat{C}+\widehat{A'MB'}=180^0$

và $\widehat{MB'A'}=\widehat{MCA'}$. Mà $\widehat{B}=\widehat{C}$

suy ra $\widehat{A'MC'}=\widehat{A'MB'}$.

Ta lại có $\dfrac{CM}{MA'}=\dfrac{MA'}{MB'}$ suy ra $\Delta C'MA'\sim\Delta A'MB'$ (c.g.c). Do đó

$\widehat{C'A'M}=\widehat{A'B'M}+\widehat{MCA'}$. Mặt khác $\widehat{MC'A'}=\widehat{MBA'}$ nên

$\Delta BMC\sim\Delta C'MA'$. Do đó $\widehat{BCM}=\widehat{A'MC'}=180^0-\widehat{B}$ không đổi.

Vậy M thuộc một đường tròn cố định.

Câu 70)

Gọi H trực tâm của AMN, I

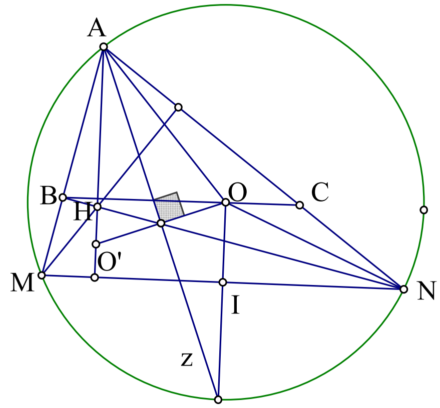
là trung điểm cạnh MN. Gọi

Az là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

Ta có $\widehat{HAM}=\widehat{OAN}$ nên Az

cũng là tia phân giác của $\widehat{OAH}$.

Gọi O' đối xứng với O qua Az.



Khi đó O' thuộc AH. Khi O thay đổi trên BC thì O' thay đổi trên đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng BC qua Az. Tam giác

OIN có $\hat{I} = 90^0, \widehat{ION} = \widehat{BAC}$ không đổi nên $\dfrac{ON}{OI}$ không đổi. Mặt khác $AH = 2.OI$ nên $\dfrac{OA}{OI}$ không đổi. Do đó $\dfrac{AO'}{AH}$ không đổi. hơn nữa O' thuộc Δ cố định nên H thuộc một đường thẳng Δ' song song với Δ.

hoc360.net