CHƯƠNG 1- HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Hệ thức về cạnh và đường cao

KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khi giải các bài toán liên quan đến cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ngoài việc nắm vững các kiến thức về định lý Talet, về các trường hợp đồng dạng của tam giác, cần phải nắm vững các kiến thức sau:

Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, ta có:

1) $a^2 = b^2 + c^2$.

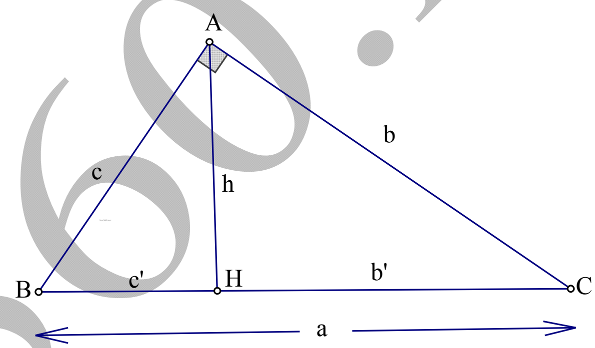
2) $b^2 = a.b'; c^2 = a.c'$

3) $h^2 = b'.c'$

4) $a.h = b.c$.

5) $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

6) $\dfrac{b'}{a} = \dfrac{b^2}{a^2}$.



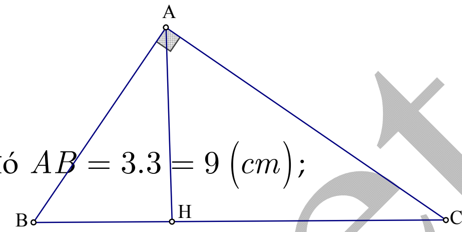
Chú ý: Diện tích tam giác vuông: $S = \dfrac{1}{2}ab$

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB : AC = 3 : 4$ và $AB + AC = 21cm$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC.

b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.

Giải:



a). Theo giả thiết: $AB : AC = 3 : 4$,

suy ra $\dfrac{AB}{3} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{AB + AC}{3 + 4} = 3$. Do đó $AB = 3.3 = 9\left(cm\right)$;

$AC = 3.4 = 12\left(cm\right)$.

Tam giác ABC vuông tại A, theo định lý Pythagore ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$, suy ra $BC = 15cm$.

b) Tam giác ABC vuông tại A, ta có $AH.BC = AB.AC$, suy ra

$AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{9.12}{15} = 7{,}2\left(cm\right)$.

$AH^2 = BH.HC$. Đặt $BH = x\left(0 < x < 9\right)$ thì $HC = 15 - x$, ta có:

$\left(7{,}2\right)^2 = x\left(15 - x\right) \Leftrightarrow x^2 - 15x + 51{,}84 = 0 \Leftrightarrow x\left(x - 5{,}4\right) = 9{,}6\left(x - 5{,}4\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - 5{,}4\right)\left(x - 9{,}6\right) = 0 \Leftrightarrow x = 5{,}4$ hoặc $x = 9{,}6$ (loại)

Vậy $BH = 5{,}4cm$. Từ đó $HC = BC - BH = 9{,}6\left(cm\right)$.

Chú ý: Có thể tính BH như sau:

$AB^2 = BH.BC$ suy ra $BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{9^2}{15} = 5{,}4\left(cm\right)$.

Ví dụ 2: Cho tam giác cân ABC có đáy $BC = 2a$, cạnh bên bằng $b\left(b > a\right)$.

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Dựng $BK \perp AC$. Tính tỷ số $\dfrac{AK}{AC}$.

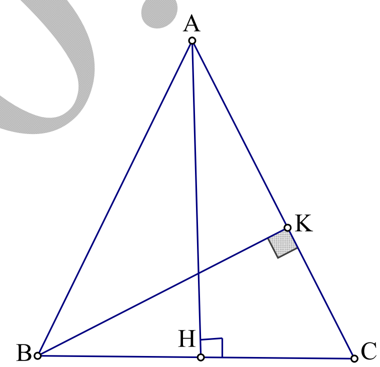
Giải:

a). Gọi H là trung điểm của BC. Theo định lý Pitago ta có:

$AH^2 = AC^2 - HC^2 = b^2 - a^2$

Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}a\sqrt{b^2 - a^2}$

$\Rightarrow AH = \sqrt{b^2 - a^2}$



b). Ta có $\dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}BK.AC = S_{ABC}$

Suy ra $BK = \dfrac{BC.AH}{AC} = \dfrac{2a}{b}\sqrt{b^2 - a^2}$. Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông AKB ta có:

$AK^2 = AB^2 - BK^2 = b^2 - \dfrac{4a^2}{b^2}\left(b^2 - a^2\right) = \dfrac{\left(b^2 - 2a^2\right)^2}{b^2}$. Suy ra

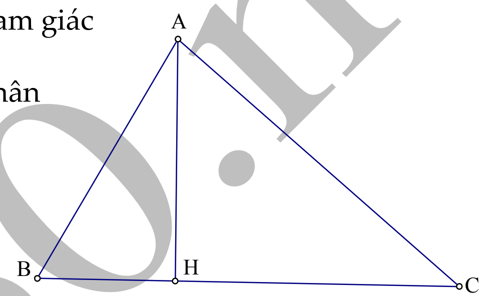
$AK = \dfrac{\left|b^2 - 2a^2\right|}{b}$ do đó $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{\left|b^2 - 2a^2\right|}{b^2}$.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC với các đỉnh A,B,C và các cạnh đối diện với các đỉnh tương ứng là: a,b,c.

a) Tính diện tích tam giác ABC theo a

b) Chứng minh: $a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S$

Giải:



a). Ta giả sử góc A là góc lớn nhất của tam giác $ABC \Rightarrow B,C$ là các góc nhọn. Suy ra chân đường cao hạ từ A lên BC là điểm H thuộc cạnh BC.

Ta có: $BC = BH + HC$. Áp dụng định lý Pi ta go cho các tam giác vuông AHB, AHC ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2, AC^2 = AH^2 + HC^2$

Trừ hai đẳng thức trên ta có:

$c^2 - b^2 = HB^2 - HC^2 = (HB+HC)(HB-HC) = a.(HB-HC)$

$\Rightarrow HB - HC = \dfrac{c^2-b^2}{a}$ ta cũng có:

$HB + HC = a \Rightarrow BH = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$. Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông

$AHB \Rightarrow AH^2 = c^2 - \left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 = \left(c - \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c + \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)$

$$= \left[\frac{(a+c)^2 - b^2}{2a}\right].\left[\frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}\right] = \frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}{4a^2}$$

Đặt $2p = a+b+c$ thì

$$AH^2 = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2} \Rightarrow AH = 2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

Từ đó tính được $S = \frac{1}{2}BC.AH = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

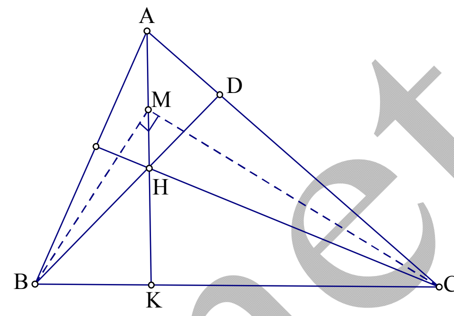
b). Từ câu $a)$ ta có: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $(p-a)(p-b)(p-c) \le \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$. Suy ra $S \le \sqrt{p.\frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Hay $S \le \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}$. Mặt khác ta dễ chứng minh được: $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$ suy ra

$$S \le \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{12\sqrt{3}} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S$$

Dấu bằng xảy ra hki và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 4. Cho tam giác nhọn ABC đường cao CK; H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90^0$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các tam giác AMB, ABC và ABH. Chứng minh rằng $S = \sqrt{S_1.S_2}$.

Giải:



Tam giác AMB vuông tại M có

$MK \perp AB$ nên $MK^2 = AK.BK$ (1).

$\Delta AHK \sim \Delta CBK$ vì có

$\widehat{AKH} = \widehat{CKB} = 90^0$; $\widehat{KAH} = \widehat{KCB}$

(cùng phụ với $\widehat{ABC}$). Suy ra $\dfrac{AK}{CK} = \dfrac{HK}{BK}$, do đó $AK.KB = CK.KH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MK^2 = CK.HK$ nên $MK = \sqrt{CK.HK}$;

$S_{AMB} = \dfrac{1}{2}.AB.MK = \dfrac{1}{2}AB.\sqrt{CK.HK} = \sqrt{\dfrac{1}{2}AB.CK.\dfrac{1}{2}AB.HK} = \sqrt{S_1S_2}$.

Vậy $S = \sqrt{S_1.S_2}$.

Ví dụ 5. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0, \widehat{B} = 60^0, CD = 30cm, CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.

Giải:

Ta có $\widehat{CAD} = \widehat{ABC} = 60^0$ (cùng phụ với $\widehat{CAB}$), vì thế trong tam giác vuông ACD ta có $AC = 2AD$.

Theo định lý Pythagore thì: $AC^2 = AD^2 + DC^2$ hay

$(2AD)^2 = AD^2 + 30^2$

Suy ra $3AD^2 = 900 \Leftrightarrow AD^2 = 300$ nên $AD = 10\sqrt{3}\left(cm\right)$.

Kẻ $CH \perp AB$. Tứ giác $AHCD$ là hình chữ nhật vì có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^0$, suy ra $AH = CD = 30cm; CH = AD = 10\sqrt{3}\left(cm\right)$.

Tam giác ACB vuông tại C, ta có: $CH^2 = HA.HB$, suy ra

$HB = \dfrac{CH^2}{HA} = \dfrac{\left(10\sqrt{3}\right)^2}{30} = \dfrac{300}{30} = 10\left(cm\right)$, do đó

$AB = AH + HB = 30 + 10 = 40\left(cm\right)$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}CH\left(AB + CD\right)\frac{1}{2}.10\sqrt{3}.\left(40 + 30\right) = 350\sqrt{3}\left(cm^2\right).$$

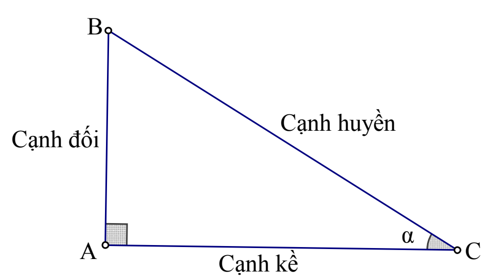
Vậy diện tích hình thang $ABCD$ bằng $350\sqrt{3}cm^2$.

Tỉ số lượng giác của góc nhọn

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α (hình) được định nghĩa như sau:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{BC}; \cos\alpha = \frac{AC}{BC}; \tan\alpha = \frac{AB}{AC}; \cot\alpha = \frac{AC}{AB}$$



+ Nếu α là một góc nhọn thì

$0 < \sin\alpha < 1; 0 < \cos\alpha < 1;$

$\tan\alpha > 0; \cot\alpha > 0$

2. Với hai góc α, β mà $\alpha + \beta = 90^0$,

ta có: $\sin\alpha = \cos\beta; \cos\alpha = \sin\beta; \tan\alpha = \cot\beta; \cot\alpha = \tan\beta$.

Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin\alpha = \sin\beta$ hoặc $\cos\alpha = \cos\beta$ thì $\alpha = \beta$.

3. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; tg\alpha.\cot g\alpha = 1$.

4. Với một số góc đặc biệt ta có:

$\sin 30^0 = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}; \sin 45^0 = \cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

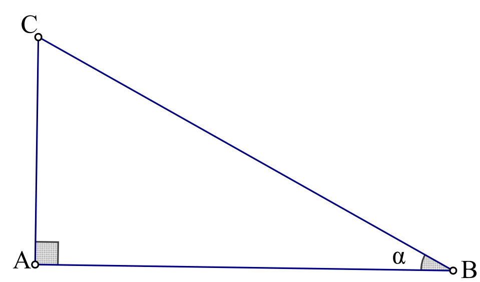
$\cos 30^0 = \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \cot 60^0 = \tan 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan 45^0 = \cot 45^0 = 1; \cot 30^0 = \tan 60^0 = \sqrt{3}$.

Ví dụ 1. Biết $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$. Tính $\cos\alpha, \tan\alpha$ và $\cot\alpha$.

Giải:

Cách 1. Xét ΔABC vuông tại A.



Đặt $\widehat{B} = \alpha$. Ta có: $\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{13}$

suy ra $\dfrac{AC}{5} = \dfrac{BC}{13} = k$, do đó

$AC = 5k, BC = 13k$. Tam giác ABC vuông tại A nên:

$AB^2 = BC^2 - AC^2 = (13k)^2 - (5k)^2 = 144k^2$, suy ra $AB = 12k$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12k}{13k} = \dfrac{12}{13}$;

$\tan\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5k}{12k} = \dfrac{5}{12}$; $\cot\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{12k}{5k} = \dfrac{12}{5}$

Cách 2. Ta có $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ suy ra $\sin^2\alpha = \dfrac{25}{169}$, mà $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, do đó $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{25}{169} = \dfrac{144}{169}$, suy ra $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$.

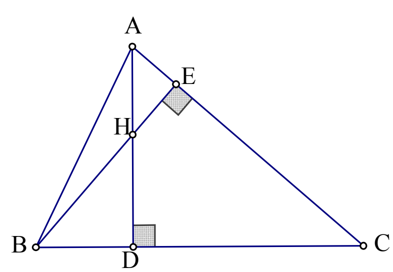
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{5}{13} : \dfrac{12}{13} = \dfrac{5}{13}.\dfrac{13}{12} = \dfrac{5}{12}$;

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{12}{13} : \dfrac{5}{13} = \dfrac{12}{13}.\dfrac{13}{5} = \dfrac{12}{5}$.

Ở cách giải thứ nhất ta biểu thị độ dài các cạnh của tam giác ABC theo đại lượng k rồi sử dụng định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn để tính $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$. Ở cách giải thứ hai, ta sử dụng giả thiết $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ để tính $\sin^2\alpha$ rồi tính $\cos\alpha$ từ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Sau đó ta tính $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ qua $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$.

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Biết $HD : HA = 1 : 2$. Chứng minh rằng $tgB.tgC = 3$.

Giải:



Ta có: $tgB = \dfrac{AD}{BD}; tgC = \dfrac{AD}{CD}$.

Suy ra $\tan B.\tan C = \dfrac{AD^2}{BD.CD}$ (1)

$\widehat{HBD} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$); $\widehat{HDB} = \widehat{ADC} = 90^0$.

Do đó $\Delta BDH \sim \Delta ADC$ (g.g), suy ra $\frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}$, do đó $BD.DC = DH.AD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\tan B.\tan C = \frac{AD^2}{DH.AD} = \frac{AD}{DH}$ (3). Theo giả thiết $\frac{HD}{AH} = \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{HD}{AH + HD} = \frac{1}{2+1}$ hay $\frac{HD}{AD} = \frac{1}{3}$, suy ra $AD = 3HD$. Thay vào (3) ta được: $\tan B.\tan C = \frac{3HD}{DH} = 3$.

Ví dụ 3. Biết $\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{12}{25}$. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha$.

Giải:

Biết $\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{12}{25}$. Để tính $\sin\alpha, \cos\alpha$ ta cần tính $\sin\alpha + \cos\alpha$ rồi giải phương trình với ẩn là $\sin\alpha$ hoặc $\cos\alpha$.

Ta có:

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha.\cos\alpha = 1 + 2.\frac{12}{25} = \frac{49}{25}$. Suy ra $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$ nên $\sin\alpha = \frac{7}{5} - \cos\alpha$. Từ đó ta có:

$\cos\alpha\left(\frac{7}{5} - \cos\alpha\right) = \frac{12}{25} \Leftrightarrow \frac{7}{5}\cos\alpha - \cos^2\alpha = \frac{12}{25}$

$\Leftrightarrow 25\cos^2\alpha - 35\cos\alpha + 12 = 0 \Leftrightarrow 5\cos\alpha(5\cos\alpha - 4) - 3(5\cos\alpha - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (5\cos\alpha - 4)(5\cos\alpha - 3) = 0$. Suy ra $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ hoặc $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

+ Nếu $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ thì $\sin\alpha = \frac{12}{25} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$.

+ Nếu $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ thì $\sin\alpha = \frac{12}{25} : \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$.

Vậy $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ hoặc $\sin\alpha = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông.

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

a) Cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với $\cos in$ góc kề.

b) Cạnh góc vuông kia nhân với tan của góc đối hay nhân với cot của góc kề.

$b = a.\sin B = a\cos C; c = a.\sin C = a.\cos B; b = c.tgB = c.\cot gC;$

$c = b.tgC = b.\cot gC$

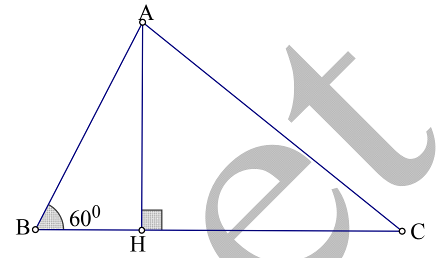
2. Giải tam giác vuông là tìm tất cả các cạnh và các góc chưa biết của tam giác vuông đó.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB = 16, AC = 14$ và $\widehat{B} = 60^0$.

a) Tính độ dài cạnh BC

b) Tính diện tích tam giác ABC.

Giải:



a). Kẻ đường cao AH.

Xét tam giác vuông ABH, ta có:

$BH = AB.\cos B = AB.\cos 60^0 = 16.\dfrac{1}{2} = 8$

$AH = AB.\sin B = AB.\sin 60^0 = 16.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$. Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông AHC ta có:

$HC^2 = AC^2 - AH^2 = 14^2 - \left(8\sqrt{3}\right)^2 = 196 - 192 = 4$. Suy ra $HC = 2$.

Vậy $BC = CH + HB = 2 + 8 = 10$.

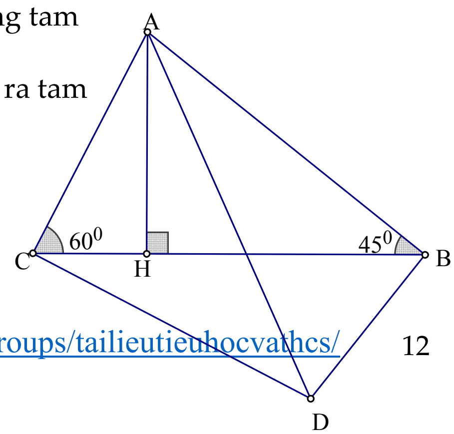
b) Cách 1. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}.10.8\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$ (đvdt)

Cách 2. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.BA.\sin B = \dfrac{1}{2}.10.16.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}$ (đvdt)

Ví dụ 2: Tính diện tích tam giác ABC biết $\widehat{ABC} = 45^0, \widehat{ACB} = 60^0$ bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là R.

Giải:

Giả thiết có các góc có số đo đặc biệt , nhưng tam giác ABC là tam giác thường nên ta sẽ tạo ra tam giác vuông bằng cách. Dựng các đường thẳng qua C, B lần lượt vuông góc với



AC, AB. Gọi D là giao điểm của hai đường

thẳng trên. Khi đó tam giác ABD và ACD là các tam giác

vuông và 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên đường tròn đường kính $AD = 2R$.

Ta có: $AB = AD.\sin 60^0 = AD.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$. Kẻ đường cao AH suy ra $H \in BC$ .Tức là: $BC = BH + CH$. Tam giác AHB vuông góc tại H nên $AH = BH = AB.\sin 45^0 = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = AD\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R\sqrt{6}}{2}$. Mặt khác tam

giác ACH vuông tại H nên $AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow CH = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow BC = \dfrac{R\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}$. Từ đó tính được diện tích $S = \dfrac{R^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{4}$.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC với các đỉnh A, B, C và các cạnh đối diện với các đỉnh tương ứng là: a, b, c. Chứng minh rằng:

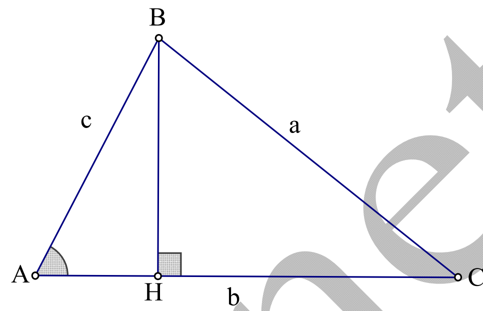
a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

b) Gọi D là chân đường phân giác trong góc A. Chứng minh:

$$AD = \dfrac{2bc.\cos\left(\dfrac{A}{2}\right)}{b+c}$$

Giải:

a). Dựng đường cao BH của tam giác ABC ta có:



Cách 1: Giả sử H thuộc cạnh AC.

Ta có: $AC = AH + HC$.

Áp dụng định lý

Pi ta go cho các tam giác vuông

AHB, BHC ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2, BC^2 = BH^2 + HC^2$

Trừ hai đẳng thức trên ta có:

$c^2 - a^2 = HA^2 - HC^2 = (HA + HC)(HA - HC) = b.(HA - HC)$

$\Rightarrow HA - HC = \dfrac{c^2 - a^2}{b}$ ta cũng có:

$HA + HC = b \Rightarrow AH = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$. Xét tam giác vuông AHB ta có:

$\cos A = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Cách 2: Xét tam giác vuông CHB ta có:

$BC^2 = BH^2 + HC^2 = BH^2 + (AC - AH)^2 = BH^2 + AH^2 + AC^2 - 2AC.AH$

Ta có: $AH = CB.\cos A$ suy ra

$BC^2 = BH^2 + AH^2 + AC^2 - 2AC.CB.\cos A$ hay

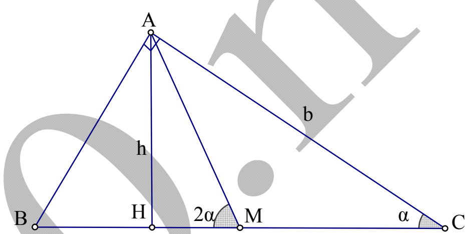
$\Leftrightarrow BC^2 = BA^2 + +AC^2 - 2AC.CB.\cos A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

b). Để chứng minh bài toán ta cần kết quả sau:

+ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

+ $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

*) Thật vậy xét tam giác vuông $ABC, \widehat{A} = 90^0$, gọi M là trung điểm của BC, dựng đường cao AH. Đặt $\widehat{ACB} = \alpha \Rightarrow \widehat{AMB} = 2\alpha$.



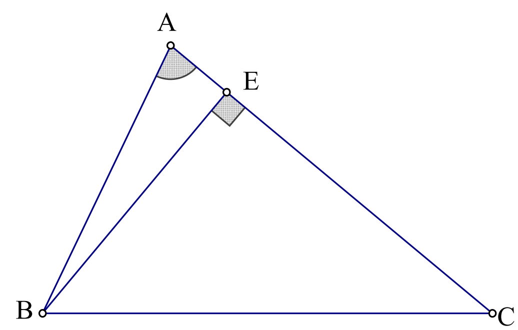
Ta có $\sin\alpha = \sin C = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{h}{b}$

$\cos\alpha = \cos C = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}$

$\sin 2\alpha = \sin\widehat{AMH} = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{h}{\frac{a}{2}} = \dfrac{2h}{a}$.

Từ đó ta suy ra: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$.

*) Xét tam giác ABC. Dựng đường cao BE ta có:



$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BE.AC = \dfrac{1}{2}BE.b$ (1)

Mặt khác trong tam giác vuông AEB

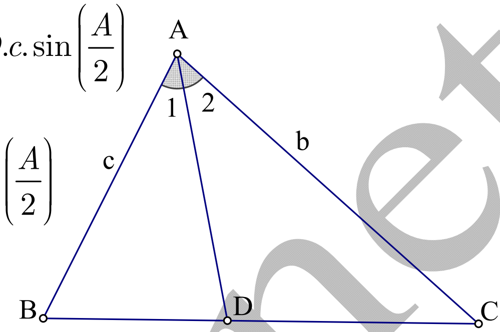
ta có: $\sin A = \dfrac{BE}{AB} \Rightarrow BE = c.\sin A$

thay vào (1)

Ta có: $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

Trở lại bài toán:

Ta có $S_{ABD} = \frac{1}{2}AD.AB\sin A_1 = \frac{1}{2}AD.c.\sin\left(\frac{A}{2}\right)$



$S_{ACD} = \frac{1}{2}AD.AC\sin A_2 = \frac{1}{2}AD.b.\sin\left(\frac{A}{2}\right)$

Suy ra $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{ABD} =$

$= \frac{1}{2}AD\sin\left(\frac{A}{2}\right)\left[c+b\right]$. Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow$

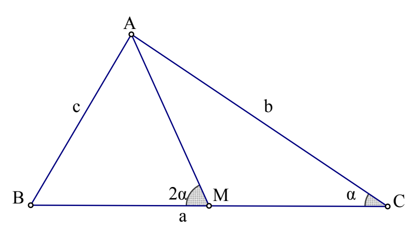
$$AD\sin\left(\frac{A}{2}\right)\left[c+b\right] = bc\sin A \Leftrightarrow AD = \frac{bc\sin A}{\left(b+c\right)\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{c+b}$$

Chú ý rằng: Ta chứng minh được kết quả sau:

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Thật vậy xét tam giác vuông $ABC, \widehat{A} = 90^0$, gọi M là trung điểm của BC, dựng đường cao AH. Đặt $\widehat{ACB} = \alpha \Rightarrow \widehat{AMB} = 2\alpha$.

Ta có : $\cos\alpha = \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$



$\sin\alpha = \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$,

$$\cos 2\alpha = \cos\widehat{AMH} = \frac{AM^2 + MB^2 - AB^2}{2AM.MB}$$

$$= \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - c^2}{2\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = \frac{a^2 - 2c^2}{a^2} = 1 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 - 2.\frac{a^2 - b^2}{a^2} = 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1.$$ Từ đó suy ra $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

Áp dụng $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\left(2\cos^2\frac{A}{2} - 1\right)$.

$\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 1 \Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}$. Thay vào công thức đường phân giác ta có:

$$AD = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{c+b} = \frac{2bc\sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}}}{b+c} = \frac{\sqrt{bc}\sqrt{(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$\sqrt{bc} \le \frac{b+c}{2} \Rightarrow AD \le \frac{\sqrt{(b+c-a)(b+c+a)}}{2} = \sqrt{p(p-a)}$ với $2p = a + b + c$.

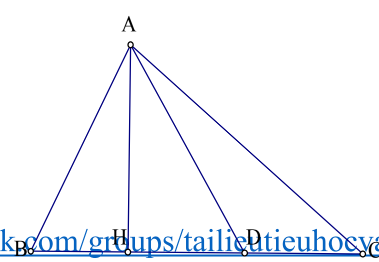
<u>**Áp dụng công thức**</u>: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Ta cũng chứng minh được hệ thức rất quan trọng trong hình học phẳng (Định lý Stewart) đó là:

''Cho điểm D nằm trên cạnh BC của tam giác ABC khi đó ta có: $AB^2.CD + AC^2.BD = BC\left(AB^2 + BD.DC\right)$''

+ Thật vậy :Ta giả kẻ $AH \perp BC$

không mất tính tổng quát,

ta giả sử D nằm trong đoạn



HC. Khi đó ta có:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD.BD.\cos\widehat{ADB} = AD^2 + BD^2 - 2DB.DH \ (1)$$

Tương tự ta có: $AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2DH.DC$ (2). Nhân đẳng thức (1) với DC đẳng thức (2) với BD rồi cộng lại theo vế ta có:

$$AB^2.CD + AC^2.BD = BC\left(AB^2 + BD.DC\right)$$

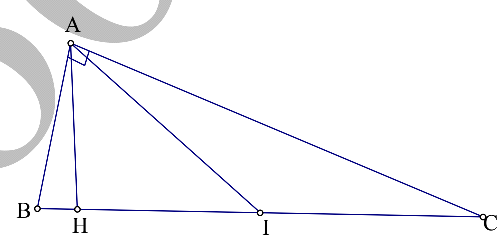
Ví dụ 3. Không dùng máy tính và bảng số hãy chứng minh rằng $\sin 75^0 = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Giải:

Vẽ tam giác ABC vuông tại A

với $BC = 2a$ (a là một độ dài tùy ý)

, $\widehat{C} = 15^0$, suy ra $\widehat{B} = 75^0$.



Gọi I là trung điểm của BC, ta có

$IA = IB = IC = a$. Vì $\widehat{AIB}$ là góc ngoài tại đỉnh I của tam giác cân IAC nên $\widehat{AIB} = 2\widehat{C} = 30^0$. Kẻ $AH \perp BC$ thì $IH = AI.\cos 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$$AH = AI.\cos 30^0 = \frac{a}{2};\ CH = CI + IH = a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Tam giác AHC vuông tại H, theo định lý Pythagore, ta có:

$$AC^2 = CH^2 + AH^2 = \frac{a^2\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2\left(4+4\sqrt{3}+3+1\right)}{4}$$

$$= \frac{4a^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{4} = a^2\left(2+\sqrt{3}\right)$$, suy ra $AC = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

$$\sin 75^0 = \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2a} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy $\sin 75^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.