# CHỦ ĐỀ 7: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## I. HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI 1:

a) Một hệ phương trình ẩn x, y được gọi là hệ phương trình đối xứng loại 1 nếu mỗi phương trình ta đổi vai trò của x, y cho nhau thì phương trình đó không đổi

b) Tính chất

Nếu $(x_0, y_0)$ là một nghiệm thì hệ $(y_0, x_0)$ cũng là nghiệm

c) Cách giải: Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ quy hệ phương trình về 2 ẩn $S, P$

**Chú ý:** Trong một số hệ phương trình đôi khi tính đối xứng chỉ thể hiện trong một phương trình. Ta cần dựa vào phương trình đó để tìm quan hệ $S, P$ từ đó suy ra qua hệ $x, y$.

**Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau:**

a) $\begin{cases} x + y + 2xy = 2 \\ x^3 + y^3 = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ (x + y)(8 + xy) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x + y) = 3\left(\sqrt[3]{x^2 y} + \sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x + 1} + \sqrt{y + 1} = 4 \end{cases}$

**Giải:**

a) Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} S + 2P = 2 \\ S(S^2 - 3P) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{2 - S}{2} \\ S\left(S^2 - \dfrac{6 - 3S}{2}\right) = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2S^3 + 3S^2 - 6S - 16 = 0 \Leftrightarrow (S - 2)(2S^2 + 7S + 8) = 0 \Leftrightarrow S = 2 \Rightarrow P = 0$$

Suy ra $x, y$ là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - 2X = 0 \Leftrightarrow X = 0, X = 2$

$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

b) Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=x.y \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} S\left(S^2-3P\right)=19 \\ S(8+P)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP=-8S \\ S^3-3(2-8S)=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP=-8S \\ S^3+24S-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-6 \end{cases}$$

. Suy ra $x, y$ là hai nghiệm của phương trình:

$X^2-X-6=0 \Leftrightarrow X_1=3; X_2=-2$

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm $(x;y)=(-2;3),(3;-2)$

c) Đặt $a=\sqrt[3]{x}, b=\sqrt[3]{y}$ hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} 2\left(a^3+b^3\right)=3\left(a^2b+b^2a\right) \\ a+b=6 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} S=a+b \\ P=ab \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ thì hệ đã cho trở thành.

$$\begin{cases} 2\left(S^3-3SP\right)=3SP \\ S=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(36-3P)=3P \\ S=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=6 \\ P=8 \end{cases}.$$

Suy ra $a, b$ là 2 nghiệm của phương trình:

$$X^2-6X+8=0 \Leftrightarrow X_1=2; X_2=4 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow x=8 \\ b=4 \Rightarrow y=64 \end{cases} \vee \begin{cases} a=4 \Rightarrow x=64 \\ b=2 \Rightarrow y=8 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm $(x;y)=(8;64),(64;8)$

d) Điều kiện: $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x, y \geq -1 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=x.y \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$ hệ phương trình đã cho trở thành:



hoc360.net

$$\begin{cases} S-\sqrt{P}=3 \\ S+2+2\sqrt{S+P+1}=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S\ge 3; P=\left(S-3\right)^2 \\ 2\sqrt{S+\left(S-3\right)^2+1}=14-S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\le S\le 14; P=\left(S-3\right)^2 \\ 4\left(S^2+8S+10\right)=196-28S+S^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\le S\le 14; P=\left(S-3\right) \\ S^2+30S-52=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S=6 \\ P=9\Rightarrow x=y=3 \end{cases}$. Vậy hệ đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(3;3\right)$.

**Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau:**

a) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \left(x+y\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3y\left(1+y\right)+x^2y^2\left(2+y\right)+xy^3-30=0 \\ x^2y+x\left(1+y+y^2\right)+y-11=0 \end{cases}$

**Giải:**

a) Đặt $\sqrt{x}=a,\sqrt{y}=b$ điều kiện $a,b\ge 0$.

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} \sqrt{a^4+b^4}+\sqrt{2}ab=8\sqrt{2} \\ a+b=4 \end{cases}$. Ta viết lại hệ phương trình thành: $\begin{cases} \sqrt{(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2}+\sqrt{2}ab=8\sqrt{2} \\ a+b=4 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S=a+b \\ P=ab \end{cases}$ điều kiện $\begin{cases} S^2\ge 4P \\ S,P\ge 0 \end{cases}$ thì hệ đã cho trở thành.

$$\begin{cases} \sqrt{256-64P-6P^2}+\sqrt{2}P=8\sqrt{2} \\ S=4 \end{cases} \Leftrightarrow S=P=4 \Leftrightarrow a=b=2 \Leftrightarrow x=y=4$$

Ngoài ra ta cũng có thể giải ngắn gọn hơn như sau:

$$\begin{cases}\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+2\sqrt{xy}=16\\ x+y+2\sqrt{xy}=16\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=x+y \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=4$$

Vậy hệ có một cặp nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(4;4\right)$

b) Điều kiện: $x+y>0$.

Biến đổi phương trình (1):

$$x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1 \Leftrightarrow \left(x+y\right)^2-1+\frac{2xy}{x+y}-2xy=0$$

Đặt $x+y=S, xy=P$ ta có phương trình: $S^2+\dfrac{2P}{S}-2P-1=0$

$$\Leftrightarrow S^3+2P-2SP-S=0 \Leftrightarrow S(S^2-1)-2P(S-1)=0 \Leftrightarrow (S-1)(S^2+S-2P)=0$$

.

Vì $S^2>4P, S>0$ suy ra $S^2+S-2P>0$. Do đó $S=1$

Với $x+y=1$ thay vào (2) ta được: $1=\left(1-y\right)^2-y \Leftrightarrow y=0, y=3$

Xét $x+y+1=\dfrac{2xy}{x+y} \Leftrightarrow x+y+1=1-x^2-y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+x+y=0$ (không thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(1;0\right),\left(-2;3\right)$.

c) Điều kiện: $xy\neq 0$.

Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5\\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5\\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=9\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=S\\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right).\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=P\end{cases}$

Hệ trở thành:

$$\begin{cases} S^2-2P=9 \\ S=5 \end{cases} \Leftrightarrow S=5, P=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=2; y+\dfrac{1}{y}=3 \\ x+\dfrac{1}{x}=3; y+\dfrac{1}{y}=2 \end{array}\right..$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}; y=1 \end{array}\right.$. Vậy hệ đã cho có nghiệm:

$(x;y)=\left(1;\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2};1\right)$.

d) Hệ tương đương với : $\begin{cases} xy(x+y)(x+y+xy)=30 \\ xy(x+y)+x+y+xy=11 \end{cases}$.

Đặt $xy(x+y)=a; xy+x+y=b$. Ta thu được hệ:

$$\begin{cases} ab=30 \\ a+b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5; b=6 \\ a=6; b=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy(x+y)=5 \\ xy+x+y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} xy(x+y)=6 \\ xy+x+y=5 \end{cases} \end{array}\right..$$

TH1: $\begin{cases} xy(x+y)=6 \\ xy+x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=3 \\ x+y=2 \end{cases} (L) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2; y=1 \\ x=1; y=2 \end{array}\right.$

TH2: $\begin{cases} xy(x+y)=5 \\ xy+x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=5 \\ x+y=1 \end{cases} (L) \\ \begin{cases} xy=1 \\ x+y=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}; y=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}; y=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right..$

Vậy hệ có nghiệm: $(x;y)=(1;2),(2;1),\left(\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2};\dfrac{5\mp\sqrt{21}}{2}\right)$.

**II) HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI 2**

Một hệ phương trình 2 ẩn $x, y$ được gọi là đối xứng loại 2 nếu trong hệ phương trình ta đổi vai trò $x, y$ cho nhau thì phương trình trở thành phương trình kia.

+ Tính chất.: Nếu $(x_0; y_0)$ là 1 nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm

+ Phương pháp giải:

Trừ vế với vế hai phương trình của hệ ta được một phương trình có dạng

$$(x-y)\left[f(x;y)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ f(x;y)=0 \end{array}\right.$$

**Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau:**

a) $\begin{cases} x^2+\sqrt{x}=2y \\ y^2+\sqrt{y}=2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-1)(y^2+6)=y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6)=x(y^2+1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3+3x-1+\sqrt{2x+1}=y \\ y^3+3y-1+\sqrt{2y+1}=x \end{cases}$

d)

**Giải:**

a) Điều kiện: $x, y \ge 0$. Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được:

$$x^2+\sqrt{x}-\left(y^2+\sqrt{y}\right)=2(y-x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left[\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(x+y)+1+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\right]=0$$

Vì $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(x+y)+1+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)>0$

nên phương trình đã cho tương đương với: $x=y$.

Hay

$$x^2-2x+\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x^2+\sqrt{x}=2x \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 3 cặp nghiệm: $(x;y)=(0;0),(1;1),\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

b) Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} xy^2+6x-y^2-6=yx^2+y \\ yx^2+6y-x^2-6=xy^2+x \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$2xy(y-x)+7(x-y)+(x-y)(x+y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2xy+7)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x+y-2xy+7=0 \end{array}\right.$

\+ Nếu $x=y$ thay vào hệ ta có: $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=2 \\ x=y=3 \end{array}\right.$

\+ Nếu $x+y-2xy+7=0 \Leftrightarrow (1-2x)(1-2y)=15$.

Mặt khác khi cộng hai phương trình của hệ đã cho ta được:

$x^2+y^2-5x-5x+12=0 \Leftrightarrow (2x-5)^2+(2y-5)^2=2$. Đặt

$a=2x-5, b=2y-5$

Ta có: $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ (a+4)(b+4)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=2 \\ ab+4(a+b)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=0 \\ ab=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=-8 \\ ab=31 \end{cases} \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\begin{cases} a+b=0 \\ ab=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(3;2),(2;3)$

Trường hợp 2: $\begin{cases} a+b=-8 \\ ab=31 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y)=(2;2),(3;3),(2;3),(3;2)$

c) Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{2}; y \ge -\frac{1}{2}$

Để ý rằng $x=y=-\frac{1}{2}$ không phải là nghiệm.

Ta xét trường hợp $x+y \ne -1$

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta thu được:

$$x^3+3x-1+\sqrt{2x+1}-\left(y^3+3y-1+\sqrt{2y+1}\right)=y-x$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[x^2+xy+y^2\right]+4(x-y)+\frac{2(x-y)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[x^2+xy+y^2+4+\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}\right]=0 \Leftrightarrow x=y$$

Khi $x=y$ xét phương trình:

$$x^3+2x-1+\sqrt{2x+1}=0 \Leftrightarrow x^3+2x+\sqrt{2x+1}-1=0$$

$$x(x^2+1)+\frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1}=0 \Leftrightarrow x\left[x^2+1+\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}\right]=0 \Leftrightarrow x=0$$

Tóm lại hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $x=y=0$

**HỆ CÓ YẾU TỐ ĐẲNG CẤP ĐẲNG CẤP**

+ Là những hệ chứa các phương trình đẳng cấp
+ Hoặc các phương trình của hệ khi nhân hoặc chia cho nhau thì tạo ra phương trình đẳng cấp.

Ta thường gặp dạng hệ này ở các hình thức như:

+ $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ ex^2+gxy+hy^2=k \end{cases}$,

+ $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=dx+ey \\ gx^2+hxy+ky^2=lx+my \end{cases}$,

+ $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ gx^3+hx^2y+kxy^2+ly^3=mx+ny \end{cases}$.....

Một số hệ phương trình tính đẳng cấp được giấu trong các biểu thức chứa căn đòi hỏi người giải cần tinh ý để phát hiện:

Phương pháp chung để giải hệ dạng này là: Từ các phương trình của hệ ta nhân hoặc chia cho nhau để tạo ra phương trình đẳng cấp bậc $n$:

$$a_1x^n+a_kx^{n-k}.y^k....+a_ny^n=0$$

Từ đó ta xét hai trường hợp:

$y=0$ thay vào để tìm $x$

+ $y\neq 0$ ta đặt $x=ty$ thì thu được phương trình: $a_1t^n+a_kt^{n-k}....+a_n=0$

+ Giải phương trình tìm $t$ sau đó thế vào hệ ban đầu để tìm $x, y$

Chú ý: ( Ta cũng có thể đặt $y = tx$ )

**Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau:**

a) $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3\left(y^2 + 1\right) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2\left(x + y\right) = 0 \\ xy\left(x^2 + y^2\right) + 2 = \left(x + y\right)^2 \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

**Giải:**

a) Ta biến đổi hệ: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8x + 2y \\ x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$

Để ý rằng nếu nhân chéo 2 phương trình của hệ ta có:

$6(x^3 + y^3) = (8x + 2y)(x^2 + 3y^2)$ đây là phương trình đẳng cấp bậc 3: Từ đó ta có lời giải như sau:

Vì $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y = tx$. Khi đó hệ thành:

$$\begin{cases} x^3 - 8x = t^3x^3 + 2tx \\ x^2 - 3 = 3\left(t^2x^2 + 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(1 - t^3\right) = 2t + 8 \\ x^2\left(1 - 3t^2\right) = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{t + 4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(1 - t^3\right) = \left(t + 4\right)\left(1 - 3t^2\right) \Leftrightarrow 12t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{4} \end{array}\right. .$$

* $t = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x^2\left(1 - 3t^2\right) = 6 \\ y = \frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}.$

* $t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4\sqrt{78}}{13} \\ y = \mp \frac{\sqrt{78}}{13} \end{cases}.$

Suy ra hệ phương trình có các cặp nghiệm:

$$(x;y)=(3,1);(-3,-1);\left(\frac{4\sqrt{78}}{13},\frac{\sqrt{78}}{13}\right);\left(-\frac{4\sqrt{78}}{13},-\frac{\sqrt{78}}{13}\right)$$

b). Phương trình (2) của hệ có dạng:

$$xy\left(x^2+y^2\right)+2=x^2+y^2+2xy \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)(xy-1)-2(xy-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (xy-1)\left(x^2+y^2-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ x^2+y^2=2 \end{array}\right.$$

**TH1:** $\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$.

**TH2:** $\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3=2(x+y) \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

(*)

Nếu ta thay $x^2+y^2=2$ vào phương trình (*) thì thu được phương trình đẳng cấp bậc 3: $5x^2y-4xy^2+3y^3=\left(x^2+y^2\right)(x+y)$

Từ đó ta có lời giải như sau:

Ta thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ.

Xét $y\neq 0$ đặt $x=ty$ thay vào hệ ta có: $\begin{cases} 5t^2y^3-4ty^3+3y^3=2(ty+y) \\ t^2y^2+y^2=2 \end{cases}$

Chia hai phương trình của hệ ta được:

$$\frac{5t^2-4t+3}{t^2+1}=\frac{t+1}{1} \Leftrightarrow t^3-4t^2+5t-2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=\dfrac{1}{2}y \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

**Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau:**

a) $\begin{cases} \sqrt{x^2+2y+3}+2y-3=0 \\ 2\left(2y^3+x^3\right)+3y\left(x+1\right)^2+6x\left(x+1\right)+2=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{3x}+\dfrac{2x}{3y}=\dfrac{x+\sqrt{y}}{2x^2+y} \\ 2\left(2x+\sqrt{y}\right)=\sqrt{2x+6}-y \end{cases}$

**Giải:**

a) Điều kiện: $x^2+2y+3\ge 0$.

Phương trình (2) tương đương:

$$2\left(2y^3+x^3\right)+3y\left(x+1\right)^2+6x^2+6x+2=0 \Leftrightarrow 2\left(x+1\right)^3+3y\left(x+1\right)^2+4y^3=0$$

Đây là phương trình đẳng cấp giữa $y$ và $x+1$.

+ Xét $y=0$ hệ vô nghiệm

+ Xét $y\ne 0$. Đặt $x+1=ty$ ta thu được phương trình: $2t^3+3t^2+4=0$

Suy ra $t=-2 \Leftrightarrow x+1=-2y$

Thay vào phương trình (1) ta được:

$\sqrt{x^2-x+2}=x+4 \Leftrightarrow x=-\dfrac{14}{9} \Rightarrow y=\dfrac{5}{18}$.

Vậy hệ có một cặp nghiệm: $\left(x;y\right)=\left(-\dfrac{14}{9};\dfrac{5}{18}\right)$.

b) Dễ thấy phương trình (1) của hệ là phương trình đẳng cấp của $x$ và $\sqrt{y}$

Điều kiện: $y>0;-3\le x\ne 0$.

Đặt $\sqrt{y}=tx \Rightarrow y=t^2x^2$ thay vào (1) ta được: $\dfrac{1}{3x}+\dfrac{2x}{3t^2x^2}=\dfrac{x+tx}{2x^2+t^2x^2}$

Rút gọn biến $x$ ta đưa về phương trình ẩn $t$:

$\left(t-2\right)^2\left(t^2+t+1\right)=0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{y}=2x\ge 0$.

Thay vào (2) ta được:

$$4x^2+8x=\sqrt{2x+6} \Leftrightarrow 4x^2+10x+\frac{25}{4}=2x+6+\sqrt{2x+6}+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x+\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+6}+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Giải ra ta được $x = \frac{\sqrt{17}-3}{4} \Rightarrow y = \frac{13-3\sqrt{17}}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ $(x;y) = \left(\frac{\sqrt{17}-3}{4};\frac{13-3\sqrt{17}}{2}\right)$.

**Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau:**

a) $\begin{cases} 3x^3 - y^3 = \dfrac{1}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2xy - 2x = 1 \\ x^3 - 3x - 3xy = 6 \end{cases}$

**Giải:**

a) Ta có thể viết lại hệ thành: $\begin{cases} (3x^3 - y^3)(x+y) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ (1)

Ta thấy vế trái của phương trình (1) là bậc 4. Để tạo ra phương trình đẳng cấp ta sẽ thay vế phải thành $(x^2+y^2)^2$.

Như vậy ta có:

$$(3x^3 - y^3)(x+y) = (x^2+y^2)^2 \Leftrightarrow 2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 - 2y^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y)(2x^2+xy+y^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = -2y \\ 2x^2 + xy + y^2 = 0 \end{array}\right.$$

\+ Nếu $2x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{4}x^2 + \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ không thỏa mãn.

\+ Nếu $x = y$ ta có $2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

\+ Nếu $x = -2y \Leftrightarrow 5y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Tóm lại hệ phương trình có các cặp nghiệm:

$$(x;y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{-\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{-2\sqrt{5}}{5};\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

b) Điều kiện $y \ge -1$. Ta viết lại hệ thành: $\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2x(y+1) = 1 \\ x^3 - 3x(y+1) = 6 \end{cases}$

Ta thấy các phương trình của hệ đều là phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với $x, \sqrt{y+1}$

Dễ thấy $y = -1$ không phải là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $y > -1$. Đặt $x = t\sqrt{y+1}$ thay vào hệ ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{(y+1)^3}\left[t^2 - 2t\right] = 1 \\ \sqrt{(y+1)^3}\left[t^3 - 3t\right] = 6 \end{cases} \Leftrightarrow t^3 - 3t - 6(t^2 - 2t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

\+ Nếu $t = 0$ thì $x = 0$. Không thỏa mãn hệ

\+ Nếu $t = 3 \Leftrightarrow 27\sqrt{(y+1)^3} - 9\sqrt{(y+1)^3} = 6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$

Vậy hệ có 1 cặp nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\sqrt[3]{9}; \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1\right)$

**Ví dụ 4: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} xy + x^2\sqrt{y} = 2 \\ 2xy^2 + (x^3 + 2x - 3)y + x^3 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + xy + x + 3 = 0 \\ (x+1)^2 + 3(y+1) + 2\left(xy - \sqrt{x^2y + 2y}\right) = 0 \end{cases}$

**Giải:**

a) Điều kiện: $y \ge 0$. Phương trình (2) của hệ có dạng:

$$2xy(y+1) + x^3(y+1) = 3(y+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ 2xy + x^3 = 3 \end{array}\right.$$

Trường hợp $y = -1$ không thỏa mãn điều kiện

Trường hợp $2xy + x^3 = 3$ ta có hệ: $\begin{cases} 2xy + x^3 = 3 \\ xy + x^2\sqrt{y} = 2 \end{cases}$.

Vế trái của các phương trình trong hệ là phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với $x, \sqrt{y}$. Dễ thấy $y > 0$. Ta đặt $x = t\sqrt{y}$ thì thu được hệ:

$\begin{cases}\sqrt{y^3}(2t+t^3)=3\\ \sqrt{y^3}(t+t^2)=2\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{t^2+2}{t+1}=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

+ Nếu $t=1$ thì $x=\sqrt{y} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

+ Nếu $t=\dfrac{1}{2}$ thì $x=\dfrac{1}{2}\sqrt{y} \Leftrightarrow y=4x \Leftrightarrow x^3=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow y=\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}}$

Tóm lại hệ có các nghiệm: $(x;y)=(1;1),\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}};\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}}\right)$

b) Điều kiện: $x^2y+2y\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 0$.

Từ phương trình thứ nhất ta có: $xy=-x^2-x-3$ thay vào phương trình thứ hai ta thu được:

$(x+1)^2+3(y+1)-2x^2-2x-6-2\sqrt{y(x^2+2)}=0$

$\Leftrightarrow x^2+2-3y+2\sqrt{y(x^2+2)}=0$

Đây là phương trình đẳng cấp bậc 2 đối với $\sqrt{y}$ và $\sqrt{x^2+2}$

Đặt $\sqrt{y}=t\sqrt{(x^2+2)}$ ta thu được: $3t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{1}{3}(L)\end{array}\right.$

Khi $t=1$ ta có: $y=x^2+2$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta thu được: $x=-1 \Rightarrow y=3$

Tóm lại hệ phương trình có một cặp nghiệm $(x;y)=(1;-3)$

**Ví dụ 5: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16 \\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}=\sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{y}{2}\end{cases}$ b)

$\begin{cases} x^2y-3x-1=3x\sqrt{y}(\sqrt{1-x}-1)^3 \\ \sqrt{8x^2-3xy+4y^2}+\sqrt{xy}=4y\end{cases}$

**Giải:**

a) Điều kiện: $y \neq 0, x+y \neq 0, \dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4} \geq 0$.

Phương trình (2) tương đương:

$$\frac{x^2}{8y}+\frac{4x+3y}{6}=2\sqrt{\frac{x^3}{12y}+\frac{x^2}{16}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{8y}+\frac{4x+3y}{6}=2\sqrt{\frac{x^2}{8y}.\left(\frac{4x}{6}+\frac{3y}{6}\right)}.$$

Đây là phương trình đẳng cấp đối với $\dfrac{x^2}{8y}$ và $\dfrac{4x+3y}{6}$

Ta thấy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{x^2}{8y}$ và $\dfrac{4x+3y}{6}$ cùng dấu hay

$\dfrac{x^2}{8y} \geq 0, \dfrac{4x+3y}{6} \geq 0$.

Đặt $\dfrac{x^2}{8y}=a, \dfrac{4x+3y}{6}=b$ suy ra $a^2+b^2=2ab \Leftrightarrow a=b$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{8y}=\frac{4x+3y}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6y \\ x=-\dfrac{2}{3}y \end{array}\right..$$

**TH1:** $x=6y$ thay vào (1) ta có:

$$\frac{4}{9}y^2+y^2-16y=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{28}{37} \Rightarrow x=-\dfrac{168}{37}(L) \\ y=\dfrac{4}{7} \Rightarrow x=\dfrac{24}{7} \end{array}\right..$$

**TH2:** $x=-\dfrac{2}{3}y$ thay vào (1) ta có:

$$\frac{4}{9}y^2+y^2-16y=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{12}{13}(L) \\ y=12 \Rightarrow x=-8(TM) \end{array}\right..$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{24}{7};\dfrac{4}{7}\right),(-8;12)$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Để ý rằng phương trình thứ hai của hệ là phương trình đẳng cấp đối với $x, y$.
Ta thấy nếu $y=0$ thì từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $x=0$, cặp nghiệm này không thỏa mãn hệ.
Xét $y>0$. Ta chia phương trình thứ hai của hệ cho $y$ ta thu được:
$\sqrt{8\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}+4}+\sqrt{\frac{x}{y}}=4$. Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}}=t$ ta thu được phương trình

$$\sqrt{8t^4-3t^2+4}=4-t \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 4 \\ 8t^4-3t^2+4=t^2-8t+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 4 \\ 8t^4-4t^2+8t-12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\le 4 \\ 2t^4-t^2+2t-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 4 \\ (t-1)(2t^3+2t^2+t+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$$

Khi $t=1 \Rightarrow x=y$.
Phương trình thứ nhất của hệ trở thành: $x^3-3x-1=3\sqrt{x}(\sqrt{1-x}-1)^3$.
Điều kiện: $0\le x\le 1$. Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn phương trình.
Ta xét $0<x\le 1$. Chia bất phương trình cho $x^3>0$ ta thu được phương trình:
$1-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}=3\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$. Đặt $\frac{1}{x}=t \Rightarrow t\ge 1$ phương trình trở thành:

$$t^3+3t^2-1=3\left(\sqrt{t}-\sqrt{t-1}\right)^3 \Leftrightarrow \left(t^3+3t^2-1\right)\left(\sqrt{t}+\sqrt{t-1}\right)^3=3$$

Xét $f(t)=\left(t^3+3t^2-1\right)\left(\sqrt{t}+\sqrt{t-1}\right)^3$ Dễ thấy $f(t)\ge f(1)=3$ suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $t=1 \Leftrightarrow x=1$
Tóm lại hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;1)$
Chú ý: Ta cũng có thể tìm quan hệ $x, y$ dựa vào phương trình thứ hai của hệ theo cách:
Phương trình có dạng:

$$\sqrt{8x^2-3xy+4y^2}-3y+\sqrt{xy}-y=0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)(8x+5y)}{\sqrt{8x^2-3xy+4y^2}+3y}+\frac{(x-y)y}{\sqrt{xy}+y}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \dfrac{8x+5y}{\sqrt{8x^2-3xy+4y^2}+3y}+\dfrac{y}{\sqrt{xy}+y}=0 \end{array}\right.$$ (3) . Vì $x,y>0$ nên ta suy ra $x=y$

## PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

*Biến đổi tương đương là phương pháp giải hệ dựa trên những kỹ thuật cơ bản như: Thế, biến đổi các phương trình về dạng tích,cộng trừ các phương trình trong hệ để tạo ra phương trình hệ quả có dạng đặc biệt…*

*** Ta xét các ví dụ sau:**

**Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{4-2y}+\sqrt{5+2y-(x-1)^2}=5 & (1) \\ 3x^4+(x-y)^2=6x^3y+y^2 & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3-12x=y^3-6y^2+16 \\ x^2+y^2+xy-4x-6y+9=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2xy-x+2y=3 \\ x^3+4y^3=3x+6y^2-4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{y^2-7x-6}-\sqrt[3]{y(x-6)}=1 \\ \sqrt{2(x-y)^2+6x-2y+4}-\sqrt{y}=\sqrt{x+1} \end{cases}$

**Giải:**

a). Điều kiện $\begin{cases} x\ge -1 \\ y\le 2 \\ 5+2y\ge (x-1)^2 \end{cases}$

Xuất phát từ phương trình (2) ta có:

$$3x^4-6x^3y+(x-y)^2-y^2=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^3(x-2y)+x(x-2y)=0 \Leftrightarrow x(x-2y)(3x^2+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2y \end{array}\right.$$

Với $x=0$ thay vào (1) ta có:

$$1+\sqrt{4-2y}+\sqrt{4+2y}=5 \Leftrightarrow \sqrt{4-2y}+\sqrt{4+2y}=4$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\left(\sqrt{4-2y}+\sqrt{4+2y}\right)^2 \le 2(4-2y+4+2y)=16 \Leftrightarrow \sqrt{4-2y}+\sqrt{4+2y}\le 4$$

Dấu = xảy ra khi: $4-2y=4+2y \Leftrightarrow y=0$

Hệ có nghiệm: $(0;0)$

Với: $x=2y$. Thay vào phương trình trên ta được

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x-(x-1)^2}=5 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}=5$$
(*)

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}>0 \Rightarrow \sqrt{x+1}.\sqrt{4-x}=\dfrac{t^2-5}{2}$. Thay vào phương trình

ta có: $t+\dfrac{t^2-5}{2}=5 \Leftrightarrow t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-5 \\ t=3 \end{array}\right.$.

Khi $t=3 \Rightarrow \sqrt{x+1}.\sqrt{4-x}=2 \Leftrightarrow -x^2+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Tóm lại hệ có nghiệm $(x;y)=(0;0),\left(3;\dfrac{3}{2}\right)$

**Nhận xét :** Điều kiện $t>0$ chưa phải là điều kiện chặt của biến $t$

Thật vậy ta có: $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x} \Rightarrow t^2=5+2\sqrt{(x+1)(4-x)} \Rightarrow t^2 \ge 5$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cô si ta có

$2\sqrt{(x+1)(4-x)} \le 5 \Rightarrow t^2 \le 10 \Leftrightarrow t\in\left[\sqrt{5};\sqrt{10}\right]$

b) Hệ viết lại dưới dạng $\begin{cases} x^3-12x=(y-2)^3-12(y-2) \\ x^2+x(y-4)+(y-3)^2=0 \end{cases}$

Đặt $t=y-2$. Ta có hệ :

$$\begin{cases} x^3-12x=t^3-12t \\ x^2+x(t-2)+(t-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-t)(x^2+t^2+xt-12)=0 & (*) \\ x^2+t^2+xt-2(x+t)+1=0 & (2*) \end{cases}$$

Từ $(*)$ suy ra $\left[\begin{array}{ll} x^2+t^2+xt-12=0 & (3*) \\ x=t & \end{array}\right.$

- Với $x=t$ thay vào $(2*)$ ta có phương trình $3x^2-4x+1=0$

Từ đây suy ra 2 nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;3),\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$

- Với $(3^*)$ kết hợp với $(2^*)$ ta có hệ

$$\begin{cases}(x+t)^2-xt-12=0\\(x+t)^2-xt-2(x+t)+1=0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+t=\dfrac{13}{2}\\xt=\dfrac{121}{4}\end{cases}(VN)$$ . Do $(x+t)^2<4xt$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(x;y)=(1;3),\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$

c) Đưa hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases}(x+1)(2y-1)=2\\(x+1)^3+\dfrac{1}{2}(2y-1)^3=3(x+1)^2+\dfrac{3}{2}(2y-1)-5\end{cases}$$

Đặt: $a=x+1;\ b=2y-1.$

Khi đó ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases}ab=2\\a^3+\dfrac{1}{2}b^3=3a^2+\dfrac{3}{2}b-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=2\\2a^3+b^3=6a^2+3b-10\end{cases}$$

Từ hệ phương trình ban đầu ta nhẩm được nghiệm là $x=y=1$ nên ta sẽ có hệ này có nghiệm khi: $a=2;\ b=1$

Do đó ta sẽ phân tích hệ về dạng: $\begin{cases}(a-2)b=2(1-b)\\(a-2)^2(a+1)=(b-1)^2(b+2)\end{cases}$

Vì ta luôn có: $b\neq 0$ nên từ phương trình trên ta rút ra $a-2=\dfrac{2(1-b)}{b}$

Thế xuống phương trình dưới ta được:

$$\frac{4(b-1)^2}{b^2}(a+1)=(b-1)^2(b+2)\Leftrightarrow(b-1)^2\left[4(a+1)-b^2(b+2)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\4(a+1)=b^2(b+2)\end{array}\right.$$

Với: $b=1\Rightarrow a=2$ , suy ra: $x=y=1;$ .

Với $4(a+1)=b^2(b+2)$. Ta lại có:

$ab=2 \Leftrightarrow b(a+1)=b+2 \Leftrightarrow a+1=\dfrac{b+2}{b}$.

Thế lên phương trình trên ta có:

$$\frac{4(b+2)}{b}=b^2(b+2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-2 \Rightarrow a=-1 \Leftrightarrow x=-2;\ y=-\dfrac{1}{2} \\ b^3=4 \text{ (Không TM)} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm là: $(x;y)=(1;1),\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$

d) Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -1 \\ y \ge 0 \end{cases}$. Ta viết lại hệ phương trình thành:

$\sqrt{2(x-y)^2+6x-2y+4}-\sqrt{y}=\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2(x-y)^2+6x-2y+4}=\sqrt{y}+\sqrt{x+1}$. Bình phương 2 vế ta thu được:

$2x^2-4xy+2y^2+6x-2y+4=x+y+1+2\sqrt{y(x+1)}$

$\Leftrightarrow 2\left[(x+1)^2-2y(x+1)+y^2\right]+(x+1+y)=2\sqrt{y(x+1)}$

$\Leftrightarrow 2(x+1-y)^2+(\sqrt{x+1}-\sqrt{y})^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=y \\ \sqrt{x+1}=\sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow x+1=y$

Thay vào phương trình (2) ta có:

$\sqrt{y^2-7y+1}-\sqrt[3]{y(y-7)}=1 \Leftrightarrow \sqrt{y^2-7y+1}=\sqrt[3]{y(y-7)}+1$.

Đặt $a=\sqrt[3]{y(y-7)}$ ta có phương trình:

$$\sqrt{a^3+1}=a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -1 \\ a^3-a^2-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \\ a=2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Với $a=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=-1 \\ y=7 \Rightarrow x=6 \end{array}\right.$

Với $a=-1 \Rightarrow y^2-7y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{5-3\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Với $a=2 \Rightarrow y^2-7y-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \quad \text{(L)} \\ y=8 \Rightarrow x=7 \end{array}\right.$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm là :

$(x;y)=(-1;0),(6;7),\left(\dfrac{5-3\sqrt{5}}{2};\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2};\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2};\right),(7;8)$

**Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} x^2-(2y+2)x-3y^2=0 \\ x^2+2xy^2-(y+3)x-2y^3-6y^2+1=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2y=0 \\ x^3-x^2y+2y^2+2y-2x=0 \end{cases}$

**c).** $\begin{cases} xy^2-3x^3y-4yx^2-y+3x^2=0 \\ 3x^2y-y^2+3xy+1=0 \end{cases}$

**Giải:**

a) **Cách 1:** Lấy phương trình thứ hai trừ phương trình thứ nhất theo vế ta được: $2xy^2-(y+3)x-2y^3-6y^2+1+(2y+2)x+3y^2=0$

$\Leftrightarrow 2xy^2+xy-2y^3-3y^2+1-x=0 \Leftrightarrow x\left(2y^2+y-1\right)-2y^3-3y^2+1=0$

$\Leftrightarrow (y+1)(2y-1)(x-y-1)=0.$

+ Nếu $y=-1$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

+ Nếu $y=\dfrac{1}{2}$ thay vào phương trình (1) ta có:

$4x^2-12x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm 2\sqrt{3}}{2}$

+ Nếu $y=x-1$ thay vào phương trình (1) ta có:

$x^2-2x^2-3(x-1)^2=0 \Leftrightarrow -4x^2+6x-3=0$. Vô nghiệm.

Kết luận: $(x;y)=(\sqrt{3};1),(-\sqrt{3};1),\left(\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

* **Cách 2:** Phương trình thứ hai phân tích được: $(2y^2+x)(x-y-3)+1=0$

Phương trình thứ nhất phân tích được: $(x-y)^2-2(x+2y^2)=0$

Đặt $a=x-y, b=x+2y^2$ ta có hệ: $\begin{cases} a^2-2b=0 \\ (a-3)b+1=0 \end{cases}$

b) Lấy phương trình thứ hai trừ phương trình thứ nhất, ta được:

$x^3-x^2-x^2y+2xy-2x=0,$ hay $(x^3-x^2-2x)-y(x^2-2x)=0.$

Do $x^3-x^2-2x=(x+1)(x^2-2x)$ nên từ trên, ta có $(x^2-2x)(x+1-y)=0.$

\+ Nếu $x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-2 \end{array}\right.$

\+ Nếu $x=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

\+ Nếu $y=x+1$ thay vào phương trình (1) ta thu được: $1+2y^2+2y=0$ vô nghiệm.

Kết luận:

Hệ phương trình có các cặp nghiệm là: $(x;y)=(0;0),(0;-2),(2;0),\left(2;\dfrac{4}{3}\right)$

c) Hệ được viết lại như sau:

$$\begin{cases} \left(xy^2-y\right)+\left(3x^2-3x^3y\right)=4x^2y \\ 3x^2y-y^2+3xy+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(xy-y\right)\left(y-3x^2\right)=4x^2y \\ 3x^2-y^2+3xy+1=0 \end{cases}$$

Xét với $y=0$ thay vào ta thấy không là nghiệm của hệ .

Với $y\neq 0$ ta biến đổi hệ thành :

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{y}\right)\left(y-3x^2\right)=4x^2 \\ 3x^2-y+3x+\dfrac{1}{y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{y}\right)\left(y-3x^2\right)=4x^2 \\ 3x^2-y+\dfrac{1}{y}-x=-4x \end{cases}$$

Đặt : $\begin{cases} a=x-\dfrac{1}{y} \\ b=y-3x^2 \end{cases}$ Khi đó hệ trở thành hệ : $\begin{cases} ab=4x^2 \\ a+b=4x \end{cases}$

Theo Viets thì ta có 2 số a và b là nghiệm của phương trình :

$$t^2-4xt+4x^2 \Leftrightarrow (t-2x)^2=0 \Leftrightarrow t=2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=x-\dfrac{1}{y} \\ 2x=y-3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1}{x} \\ 2x=-\dfrac{1}{x}-3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{x} \\ 2x=-\dfrac{1}{x}-3x^2 \end{cases} \begin{cases} y=-\dfrac{1}{x} \\ 3x^3+2x^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ có 1 nghiệm $(x;y)=(-1;1)$

**Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} \sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-y}=2 \\ x^2-y^4+9y=x\left(9+y-y^3\right) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3-2x^2y-15x=6y(2x-5-4y) \\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}=\sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{y}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-6\sqrt{2x-4}=4\sqrt{3y-9}-2y \\ 6x^3-3x^2y+2xy+4=y^2+4x+6x^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^3y-8y^4+3x^2y=-4 \\ 2xy+y-y^2=2 \end{cases}$

**Giải:**

a) Từ phương trình (2) của hệ ta có:

$$x^2-y^4+9y=x\left(9+y-y^3\right) \Leftrightarrow (x-y)\left(x+y^3-9\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x+y^3-9=0 \end{array}\right.$$

Vì $y\le 1$ và $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-y}=2$ nên $\sqrt[3]{1+x}<2 \Leftrightarrow x<7$

Do đó $x+y^3-9<-1<0$ nên $x+y^3-9=0$ vô nghiệm.

Ta chỉ cần giải trường hợp $x=y$. Thế vào phương trình ban đầu ta được: $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-x}=2$. Đặt $a=\sqrt[3]{1+x}; b=\sqrt{1-x}\ (b>0)$ thì

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a^3+b^2=2 \end{cases} \Rightarrow a^3+(2-a)^2=2 \Leftrightarrow a^3+a^2-4a+2=0 \Leftrightarrow (a-1)\left(a^2+2a-2\right)=0$$

Từ đó suy ra nghiệm của phương trình ban đầu

$$x=0; x=-11+6\sqrt{3}; x=-11-6\sqrt{3}$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là

$x = y = 0; x = y = -11 + 6\sqrt{3}; x = y = -11 - 6\sqrt{3}$

b) Phương trình thứ nhất của hệ

$$\Leftrightarrow (2y - x)\left(x^2 - 12y - 15\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y = x \\ y = \dfrac{x^2 - 15}{12} \end{array}\right.$$

TH 1: $y = \dfrac{x^2 - 15}{12}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\frac{3x^2}{2\left(x^2 - 15\right)} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{4x^3}{x^2 - 15} + \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2 - 15}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{36x^2}{x^2 - 15} - 12\sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 15}\left(x^2 + 16x - 15\right)} + \left(x^2 + 16x - 15\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 16x - 15 \geq 0 \\ 6\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 - 15}} = \sqrt{\left(x^2 + 16x - 15\right)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 16x - 15 \geq 0 \\ 36\dfrac{x^2}{x^2 - 15} = x^2 + 16x - 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 16x - 15 \geq 0 \\ 36x^2 = \left(x^2 - 15\right)\left(x^2 + 16x - 15\right) (*) \end{cases}$$

Xét phương trình (*) $36x^2 = \left(x^2 - 15\right)\left(x^2 + 16x - 15\right)$

Vì x = 0 không phải là nghiệm. Ta chia hai vế phương trình cho $x^2$ ta có:

$36 = \left(x - \dfrac{15}{x}\right)\left(x + 16 - \dfrac{15}{x}\right)$ Đặt $x - \dfrac{15}{x} = t \Rightarrow t^2 + 16t - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -18 \end{array}\right.$

\+ Nếu $t = 2 \Leftrightarrow x - \dfrac{15}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 5$

\+ Nếu $t = -18$

$$\Leftrightarrow x - \frac{15}{x} = -18 \Leftrightarrow x^2 + 18x - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -9 - 4\sqrt{6} \\ x = -9 + 4\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -9 - 4\sqrt{6}$$

Nghiệm của hệ đã cho là: $(x; y) = \left(5; \dfrac{5}{6}\right), \left(-9 - 4\sqrt{6}; \dfrac{27 + 12\sqrt{6}}{2}\right)$

TH 2: $x = 2y$ Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có:

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4x} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{2x^3}{3x} + \frac{x^2}{4}} - \frac{x}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{6}x = \sqrt{\frac{11x^2}{12}} \Leftrightarrow x = 0$ (loại) (do điều kiện $y \neq 0$)

KL: Nghiệm của hệ đã cho là: $(x; y) = \left(5; \frac{5}{6}\right), \left(-9 - 4\sqrt{6}; \frac{27 + 12\sqrt{6}}{2}\right)$

c) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 3 \end{cases}$

Phương trình (2) của hệ tương đương với:

$(2x - 2 - y)(3x^2 + y - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2x - 2 \\ y = 2 - 3x^2 \end{array}\right.$

\+ Với $y = 2x - 2$ thế vào phương trình (1) ta được:

$(1) \Leftrightarrow 7x - 6\sqrt{2x - 4} - 4\sqrt{6x - 15} - 4 = 0 \quad (3)$

Đến đây sử dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$\begin{cases} 6\sqrt{2x - 4} = 3.2\sqrt{2(x - 2)} \leq 3x \\ 4\sqrt{6x - 15} = 2.2\sqrt{3(2x - 5)} \leq 2(2x - 2) \end{cases} \Rightarrow 6\sqrt{2x - 4} + 4\sqrt{6x - 15} \leq 7x - 4$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $x = 4$

Từ (3) suy ra $x = 4$ là nghiệm duy nhất. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (4; 6)$

\- Với $y = 2 - 3x^2 \leq 2$ hệ vô nghiệm do điều kiện $y \geq 3$

Vậy hệ đã cho chỉ có 1 nghiệm $(x; y) = (4; 6)$

d) Thế phương trình 2 vào phương trình 1 của hệ ta được phương trình :

$x^3y - 8y^4 + 3x^2y = -2(2xy + y - y^2) \Leftrightarrow \left(x^3 - 8y^3 + 3x^2\right)y = \left(-4x - 2 + 2y\right)y$

Vì $y = 0$ không là nghiệm của hệ. Chia cả hai vế cho y ta được phương trình

$x^3 - 8y^3 + 3x^2 = -4x - 2 + 2y \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x = 8y^3 + 2y - 2$

Đặt : $z = x + 1 \Rightarrow x = z - 1$ . Khi đó ta có phương trình :

$z^3 + z = 8y^3 + 2y \Leftrightarrow (z - 2y)\left(z^2 + 4y^2 + 2zy\right) = 0\left[\text{do } \left(z^2 + 4y^2 + 2zy\right) > 0\right]$

$\Leftrightarrow z = 2y \Rightarrow x + 1 = 2y \Rightarrow x = 2y - 1$

Thế vào phương trình 2 của hệ ta được phương trình:

$$3y^2-y-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} y=1 & \Rightarrow x=1\\ y=\dfrac{-2}{3} & \Rightarrow x=\dfrac{-7}{3}\end{array}\right.$$

Hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)=(1;1);\left(\dfrac{-7}{3};\dfrac{-2}{3}\right)$

**Ví dụ 4: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases}3y^2+1+2y(x+1)=4y\sqrt{x^2+2y+1}\\ y(y-x)=3-3y\end{cases}$

b) $\begin{cases}2x+(3-2xy)y^2=3\\ 2x^2-x^3y=2x^2y^2-7xy+6\end{cases}$

c) $\begin{cases}x^4+2xy+6y-(7+2y)x^2=-9\\ 2yx^2-x^3=10\end{cases}$

**Giải:**

a) Điều kiện: $x^2+2y+1\ge 0$.

Phương trình (1) tương đương:

$$4y^2-4y\sqrt{x^2+2y+1}+x^2+2y+1=x^2-2xy+y^2$$

$$\Leftrightarrow\left(2y-\sqrt{x^2+2y+1}\right)^2=(x-y)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2y+1}=3y-x\\ \sqrt{x^2+2y+1}=x+y\end{array}\right.$$

**TH1:** $\sqrt{x^2+2y+1}=3y-x$. Bình phương hai vế phương trình ta được:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3y\ge x\\ x^2+2y+1=9y^2-6xy+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y\ge x\\ 6xy=9y^2-2y-1\\ xy=y^2+3y-3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;\ y=1(TM)\\ x=\dfrac{415}{51};\ y=\dfrac{17}{3}(TM)\end{array}\right.$$

.

**TH2:** $\sqrt{x^2+2y+1}=x+y$. Bình phương hai vế phương trình:

$$\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x^2+2y+1=x^2+2xy+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\ge 0 \\ 2xy=-y^2+2y+1 \\ xy=y^2+3y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;y=1 \\ x=\dfrac{41}{21};y=-\dfrac{7}{3}(L) \end{array}\right.$$

.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;1),\left(\dfrac{415}{51};\dfrac{17}{3}\right)$.

b) Từ phương trình (1) ta thấy: $2x\left(1-y^3\right)=3\left(1-y^2\right)$.

TH1: $y=1$ thay vào (2) ta có: $x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow x=1;x=3;x=-2$.

TH2: Kết hợp với (2) ta có hệ mới: $\begin{cases} 2x+2xy+2xy^2=3+3y & (*) \\ 2x^2-x^3y=2x^2y^2-7xy+6 & (3) \end{cases}$.

Phương trình (3) tương đương với: $(xy-2)\left(2xy+x^2-3\right)=0$.

\+ Nếu: $xy=2$ thay vào (*) ta có:

$$2x+4+4y=3+3y \Rightarrow x=\frac{-1-y}{2} \Rightarrow y(1+y)=-4.$$

Phương trình này vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

\+ Nếu $2xy=3-x^2$ thay vào (*) ta có:

$$2x+3-x^2+y\left(3-x^2\right)=3+3y \Rightarrow y=\frac{2}{x}-1$$

$$\Rightarrow 2x\left(\frac{2}{x}-1\right)=3-x^2 \Leftrightarrow x=1;y=1$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;1),(3;1),(-2;1)$.

c) Phương trình (1) tương đương:

$$x^4-7x^2+9-2y\left(x^2-x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-3\right)\left(x^2+x-3\right)-2y\left(x^2-x-3\right)=0$$

.

TH1: $x^2-x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{79+\sqrt{13}}{36} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{79-\sqrt{13}}{36} \end{array}\right.$.

TH2: $2y^2 = x^2 + x - 3$ thay vào (2) ta có:

$$\left(x^2 + x - 3\right)x^2 - x^3 = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{5} \Rightarrow y = 1 - \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ x = -\sqrt{5} \Rightarrow y = 1 + \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ có nghiệm

$$(x;y) = \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{79+\sqrt{13}}{36}\right),\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};\frac{79-\sqrt{13}}{36}\right),\left(\sqrt{5};1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right),\left(-\sqrt{5};1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

**Ví dụ 5: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} xy - x - y = 1 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy - x + 2y = 4 \\ 4x^3 + 24x^2 + 45x = -y^3 + 6y - 20 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \left(\dfrac{1-x^2}{x^2}\right)^3 + xy + \dfrac{3}{2} = y^3 \\ (xy+2)^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2y + \dfrac{4}{x} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 3 \\ x^2 - 4y^2 + \dfrac{2xy}{x+y-1} = -1 \end{cases}$

**Giải:**

a) Hệ tương đương: $\begin{cases} 3xy - 3x - 3y = 3 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases}.$

Trừ hai phương trình cho nhau ta được: $4(x-1)^3 = -y^3 + 3xy + 3y$

$\Leftrightarrow 4(x-1)^3 + 4y^3 = 3y^3 + 3xy + 3y$

$\Leftrightarrow 4(x+y-1)\left[(x-1)^2 - (x-1)y + y^2\right] = 3y\left(y^2 + x + 1\right)$

$\Leftrightarrow 4(x+y-1)\left[(x-1)^2 - (x-1)y + y^2\right] = 3y\left(y^2 + xy - y - 1 + 1\right)$

$\Leftrightarrow 4(x+y-1)\left[(x-1)^2 - (x-1)y + y^2\right] = 3y^2(x+y-1)$

$\Leftrightarrow (x+y-1)(2x-2-y)^2 = 0$

Với $y = 1 - x$ thay vào (1) ta được: $x^2 - x + 2 = 0$ (vô nghiệm).

Với $y=2x-2$ thay vào (1) ta được: $2x^2-5x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4} \\ x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{4};\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right),\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4};\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

b) Hệ tương đương: $\begin{cases} 6y-3x+3xy-12=0 \\ 4x^3+24x^2+45x=-y^3+6y-20 \end{cases}$.

Trừ hai phương trình trên cho nhau ta được:

$4x^3+24x^2+48x+32=-y^3+3xy+12y$

$\Leftrightarrow 4(x+2)^3+4y^3=3y^3+3xy+12y$

$\Leftrightarrow 4(x+y+2)\left[(x+2)^2-(x+2)y+y^2\right]=3y\left(y^2+x+4\right)$

Thế $x=xy+2y-4$ vào VP ta được:

$$4(x+y+2)\left[(x+2)^2-(x+2)y+y^2\right]=3y\left(y^2+2y+xy-4+4\right)=3y^2(x+y+2)$$

$\Leftrightarrow (x+y+2)\left(4(x+2)^2-4(x+2)y+y^2\right)=0$.

Với $y=-x-2$ thay vào (1) ta được: $x^2-5x+8=0$ (vô nghiệm).

Với $y=2x+2$ thay vào (1) ta được: $2x^2-7x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{17}-7}{4} \\ x=-\dfrac{\sqrt{17}+7}{4} \end{array}\right.$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt{17}-7}{4};\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{17}+7}{4};\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$.

c) Điều kiện: $x\neq 0$.

Phương trình (2) tương đương:

$\left(y+2-\dfrac{1}{x}\right)^2=0 \Leftrightarrow xy=\dfrac{1}{x}-2 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}$.

Thay vào (1) ta được:

$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^3+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)^3 \Leftrightarrow \left(t^2-1\right)^3+t-\frac{1}{2}=\left(t^2-2t\right)^3$

$\Leftrightarrow (2t-1)\left(6t^4-12t^3+2t^2+4t+3\right)=0$.

TH1: $t=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=-\frac{3}{4}$.

TH2: $6t^4-12t^3+2t^2+4t+3=0 \Leftrightarrow 6\left(t^2-t-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{1}{3}$ (vô lý)

Vậy nghiệm của hệ $(x;y)=\left(2;-\frac{3}{4}\right)$.

d) Điều kiện: $x+y\neq 1$. Phương trình (2) tương đương:

$\left(x^2-4y^2\right)(x+y-1)+2xy=-(x+y-1)$.

Phân tích nhân tử ta được: $(x+2y-1)\left(x^2-2y^2-xy+y+1\right)=0$.

TH1: $x+2y-1=0$ thay vào (1) dễ dàng tìm được:

$(x;y)=\left(\frac{-1-2\sqrt{14}}{5};\frac{3+\sqrt{14}}{5}\right),\left(\frac{2\sqrt{14}-1}{5};\frac{3-\sqrt{14}}{2}\right)$.

TH2: Kết hợp với (1) ta có hệ mới: $\begin{cases} x^2-2y^2-xy+y+1 \\ x^2+y^2+x=3 \end{cases}$.

Giải bằng cách:

$PT(1)-PT(2) \Leftrightarrow 3y^2+xy+x-y-4=0 \Leftrightarrow (y+1)(x+3y-4)=0$.

Vậy nghiệm của hệ

$(x;y)=\left(\frac{-1-2\sqrt{14}}{5};\frac{3+\sqrt{14}}{5}\right),\left(\frac{2\sqrt{14}-1}{5};\frac{3-\sqrt{14}}{2}\right),\left(-\frac{10}{11};\frac{17}{10}\right),(1;1),(1;-1),(-2;-$

**Ví dụ 7)** Giải hệ phương trình với nghiệm là số thực:

a) $\begin{cases} x^2+2y^2+2x+8y+6=0 \\ x^2+xy+y+4x+1=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2+2xy+y-5=0 \\ y^2+xy+5x-7=0 \end{cases}$

**Giải:**

* **Cách 1:** Đặt $\begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases}$ thay vào phương trình (1) của hệ ta có:

$(u+a)^2 + 2(v+b)^2 + 2(u+a) + 8(v+b) + 6 = 0$

$\Leftrightarrow\ u^2 + 2v^2 + 2(a+1)u + 4v(b+2) + a^2 + 2b^2 + 2a + 8b + 6 = 0$.

Ta mong muốn không có số hạng bậc nhất trong phương trình nên điều kiện là:

$\begin{cases} a+1=0 \\ b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$

Từ đó ta có các h đặt ẩn phụ như sau: Đặt $\begin{cases} x = u - 1 \\ y = v - 2 \end{cases}$ thay vào hệ ta có:

$\begin{cases} u^2 + 2v^2 = 3 \\ u^2 + uv = 2 \end{cases}$ đây là hệ đẳng cấp.

Từ hệ ta suy ra $2\left(u^2 + 2v^2\right) = 3\left(u^2 + uv\right) \Leftrightarrow u^2 + 3uv - 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u = -4v \end{array}\right.$

Công việc còn lại là khá đơn giản.

* **Cách 2:** Ta cộng phương trình (1) với $k$ lần phương trình (2).

$x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + 6 + k\left[x^2 + xy + y + 4x + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (1+k)x^2 + (2+4k+ky)x + 2y^2 + 8y + ky + k + 6 = 0$

Ta có

$\Delta = (2+4k+ky)^2 - 4(k+1)(2y^2 + 8y + ky + k + 6)$

$= \left(k^2 - 8k - 8\right)y^2 + (4k^2 - 32k - 32)y + 12k^2 - 12k - 20$ .

Ta mong muốn $\Delta$ có dạng $(Ay+B)^2 \Leftrightarrow \Delta = 0$ có nghiệm kép:

$\Leftrightarrow \left(4k^2 - 32k - 32\right)^2 - 4\left(k^2 - 8k - 8\right)\left(12k^2 - 12k - 20\right) = 0 \Leftrightarrow k = -\dfrac{3}{2}$.

Từ đó ta có cách giải như sau:

Lấy 2 lần phương trình (1) trừ 3 lần phương trình (2) của hệ ta có:

$2\left(x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + 6\right) - 3\left(x^2 + xy + y + 4x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow$

$-x^2 - 3xy - 8x + 4y^2 + 13y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(3y+8\right)x - \left(4y^2 + 13y + 9\right) = 0$

Ta có $\Delta = \left(3y+8\right)^2 + 4\left(4y^2 + 13y + 9\right) = 25y^2 + 100y + 100 = \left(5y+10\right)^2$

Từ đó tính được: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3y+8-(5y+10)}{2}=-y-1 \\ x=\dfrac{3y+8+(5y+10)}{2}=4y+9 \end{array}\right.$

Phần việc còn lại là khá đơn giản.

b) Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) ta thu được:

$$2x^2+2xy+y-5-\left(y^2+xy+5x-7\right)=0 \Leftrightarrow 2x^2+\left(y-5\right)x-y^2+y+12=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{y+1}{2} \\ x=-y+2 \end{array}\right.$$

**Nhận xét:** Khi gặp các hệ phương trình dạng:

$$\begin{cases} a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x+a_5y+a_6=0 \\ b_1x^2+b_2xy+b_3y^2+b_4x+b_5y+b_6=0 \end{cases}$$

+ Ta đặt $x=u+a, y=v+b$ sau đó tìm điều kiện để phương trình không có số hạng bậc 1 hoặc không có số hạng tự do .
+ Hoặc ta cộng phương trình (1) với k lần phương trình (2) sau đó chọn $k$ sao cho có thể biểu diễn được $x$ theo y . Để có được quan hệ này ta cần dựa vào tính chất. Phương trình $ax^2+bx+c$ biểu diễn được thành dạng: $(Ax+B)^2 \Leftrightarrow \Delta=0$

**Đối với các hệ đại số bậc 3:**

Ta có thể vận dụng các hướng giải

+ Biến đổi hệ để tạo thành các hằng đẳng thức
+ Nhân các phương trình với một biểu thức đại số sau đó cộng các phương trình để tạo ra quan hệ tuyến tính.

**Ví dụ 8)** Giải hệ phương trình với nghiệm là số thực:

a) $\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3-y^3=35 \\ 2x^2+3y^2=4x-9y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3+3x^2y=6xy-3x-49 \\ x^2-6xy+y^2=10y-25x-9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy\left(3x+y\right)=4 \\ 7x^3+11=3\left(x+y\right)\left(x+y+1\right)(1) \end{cases}$

**Giải:**

a) Phân tích: Ta viết lại hệ như sau: $\begin{cases} x^3+3xy^2+49=0 \\ y^2+8(x+1)y+x^2+17x=0 \end{cases}$

Nhận thấy $x=-1$ thì hệ trở thành: $\begin{cases} -3y^2+48=0 \\ y^2-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=\pm 4$

**Từ đó ta có lời giải như sau:**

Lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) của hệ ta có:

$x^3+3xy^2+49+3\left(x^2-8xy+y^2-8y+17x\right)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left[(x+1)^2+3(y-4)^2\right]=0$

Từ đó ta dễ dàng tìm được các nghiệm của hệ: $(x;y)=(-1;4),(-1;-4)$

b) Làm tương tự như câu $a$

Lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) thì thu được:

$(x+1)\left[(x+1)^2+3(y-5)^2\right]=0$ . Từ đó dễ dàng tìm được các nghiệm của hệ.

c) Lấy phương trình (1) trừ 3 lần phương trình (2) ta thu được:

$(x-2)^3=(y+3)^3 \Leftrightarrow x=y+5$

Thay vào phương trình (2) ta có:

$2(y+5)^2+3y^2=4(y+5)-9y \Leftrightarrow 5y^2+25y+30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ y=-2 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là: $(x;y)=(2;-3),(3;-2)$

d) Lấy 2 lần phương trình (2) trừ đi phương trình (1) ta thu được:

$(x-1)\left[y^2-(x+3)y+x^2-x-2\right]=0$

Trường hợp 1: $x=1$ hệ vô nghiệm

Trường hợp 2: $\begin{cases} y^2-(x+3)y+x^2-x-2=0 \\ x^3+y^2=(x-y)(xy-1) \end{cases}$

Lấy 2 lần phương trình (2) trừ đi phương trình (1) ta thu được:

$(2x+1)\left[y^2-(x-1)y+x^2-x+2\right]=0$

\+ Nếu $x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=\dfrac{3\pm 3\sqrt{5}}{4}$

\+ Nếu $y^2-(x-1)y+x^2-x+2=0$ ta có hệ: $\begin{cases} y^2-(x-1)y+x^2-x+2=0 \\ y^2-(x+3)y+x^2-x-2=0 \end{cases}$.

Trừ hai phương trình cho nhau ta có: $y=-1$ thay vào thì hệ vô nghiệm

KL: Nghiệm của hệ là: $(x;y)=\left(-\frac{1}{2};\frac{3+3\sqrt{5}}{4}\right),\left(-\frac{1}{2};\frac{3-3\sqrt{5}}{4}\right)$

d).

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 7x^3+3xy(3x+y)=1+3(x+y)(x+y+1)$

$\Leftrightarrow 7x^3+3xy(4x+2y-x-y)=1+3(x+y)(x+y+1)$

$\Leftrightarrow 8x^3+y^3+6xy(2x+y)=x^3+y^3+3xy(x+y)+3(x+y+1)(x+y)+1$

$\Leftrightarrow (2x+y)^3=(x+y)^3+3(x+y)(x+y+1)+1^3=(x+y+1)^3$

$\Leftrightarrow 2x+y=x+y+1 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$\begin{cases} x=1 \\ y(y+3)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$.

**PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ**

Đặt ẩn phụ là việc chọn các biểu thức $f(x,y);g(x,y)$ trong hệ phương trình để đặt thành các ẩn phụ mới làm đơn giản cấu trúc của phương trình, hệ phương trình. Qua đó tạo thành các hệ phương trình mới đơn giản hơn, hay quy về các dạng hệ quen thuộc như đối xứng, đẳng cấp…

Để tạo ra ẩn phụ người giải cần xử lý linh hoạt các phương trình trong hệ thông qua các kỹ thuật: Nhóm nhân tử chung, chia các phương trình theo những số hạng có sẵn, nhóm dựa vào các hằng đẳng thức, đổi biến theo đặc thù phương trình…

Ta quan sát các ví dụ sau:

**Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} 2x^2-2xy-y^2=2 \\ 2x^3-3x^2-3xy^2-y^3+1=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$

**Giải:**

a) Ta viết lại hệ phương trình thành:

$$\begin{cases}3x^2-(x+y)^2=2\\3x^3+3x^2y-(x+y)^3-3x^2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-(x+y)^2=2\\3x^2(x+y)-(x+y)^3-3x^2=-1\end{cases}.$$

Đặt $a=3x^2, b=x+y$ ta thu được hệ phương trình: $\Leftrightarrow\begin{cases}a-b^2=2\\ab-b^3-a=-1\end{cases}.$

Từ phương trình (1) suy ra $a=b^2+2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta thu được: $\left(b^2+2\right)b-b^3-\left(b^2+2\right)=-1\Leftrightarrow b^2-2b+1=0\Leftrightarrow b=1\Rightarrow a=3$

Khi $\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=1\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\\\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}\end{array}\right.$

Tóm lại hệ phương trình có 2 cặp nghiệm: $(x;y)=(1;0),(-1;2)$

b) Ta viết lại hệ phương trình thành: $\begin{cases}\left(x^2-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=4\\x^2y+x^2+2y-22=0\end{cases}$

Đặt $a=x^2-2; b=y-3$. Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}a^2+b^2=4\\(a+2)(b+3)+a+2+2(b+3)=22\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4\\ab+4(a+b)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2-2ab=4\\ab+4(a+b)=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2+8(a+b)-20=0\\ab+4(a+b)=8\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b=2\\ab=0\end{cases}\\\begin{cases}a+b=-10\\ab=48\end{cases}(L)\end{array}\right.$$

Xét $\begin{cases}a+b=2\\ab=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2,b=0\\a=0,b=2\end{array}\right.$

+ Nếu: $a=0,b=2\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\sqrt{2}\\y=5\end{cases}$

+ Nếu $a=2,b=0\Rightarrow\begin{cases}x=\pm2\\y=3\end{cases}$

Tóm lại hệ có các cặp nghiệm: $(x;y)=(\sqrt{2};5),(-\sqrt{2};5),(2;3),(-2;3)$

**Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases}(x^2+y^2)(x+y+1)=25(y+1)\\ x^2+xy+2y^2+x-8y=9\end{cases}$ b)

$\begin{cases}x^2+y^2+6xy-\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{9}{8}=0\\ 2y-\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{5}{4}=0\end{cases}$

**Giải:**

a) Để ý rằng khi $y=-1$ thì hệ vô nghiệm

Xét $y\neq -1$. Ta viết lại hệ thành: $\begin{cases}(x^2+y^2)(x+y+1)=25(y+1)\\ x^2+y^2+x(y+1)+(y+1)^2=10(y+1)\end{cases}$

Chia hai phương trình của hệ cho $y+1$ ta thu được:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{y+1}(x+y+1)=25\\ x^2+y^2+x(y+1)+(y+1)^2=10(y+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{y+1}(x+y+1)=25\\ \dfrac{x^2+y^2}{y+1}+(x+y+1)=10\end{cases}.$$

Đặt $\dfrac{x^2+y^2}{y+1}=a;x+y+1=b$. Ta có:

$$\begin{cases}ab=25\\ a+b=10\end{cases}\Leftrightarrow a=b=5\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=5(y+1)\\ x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3;y=1\\ x=-\dfrac{3}{2};y=\dfrac{11}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(3;1),\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{11}{2}\right)$.

b) Điều kiện: $x\neq y$.

Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} 2(x+y)^2-(y-x)^2-\dfrac{1}{(y-x)^2}+\dfrac{9}{8}=0 \\ \left(y-x+\dfrac{1}{y-x}\right)+(x+y)+\dfrac{5}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^2-\left(y-x+\dfrac{1}{y-x}\right)^2+\dfrac{25}{8}=0 \\ \left(y-x+\dfrac{1}{y-x}\right)+(x+y)+\dfrac{5}{4}=0 \end{cases}$$

.

Đặt $x+y=a; y-x+\dfrac{1}{y-x}=b; |b|\geq 2$ hệ thành:

$$\begin{cases} a+b=-\dfrac{5}{4} \\ 2a^2-b^2=-\dfrac{25}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{4} \\ b=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+x=\dfrac{5}{4} \\ y-x=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} y+x=\dfrac{5}{4} \\ y-x=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{13}{8}; y=-\dfrac{3}{8} \\ x=\dfrac{7}{8}; y=\dfrac{3}{8} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{7}{8};\dfrac{3}{8}\right),\left(\dfrac{13}{8};-\dfrac{3}{8}\right)$.

**Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} x\sqrt{17-4x^2}+y\sqrt{19-9y^2}=3 \\ \sqrt{17-4x^2}+\sqrt{19-9y^2}=10-2x-3y \end{cases}$ b)

$$\begin{cases} (x^2+x)y^2-4y^2+y+1=0 \\ xy+x^2y^2+1-(4-x^3)y^3=0 \end{cases}$$

**Giải:**

a) Điều kiện: $-\dfrac{\sqrt{17}}{2}\leq x\leq \dfrac{\sqrt{17}}{2}; -\dfrac{\sqrt{19}}{3}\leq y\leq \dfrac{\sqrt{19}}{3}$.

Để ý $x\sqrt{17-4x^2}$ liên quan đến $2x$ và $\sqrt{17-4x^2}$, $y\sqrt{19-9y^2}$ liên quan đến $3y$ và $\sqrt{19-9y^2}$ . Và tổng bình phương của chúng là những hằng số.

Đặt $2x+\sqrt{17-4x^2}=a; 3x+y\sqrt{19-9y^2}=b$ . Hệ đã cho tương đương:



hoc360.net

$$\begin{cases} a+b=10 \\ \dfrac{a^2-17}{4}+\dfrac{b^2-19}{6}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5;b=5 \\ a=3;b=7 \end{array}\right..$$

**TH1:** $\begin{cases} 2x+\sqrt{17-4x^2}=5 \\ 3y+\sqrt{19-9y^2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right. \\ y=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6} \end{cases}.$

**TH2:** $\begin{cases} 2x+\sqrt{17-4x^2}=3 \\ 3y+\sqrt{19-9y^2}=7 \end{cases}$ (loại).

Vậy hệ có nghiệm

$(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right),\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\right),\left(2;\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right),\left(2;\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\right).$

b) Ta viết lại hệ như sau: $\begin{cases} \left(x^2+x\right)y^2+y+1=4y^2 \\ xy+x^2y^2+1+x^3y^3=4y^3 \end{cases}$

Ta thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ.Chia phương trình đầu cho $y^2$, phương trình thứ 2 cho $y^3$ ta được: $\begin{cases} \left(x^2+x\right)+\dfrac{y+1}{y^2}=4 \\ \dfrac{x}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+1+x^3=4 \end{cases}$

Viết lại hệ dưới dạng: $\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{xy+1}{y}=4 \\ \left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(\dfrac{xy+1}{y}\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ x+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases}.$

Đặt $x^2+\dfrac{1}{y^2}=a,\dfrac{xy+1}{y}=b$ ta có hệ mới $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ x+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2-\dfrac{2x}{y}=2 \\ x+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{x}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$$

Vậy hệ có một cặp nghiệm duy nhất $x=y=1$

**Ví dụ 4: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} 6x^4-(x^3-x)y^2-(y+12)x^2=-6 \\ 5x^4-(x^2-1)^2.y^2-11x^2=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-y}+\dfrac{5y}{x+y^2}=4 \\ 5x+y+\dfrac{x^2-5y^2}{xy}=5 \end{cases}$

**Giải**

a) Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ.

Chia hai vế phương trình cho $x^2$ ta có:

$$\begin{cases} 6x^2+\dfrac{6}{x^2}-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)y^2-y-12=0 \\ 5x^2+\dfrac{5}{x^2}-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2 y^2-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)y^2-y=0 \\ 5\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2 y^2-1=0 \end{cases}.$$

Đặt $x-\dfrac{1}{x}=a$. Hệ thành: $\begin{cases} 6a^2-ay^2-y=0 \\ 5a^2-a^2y^2-1=0 \end{cases}$.

Chia hai vế cho $a^2$ và đặt $y+\dfrac{1}{a}=X, \dfrac{y}{a}=Y$ giải ra ta được

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2}, y=1 \\ a=1, y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4};1\right),\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2};2\right)$.

b). Điều kiện: $x, y \neq 0; x \neq -y^2; y \neq x^2$.

Phương trình (2) tương đương: $y+\dfrac{x}{y}+5x-\dfrac{5y}{x}=5 \Leftrightarrow \dfrac{x+y^2}{x}+5.\dfrac{x^2-y}{x}=5$

Đặt $\dfrac{x^2-y}{x}=a, \dfrac{x+y^2}{x}=b$.

Hệ thành:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{5}{b}=4 \\ b+5a=5 \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}, b=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x^2-y\right)=x \\ 2\left(x+y^2\right)=5y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2}, y=3 \\ x=1, y=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(-\dfrac{3}{2};3\right),\left(1;\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

**Ví dụ 5: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} (xy+3)^2+(x+y)^2=8 \\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4 \\ \left(\dfrac{2x}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{y}{x^2}-9\right)=18 \end{cases}$

**Giải**

a) Triển khai phương trình (1)

(1) $\Leftrightarrow x^2y^2+6xy+9+x^2+2xy+y^2=8 \Leftrightarrow x^2y^2+x^2+y^2+1=-8xy$

$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=-8xy$.

Nhận thấy $x=0, y=0$ không là nghiệm của hệ.

Phương trình (1) khi đó là: $\dfrac{x^2+1}{x}.\dfrac{y^2+1}{y}=-8$.

Đặt $\dfrac{x}{x^2+1}=a; \dfrac{y}{y^2+1}=b$. Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} a+b=-\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{ab}=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y}{y^2+1}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=2\pm\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2+\pm\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ có nghiệm

$(x;y)=\left(-1;2-\sqrt{3}\right),\left(-1;2+\sqrt{3}\right),\left(2-\sqrt{3};-1\right),\left(2+\sqrt{3};-1\right)$.

b) Phương trình (2) tương đương:

$$\left(2x-y^2\right)\left(y-9x^2\right)=18x^2y^2 \Leftrightarrow 9x^2y^2+18x^3+y^3=2xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2y^2+18x^3+y^3}{xy}=2 \Leftrightarrow 9xy+\frac{18x^2}{y}+\frac{y^2}{x}+2=4$$

$$\Leftrightarrow 9x\left(y+\frac{2x}{y}\right)+\frac{y}{x}\left(y+\frac{2x}{y}\right)=4 \Leftrightarrow \left(9x+\frac{y}{x}\right)\left(y+\frac{2x}{y}\right)=4.$$

Đặt $a=\left(9x+\dfrac{y}{x}\right);b=\left(y+\dfrac{2x}{y}\right)$. Hệ thành:

$$\begin{cases} a+2b=4 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=2;b=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+\dfrac{y}{x}=4 \\ y+\dfrac{2x}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2+y=4x \\ y^2+2x=y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4x-9x^2 \\ \left(4x-9x^2\right)^2+2x=4x-9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(L) \\ x=\dfrac{1}{9} \Rightarrow y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right..$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{3}\right)$.

**Ví dụ 6: Giải các hệ phương trình sau**

| | |
|---|---|
| a) $\begin{cases} x\sqrt{x^2+6}+y\sqrt{x^2+3}=7xy \\ x\sqrt{x^2+3}+y\sqrt{y^2+6}=x^2+y^2+2 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} 2x^2y+y^3=2x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$ |

**Giải**

Giải hệ:.

Hệ phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} \left(x\sqrt{y^2+6}+y\right)+y\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)=9xy \\ x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)+y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y^2+6}+y}{y}+\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{x}=9 \\ x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)+y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right)=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right)}+\dfrac{3}{x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)}=9 \\ x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)+y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right)=2 \end{cases}$$

Đặt $x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=a; y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right)=b$.

Hệ thành: $\begin{cases} \dfrac{6}{b}+\dfrac{3}{a}=9 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2}; b=1 \\ a=\dfrac{2}{3}; b=\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$.

TH1: $\begin{cases} x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=1 \\ y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

TH2: $\begin{cases} x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=\dfrac{2}{3} \\ y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right)=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{\sqrt{15}} \\ y=2\sqrt{\dfrac{2}{15}} \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ $(x;y)=\left(1;\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{2}{\sqrt{15}};2\sqrt{\dfrac{2}{15}}\right)$.



hoc360.net

**PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ HẰNG ĐẲNG THỨC:**

**Điểm mấu chốt khi giải hệ bằng phương pháp biến đổi theo các hằng đẳng thức:**

**Ta xét các ví dụ sau:**

**Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases}(3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0\\ \sqrt[3]{x+2}+2\sqrt{y+2}=5\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x^2y+y^3=2x^4+x^6\\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2\end{cases}$

**Giải**

a) Điều kiện: $x\le 2, y\ge \frac{1}{2}$. Phương trình (1) tương đương:

$(2-x)\sqrt{2-x}+\sqrt{2-x}=(2y-1)\sqrt{2y-1}+\sqrt{2y-1}$

Đặt $a=\sqrt{2-x}, b=\sqrt{2y-1}$. Ta có phương trình: $a^3+a=b^3+b$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+1)=0$. Do

$a^2+ab+b^2+1=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}+1>0$ suy ra phương trình cho ta $a=b$

$\sqrt{2y-1}=\sqrt{2-x}\Leftrightarrow x=3-2y$ thay vào ta có: $\sqrt[3]{5-2y}+2\sqrt{y+2}=5\Leftrightarrow$ Đặt

$a=\sqrt[3]{5-2y}; b=\sqrt{y+2}$ ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}a+2b=5\\ a^3+2b^2=9\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1; b=2\\ a=\dfrac{-3-\sqrt{65}}{4}; b=\dfrac{23+\sqrt{65}}{8}\\ a=\dfrac{\sqrt{65}-3}{4}; b=\dfrac{23-\sqrt{65}}{8}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=2\\ y=\dfrac{233+23\sqrt{65}}{32}\\ y=\dfrac{233-23\sqrt{65}}{32}\end{array}\right..$$

Vậy hệ có nghiệm

$$(x;y)=(-1;2),\left(\frac{23\sqrt{65}-185}{16};\frac{233-23\sqrt{65}}{32}\right),\left(-\frac{23\sqrt{65}+185}{16};\frac{233+23\sqrt{65}}{32}\right)$$

b) Điều kiện: $y\ge -1$.

Ta viết lại phương trình (1) thành: $y^3 - x^6 + 2x^2\left(y - x^2\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(y - x^2\right)\left(y^2 + yx^2 + x^4 + 2x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = y = 0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy $x = y = 0$ không phải là nghiệm. Khi $y = x^2$ thay vào (2) ta được:

$$(x+2)\sqrt{x^2+1} = (x+1)^2 \Rightarrow (x+2)^2\left(x^2+1\right) = (x+1)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3}, y = 3 \\ x = -\sqrt{3}, y = 3 \end{array}\right.$$

(thỏa mãn). Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\pm\sqrt{3}; 3\right)$.

**Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14 - x\sqrt{3-2y}} + 1 \end{cases}$

**Giải**

a) Điều kiện: $x \ge -\dfrac{5}{4}$.

Ta thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ. chia hai vế của (1) cho $y^5$ ta được:

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^5 + \dfrac{x}{y} = y^5 + y$. Đặt $a = \dfrac{x}{y}$ ta có phương trình: $a^5 + a = y^5 + y$ suy ra

$(a-y)\left(a^4 + a^3y + a^2y^2 + ay^3 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow y = a \Leftrightarrow x = y^2$

$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$. Từ đó tính được $y = \pm 1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; \pm 1)$.

b) Điều kiện: $x \ge -2; y \le \dfrac{3}{2}$.Ta thấy khi $x = 0$ thì hệ không có nghiệm.

Chia phương trình (1) cho $x^2 \ne 0$:

$$(1) \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = (4-2y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \left(\sqrt{3-2y}\right)^3 + \sqrt{3-2y}.$$

Đặt $a=1-\frac{1}{x}, b=\sqrt{3-2y}$. Ta có $a^3+a=b^3+b \Rightarrow a=b \Leftrightarrow \sqrt{3-2y}=1-\frac{1}{x}$.

Thay vào (2) ta được:

$x+2-\sqrt[3]{15-x}=1 \Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{15-x} \Leftrightarrow x^3+3x^2+4x-14=0$.

$\Leftrightarrow x=7 \Rightarrow y=\frac{111}{98}$. Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(7;\frac{111}{98}\right)$.

**Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases}(17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-14)\sqrt{4-y}=0 & (1)\\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+11}=x^2+6x+13 & (2)\end{cases}$

b) $\begin{cases}x(x+y)+\sqrt{x+y}=\sqrt{2y}\left(\sqrt{2y^3}+1\right)\\ x^2y-5x^2+7(x+y)-4=6\sqrt[3]{xy-x+1}\end{cases}$

**Giải**

a) Điều kiện: $\begin{cases}x\le 5\\ y\le 4\\ 2x+y+5\ge 0\\ 3x+2y+11\ge 0\end{cases}$

Biến đổi phương trình (1) ta có: $\left[3(5-x)+2\right]\sqrt{5-x}=\left[3(4-y)+2\right]\sqrt{4-y}$

Đặt $a=\sqrt{5-x}, b=\sqrt{4-y}$ ta có"

$3a^3+2a=3b^3+2b \Leftrightarrow (a-b)\left(3a^2+3ab+3b^2+2\right)=0 \Leftrightarrow a=b$

$\Leftrightarrow \sqrt{5-x}=\sqrt{4-y} \Leftrightarrow y=x-1$

Thay vào (2) ta có: $x^2+6x+13=2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}$ (4)

Điều kiện xác định của phương trình (4) là: $x\ge -\frac{4}{3}$

$(4) \Leftrightarrow x^2+x+2\left(x+2-\sqrt{3x+4}\right)+3\left(x+3-\sqrt{5x+9}\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2+x+\dfrac{2\left(x^2+x\right)}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\dfrac{3\left(x^2+x\right)}{x+3+\sqrt{5x+9}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+x\right)\left(1+\dfrac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\dfrac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x=0 \\ 1+\dfrac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\dfrac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}}=0 \end{array}\right.$

(*) $x^2+x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=-1 \\ x=-1 \Rightarrow y=-2 \end{array}\right.$

Ta có $1+\dfrac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\dfrac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}}>0$ do điều kiện $x \ge -\dfrac{4}{3}$

Kết luận: $(x;y)=(0;-1),(-1;-2)$

b) Điều kiện: $y \ge 0, x+y \ge 0$.

Nhận thấy $y=0$ thì hệ vô nghiệm. Ta xét khi $y>0$

Từ phương trình (1) ta sử dụng phương pháp liên hợp:

PT(1) $\Leftrightarrow x^2+xy-2y^2=\sqrt{2y}-\sqrt{x+y} \Leftrightarrow (x-y)(x+2y)=\dfrac{-(x-y)}{\sqrt{2y}+\sqrt{x+y}}$

Rõ ràng $x+2y=x+y+y>0; \dfrac{-1}{\sqrt{2y}+\sqrt{x+y}}<0$ , từ đó suy ra $x=y$.

Thay vào (2) ta được: $x^3-5x^2+14x-4=6\sqrt[3]{x^2-x+1}$.

Biến đổi phương trình đã cho tương đương:

$x^3+3x^2+6x+4=8x^2-8x+8+3\sqrt[3]{8x^2-8x+8}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+3(x+1)=8x^2-8x+8+3\sqrt[3]{8x^2-8x+8}$.

Đặt $a=x+1, b=\sqrt[3]{8x^2-8x+8}$ suy ra

$a^3+3a=b^3+3b \Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+3\right)=0 \Leftrightarrow a=b$

$x+1=\sqrt[3]{8x^2-8x+8} \Leftrightarrow x=1; y=1$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

**KHI TRONG HỆ CÓ CHỨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 THEO ẨN x, HOẶC y**

Khi trong hệ phương trình có chứa phương trình bậc hai theo ẩn $x$ hoặc $y$ ta có thể nghỉ đến các hướng xử lý như sau:

* Nếu $\Delta$ chẵn, ta giải $x$ theo $y$ rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để giải tiếp
* Nếu $\Delta$ không chẵn ta thường xử lý theo cách:

+ Cộng hoặc trừ các phương trình của hệ để tạo được phương trình bậc hai có $\Delta$ chẵn hoặc tạo thành các hằng đẳng thức
+ Dùng điều kiện $\Delta \ge 0$ để tìm miền giá trị của biến $x, y$. Sau đó đánh giá phương trình còn lại trên miền giá trị $x, y$ vừa tìm được:

**Ta xét các ví dụ sau:**

**Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 \\ 4x^2-y^2+x+4=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y} \end{cases}$

**Giải**

Xét phương trình (1) của hệ ta có:

$xy+x+y=x^2-2y^2 \Leftrightarrow x^2-x(y+1)-2y^2-y=0$. Ta coi đây là phương trình bậc 2 của $x$ thì ta có: $\Delta=(y+1)^2+8y^2+4y=(3y+1)^2$. Từ đó suy ra

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{y+1-(3y+1)}{2}=-y \\ x=\dfrac{y+1+(3y+1)}{2}=2y+1 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $x=-y$. Từ phương trình $(2)$ của hệ ta có điều kiện: $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$ suy ra phương trình vô nghiệm

Trường hợp 2: $x = 2y + 1$ thay vào phương trình thứ hai ta có:

$(2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2y + 2 \Leftrightarrow y\sqrt{2y} + \sqrt{2y} = 2(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)\left(\sqrt{2y} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5$

Vậy hệ có một cặp nghiệm: $(x; y) = (5; 2)$

b) Xét phương trình (1) của hệ ta có:

$2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x(3-3y) + y^2 - 2y + 1 = 0$.

Coi đây là phương trình bậc 2 của $x$ ta có:

$\Delta = (3-3y)^2 - 8\left(y^2 - 2y + 1\right) = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3y-3-(y-1)}{4} = \dfrac{y-1}{2} \\ x = \dfrac{3y-3+(y-1)}{4} = y - 1 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $y = x + 1$ thay vào phương trình (2) ta thu được:

$3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4}$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x + (x + 1 - \sqrt{3x+1}) + (x + 2 - \sqrt{5x+4}) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - x\right)\left[3 + \dfrac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \dfrac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right] = 0$

Do $x \geq -\dfrac{1}{3}$ nên

$3 + \dfrac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \dfrac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}} > 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Trường hợp 2: $y = 2x + 1$ thay vào phương trình (2) ta thu được:

$3 - 3x = \sqrt{4x+1} + \sqrt{5x+4} \Leftrightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{5x+4} + 3x - 3 = 0$

Giải tương tự như trên ta được $x = 0$.

Kết luận: Hệ phương trình có 2 cặp nghiệm: $(x; y) = (0; 1), (1; 2)$

**Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} x + 3 = 2\sqrt{(3y-x)(y+1)} & (1) \\ \sqrt{3y-2} - \sqrt{\dfrac{x+5}{2}} = xy - 2y - 2 & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases}\sqrt{2y^2-7y+10-x\left(y+3\right)}+\sqrt{y+1}=x+1\\ \sqrt{y+1}+\dfrac{3}{x+1}=x+2y\end{cases}$

c) $\begin{cases}\sqrt{4x-y}-\sqrt{3y-4x}=1\\ 2\sqrt{3y-4x}+y(5x-y)=x(4x+y)-1\end{cases}$

**Giải**

Điều kiện: $y\geq\dfrac{2}{3};x\geq-3;3y\geq x$.

Phương trình (1) tương đương $(x+3)^2=4(y+1)(3y-x)$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9=12y^2+12y-4xy-4x\Leftrightarrow x^2+2x(5+2y)-12y^2-12y+9=0$

Coi đây là phương trình bậc 2 của $x$ ta có:

$\Delta'=(2y+5)^2+12y^2+12y-9=\left(4y+4\right)^2$

suy ra $\left[\begin{array}{l}x=-5-2y-(4y+4)=-6y-9\\ x=-5-2y+(4y+4)=2y-1\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $x=-6y-9$.

Do $x\geq-3\Rightarrow-6y-9\geq-3\Leftrightarrow y\leq-1$ suy ra phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $x=2y-1$ thay vào phương trình 2 của hệ ta có:

$\sqrt{3y-2}-\sqrt{y+2}=2y^2-3y-2\Leftrightarrow\dfrac{2\left(y-2\right)}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}}=\left(2y+1\right)\left(y-2\right)$

Ta có: $\dfrac{2}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}}\leq\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}};2y+1\geq\dfrac{7}{3}$.

Nghĩa là $VP>VT$, suy ra $y=2\Rightarrow x=1$.

Vậy hệ có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(1;2\right)$.

b) Điều kiện: $\begin{cases}x+1\neq0\\ y+1\geq0\\ 2y^2-7y+10-x\left(y+3\right)\geq0\end{cases}$.

Từ phương trình dễ thấy để phương trình có nghiệm thì: $x+1\geq0\Leftrightarrow x\geq-1$.

Ta viết phương trình thứ nhất dưới dạng:

$\sqrt{2y^2-7y+10-x(y+3)}=x+1-\sqrt{y+1}$.

Để bình phương được ta cần điều kiện: $x+1\geq\sqrt{y+1}\Leftrightarrow x^2+x\geq y$.

Ta bình phương hai vế được:

$2y^2-8y+8-x(y+3)=x^2+2x-2(x+1)\sqrt{y+1}$ (1).

Ta đưa phương trình (2) về dạng: $(x+1)\sqrt{y+1}=x^2+x+2xy+2y-3$ (2).

Thế (2) vào (1) ta được:

$2y^2-8y+8-x(y+3)=x^2+2x-2(x^2+x+2xy+2y-3)$

$\Leftrightarrow 2y^2-4y+2+3xy+x^2-3x=0$

$\Leftrightarrow x^2+3x(y-1)+2(y-1)^2=0\Leftrightarrow(x+y-1)(x+2y-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y-1=0\\x+2y-2=0\end{array}\right.$

.

* Với $x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$, ta có thêm $x\leq 2$ thay vào phương trình (2) ta có: $(x+1)\sqrt{2-x}=-1+x-x^2\Leftrightarrow x^2-x+1+(x+1)\sqrt{2-x}=0$.

Vì $-1\leq x\leq 2$, ta dễ thấy: $VT>0$, nên suy ra phương trình vô nghiệm.

* Với $x+2y-2=0\Leftrightarrow y=\dfrac{2-x}{2}$, thay vào phương trình (2) ta được:

$\sqrt{\dfrac{4-x}{2}}+\dfrac{3}{x+1}=2$. Đặt $u=x+1$ khi đó ta thu được phương trình:

$\sqrt{\dfrac{5-u}{2}}=2-\dfrac{3}{u}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3+3u^2-24u+18=0\\u\geq\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow u=3\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=0$.

Hệ có một cặp nghiệm duy nhất: $x=2; y=0$

c). Điều kiện $\dfrac{y}{4}\leq x\leq\dfrac{3y}{4}$.

Ta viết phương trình (1) thành: $\sqrt{4x-y}=1+\sqrt{3y-4x}$. Bình phương 2 vế ta thu được: $2\sqrt{3y-4x}=8x-4y-1$. Thay vào phương trình $(2)$ của hệ ta có:

$4x^2-4x(y+2)+y^2+4y=0$. Ta coi đây là phương trình bậc 2 của $x$ thì

$\Delta'=4\left(y+2\right)^2-4(y^2+y)=16$ suy ra $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2(y+2)-4}{4}=\dfrac{y}{2} \\ x=\dfrac{2(y+2)+4}{4}=\dfrac{y+4}{2} \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $y=2x$ thay vào phương trình (1) ta có: $\sqrt{2x}=-12$ vô nghiệm

Trường hợp 2: $y=2x-4$ thay vào phương trình (1) ta thu được:

$2\sqrt{2x-12}=15 \Leftrightarrow x=\dfrac{273}{8}, y=\dfrac{257}{4}$

Vậy hệ phương trình có 1 cặp nghiệm: $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{273}{8};\dfrac{257}{4}\right)$

**PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ**

Để giải được hệ phương trình bằng phương pháp đánh giá ta cần nắm chắc các bất đẳng thức cơ bản như: Cauchy, Bunhicopxki, các phép biến đổi trung gian giữa các bất đẳng thức, qua đó để đánh giá tìm ra quan hệ $x, y$

Ngoài ra ta cũng có thể dùng hàm số để tìm GTLN, GTNN từ đó có hướng đánh giá, so sánh phù hợp.

**Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x\left(1-2x\right)}+\sqrt{y\left(1-2y\right)}=\dfrac{2}{9} \end{cases}$ b)

$\begin{cases} x\left(x^2-y^2\right)+x^2=2\sqrt{\left(x-y^2\right)^3} \\ 76x^2-20y^2+2=\sqrt[3]{4x\left(8x+1\right)} \end{cases}$.

**Giải**

a) Điều kiện: $0\le x,y\le\dfrac{1}{2}$.

Đặt $a=\sqrt{2}x, b=\sqrt{2}y; a,b\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Ta có: $VT=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\le\sqrt{2\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\right)}$.

Ta sử dụng bổ đề với $a,b>0$ và $ab\le 1$ ta có bất đẳng thức:

$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{2}{1+ab}\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)}\le 0$ (đúng).

Vậy $VT\le\frac{2}{\sqrt{1+ab}}=VP$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y$. Thay vào(2) ta tìm được nghiệm của phương trình.

Nghiệm của hệ $(x;y)=\left(\frac{9-\sqrt{73}}{36};\frac{9-\sqrt{73}}{36}\right),\left(\frac{9+\sqrt{73}}{36};\frac{9+\sqrt{73}}{36}\right)$.

b) Điều kiện: $x\ge y^2\ge 0$.

Phương trình (1) tương đương: $x^3+x(x-y^2)-2\sqrt{(x-y^2)^3}=0$.

Đặt $\sqrt{x-y^2}=u$ phương trình (1) thành:

$x^3+xu^2-2u^3=0\Leftrightarrow x=u\Leftrightarrow y^2=x-x^2$ .

Thay vào (2) ta được: $96x^2-20x+2=\sqrt[3]{32x^2+4x}$.

Ta có $96x^2-20x+2=\sqrt[3]{32x^2+4x}=\sqrt[3]{1.1.(32x^2+4x)}\le\frac{32x^2+4x+2}{3}$

$\Leftrightarrow 3(96x^2-20x+2)\le 32x^2+4x+2\Leftrightarrow(16x-2)^2\le 0\Leftrightarrow x=\frac{1}{8}\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{7}}{8}$

.

Từ đó ta có các nghiệm của hệ là: Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{1}{8};\pm\frac{\sqrt{7}}{8}\right)$.

**Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y\,(1) \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x\,(2) \end{cases}$ với $x,y\ge 0$

b) $\begin{cases} 3x+10\sqrt{xy}-y=12 \\ x+\dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\le 3 \end{cases}$.

**Giải**

a) Hiển nhiên $x=y=0$ là một nghiệm của hệ. Ta xét $x\ne 0$ và $y\ne 0$.

Cộng theo vế hai phương trình trong hệ ta được

$2xy\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}}\right)=x^2+y^2$. Chú ý rằng

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}\le\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}}\le\dfrac{1}{2}$.

Với $xy>0$ ta có $2xy\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}}\right)\le 2xy\le x^2+y^2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$. Với $xy<0$. Khả năng này không thể xảy ra. Thật vậy, không làm mất tính tổng quát giả sử $x<0, y>0$ thì rõ ràng đẳng thức (1) không thể xảy ra. Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y)$ là $(0;0),(1;1)$.

b) Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có :

$\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}\Rightarrow 12=3x+10\sqrt{xy}-y\le 3x+5x+5y-y=8x+4y\Rightarrow 2x+y\ge 3$

Ta sẽ chứng minh:

$$x+\frac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\ge 2x+y$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}\ge \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+x+y\ (\star).$$

Ta có: $x+y\le\sqrt{2(x^2+y^2)}$ Để chứng minh $(\star)$ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là: $\dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}\ge 2\sqrt{2(x^2+y^2)}$ (1)

Mặt khác ta cũng có: $xy\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$ nên $(1)$ sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được:

$$\frac{6(x^3+y^3)}{x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2}}\ge 2\sqrt{2(x^2+y^2)}\Leftrightarrow 2(x^3+y^3)\ge (x^2+y^2)\sqrt{2(x^2+y^2)}$$

$$\Leftrightarrow x^6+y^6+4x^3y^3-3x^2y^2(x^2+y^2)\ge 0\ (2)$$

Vì y > 0 chia hai vế cho $y^6$ đặt $t=\dfrac{x}{y}>0$ bất đẳng thức $(2)$ trở thành.

$$t^6-3t^4+4t^3-3t^2+1\ge 0$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do:

$$t^6-3t^4+4t^3-3t^2+1=(t-1)^2(t^4+2t^3+2t+1)$$

$$\Rightarrow x+\frac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\ge 3$$

Kết hợp tất cả các vấn đề vừa chỉ ra ta thấy chỉ có bộ số $x,y$ thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}x,y>0\\2x+y=3\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$ là nghiệm của hệ

**Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases}9\sqrt{\dfrac{41}{2}\left(x^2+\dfrac{1}{2x+y}\right)}=3+40x\\x^2+5xy+6y=4y^2+9x+9\end{cases}$ với $x,y>0$

b) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}=x+y \\ x\sqrt{2xy+5x+3}=4xy-5x-3 \end{cases}$

**Giải**

a) Phương trình (1) tương đương: $\sqrt{82\left(x^2+\dfrac{1}{2x+y}\right)}=\dfrac{6+80x}{9}$.

Ta có:

$$VT=\sqrt{\left(1^2+9^2\right)\left(x^2+\frac{1}{2x+y}\right)}\geq\left|9x+\frac{1}{\sqrt{2x+y}}\right|\geq 9x+\frac{3}{\sqrt{9(2x+y)}}\geq 9x+\frac{6}{2x+y+9}$$

$\Rightarrow \dfrac{6+80x}{9}\geq\dfrac{6}{2x+y+9}\Leftrightarrow 3x-2x^2-xy+6y\geq 0$ (*)

Lấy (*) cộng với PT(2) ta được:

$-x^2+4xy-4y^2+12y-6x-9\geq 0\Leftrightarrow -(x-2y+3)^2\geq 0\Leftrightarrow x+3=2y$.

Để dấu bằng xảy ra thì $x=y=3$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(3;3)$.

b) Ta có

$$\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{(x+y)^2}{4}+\frac{(x-y)^2}{4}\geq\frac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\geq\frac{|x+y|}{2}$$

$$\frac{x^2+xy+y^2}{3}=\frac{(x+y)^2}{4}+\frac{(x-y)^2}{12}\geq\frac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}\geq\frac{|x+y|}{2}$$

Từ đó suy ra $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}\geq|x+y|\geq x+y$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y\geq 0$

Thay $x=y$ vào phương trình còn lại ta có: $x\sqrt{2x^2+5x+3}=4x^2-5x-3$

Để ý rằng $x=0$ không phải là nghiệm. Ta xét $x>0$, chia phương trình cho $x^2$ thì thu được: $\sqrt{2+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}=4-\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$. Đặt $t=\sqrt{2+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}>0$ ta có phương trình:

$$t^2+t-6=0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow 2+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}=4 \Leftrightarrow \frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}-2=0 \Leftrightarrow x=3$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;3)$

**Ví dụ 4: Giải các hệ phương trình sau**

a) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}-y^2+3=0\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}+6y-24=0\end{cases}$

b) $\begin{cases}\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} & (1)\\ (x+1)\left[y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right]=4 & (2)\end{cases}$

**Giải**

a) Điều kiện: $\begin{cases}0\le x\le 32\\ y\le 4\end{cases}$

Cộng hai phương trình vế theo vế ta có:

$\sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}=y^2-6y+21$ (*)

Ta có: $y^2-6y+21=(y-3)^2+12\ge 12$.

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$\sqrt{x}+\sqrt{32-x}\le\sqrt{(1+1)(x+32-x)}=8$

$\Rightarrow \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\le\sqrt{(1+1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{32-x}\right)}=4$

Vậy $\sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\le 12$. Từ đó suy ra hệ có nghiệm khi và chỉ khi $x,y$ phải thỏa mãn: $\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{32-x}\\ \sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{32-x}\\ y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=16\\ y=3\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x;y)=(16;3)$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ xy + (x-y)\left(\sqrt{xy} - 2\right) \geq 0 \end{cases}$

Chuyển vế và bình phương ở phương trình thứ nhất của hệ ta thu được:

$xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2) = (y + \sqrt{y} - \sqrt{x})^2$

$\Leftrightarrow (x-y)(y + \sqrt{xy} - 2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(2y + \sqrt{y} - \sqrt{x}) = 0 \quad (3)$

Từ phương trình (1) của hệ ta có

$2y + \sqrt{y} - \sqrt{x} = y + \sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} \geq 0$.

Từ phương trình (2) ta có:

$(x+1)(y + \sqrt{xy}) = x^3 - x + 4 = (x+2)(x-1)^2 + 2(x+1) \geq 2(x+1) \Rightarrow y + \sqrt{xy} \geq 2$

Kết hợp với (3) ta suy ra $x = y$

Thay vào phương trình (2) ta có:

$(x+1)\left[2x + x(1-x)\right] = 4 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 1$

Nhận xét: Việc nhìn ra được quan hệ $x = y$ là chìa khóa để giải quyết bài toán. Đây là kỹ năng đặc biệt quan trọng khi giải hệ bằng phương pháp đánh giá cũng như chứng minh bất đẳng thức.

**MỘT SỐ BÀI TẬP RÈN LUYỆN PHẦN HỆ PHƯƠNG TRÌNH**

**1)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ (x-1)^3 + y^3 = 1 \end{cases}$ ( Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2008) .

**2)** $\begin{cases} 2x^2y - y^2x = 1 \\ 8x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$ ( Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2008) .

**3)** $\begin{cases} x^2 - y^2 + xy = 1 \\ 3x + y = y^2 + 3 \end{cases}$ ( Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2009) .



hoc360.net

**4)** $\begin{cases} 3x^2+8y^2+12xy=23 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ ( Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2010) .

**5)** $\begin{cases} 5x^2+2y^2+2xy=26 \\ 3x+(2x-y)(x-y)=11 \end{cases}$ ( Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2010) .

**6)** $\begin{cases} x^2+y^2=2x^2y^2 \\ (x+y)(1+xy)=4x^2y^2 \end{cases}$ ( Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2011) .

**7)** $\begin{cases} x^2+y^2+2y=4 \\ 2x+y+xy=4 \end{cases}$ ( Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2012) .

**8)** $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x^2+xy+2y^2=4 \end{cases}$ ( Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2014) .

**9)** $\begin{cases} 2x^2-3y^2+xy=12 \\ 6x+x^2y=12+6y+y^2x \end{cases}$ ( Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2014) .

**10)** $\begin{cases} 2x+3y=5xy \\ 4x^2+y^2=5xy^2 \end{cases}$ ( Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2015) .

**11)** $\begin{cases} 2x+2y+xy=5 \\ 27(x+y)+y^3+7=26x^3+27x^2+9x \end{cases}$ ( Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2015) .

**12)** $\begin{cases} x(4y+1)-2y=-3 \\ x^2(x^2-12y)+4y^2=9 \end{cases}$. ( Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Amsterdam và Chu Văn An năm 2014)

**13)** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{(y+1)^2}+\dfrac{y^2}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{2} \\ 3xy=x+y+1 \end{cases}$ ( Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2014)

**14)** $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}=4-x-y \\ \sqrt[3]{x+6}+\sqrt{2y=2} \end{cases}$ ( Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2014)

**15)** $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2-5(2x-y)=0 \\ x^2-2xy-3y^2+15=0 \end{cases}$ ( Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Thái Bình 2014) .

**16)** $\begin{cases} xy(3x+y)=4 \\ 7x^3+11=3(x+y)(x+y+1) \end{cases}$

**17)** $\begin{cases} x^2+y^2=2x^2y^2 \\ y+8x^2y+3x=5x^2+7xy \end{cases}$

**18)** $\begin{cases} x^2-xy+y^2=1 \\ 2y^3=x+y \end{cases}$

**19)** $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=15 \\ y+y^4=x \end{cases}$

**20)** $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=2 \\ (x+y)(x^4+y^4+x^2y^2-2)=2x^5 \end{cases}$

**21)** $\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ (x+y)^3=x \end{cases}$

**22)** $\begin{cases} (xy+1)(x^2y^2+1)=15y^3 \\ y^3+1=xy^4 \end{cases}$

**23)** $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^4+y^4+6x^2y^2+8xy=16 \end{cases}$

**24)** $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ 27x^3+6y^2x=2+y^3+30x^2y \end{cases}$

**25)** $\begin{cases} 4x^2+y^2=5 \\ \dfrac{15x^3}{y}+\dfrac{y^3}{x}+12xy=40 \end{cases}$

**26)** $\begin{cases} x(x+2y)=8 \\ \dfrac{1}{(x+y)^2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{2}{(x+y)^3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{1}{16} \end{cases}$

**27)** $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ \dfrac{1-x^2}{(1+xy)^2-(x+y)^2}-y^2=1 \end{cases}$

**28)** $\begin{cases} (x-4)\sqrt{y-3}+(y-1)\sqrt{x-2}=7\sqrt{6} \\ 12x\sqrt{y-4}+4\sqrt{2y}\sqrt{x-2}=5xy \end{cases}$

**29)** $\begin{cases} \dfrac{8xy}{x^2+y^2+6xy}+\dfrac{17}{8}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{21}{4} \\ \sqrt{x-16}+\sqrt{y-9}=7 \end{cases}$

**30)** $\begin{cases} \sqrt{x-3}+\sqrt{13-y}=2\sqrt{5} \\ \sqrt{y-3}+\sqrt{13-z}=2\sqrt{5} \\ \sqrt{z-3}+\sqrt{13-x}=2\sqrt{5} \end{cases}$

**31)** $\begin{cases} x^3+7y=(x+y)^2+x^2y+7x+4 \\ 3x^2+y^2+8y+4=8x \end{cases}$

**32)** $\begin{cases} 3\sqrt{x+2y}+\sqrt{3-x-y}=5 \\ 2\sqrt{3-x-y}-\sqrt{2x+3y+4}=2 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

**33)** $\begin{cases} (x-2)(2y-1)=x^3+20y-28 \\ 2\left(\sqrt{x+2y}+y\right)=x^2+x \end{cases}$

**34)** $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-16}=2+\sqrt{y-3x} \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$

**35)** $\begin{cases} 3y\left(9y^2+1\right)=\left(x-2y+1\right)\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases}$

**36)** $\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{9x}{5} \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3x+5}{30-6y} \end{cases}$

**37)** $\begin{cases} (x+3)\sqrt{y^2+8y+20}+(y+4)\sqrt{x^2+6x+10}=0 \\ 4(x+5)^2+6y+11=3\sqrt[3]{2y+5} \end{cases}$

**38)** $\begin{cases} 2x^3+xy^2+x^2-2y=4 \\ 2x^2+xy+2y^2+2y=4 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$

**39)** $\begin{cases} 2y(x+3)(2y+3)=x^2y^2+12xy^2+11y+8 \\ y\sqrt{6x}=\sqrt{13y^2+y+1} \end{cases}$

**40)** $\begin{cases} 2x^3-x^2y^2=4 \\ y^3-2xy+\dfrac{2x^2}{y}=2 \end{cases}$

**41)** $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x=2 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}=-2 \end{cases}$

**42)** $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3\left(2-y\right)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 \end{cases}$

**43)** $\begin{cases} \left(2x^2-1\right)\left(2y^2-1\right)=\dfrac{7}{2}xy \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 \end{cases}$

**44)** $\begin{cases} 16x^3+24x^2+14x+3=(2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt[4]{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6 \end{cases}$

**45)** $\begin{cases} \sqrt{13x+4y}+2=\sqrt{2x+y}-5 \\ \sqrt{2x+y}+x-2y=2 \end{cases}$

**46)** $\begin{cases} 8x^3y^3+27=18y^3 \\ 4x^2y+6x=y^2 \end{cases}$

**47)** $\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 \\ \sqrt[3]{x+2}+2\sqrt{y+2}=5 \end{cases}$

**48)** $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \\ y+\dfrac{y}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12} \end{cases}$

**49)** $\begin{cases} (xy+3)^2+(x+y)^2=8 \\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$

**50)** $\begin{cases} x^4-x^3+3x^2-4y-1=0 \\ \sqrt{\dfrac{x^2+4y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+2xy+4y^2}{3}}=x+2y \end{cases}$

**51)** $\begin{cases} x^3-12z^2+48z-64=0 \\ y^3-12x^2+48x-64=0 \\ x^3-12y^2+48y-64=0 \end{cases}$

**52)** $\begin{cases} x^2+2+(y^2-y-1)\sqrt{x^2+2}-y^3+y=0 \\ 2x+xy+2+(x+2)\sqrt{y^2+4x+4}=0 \end{cases}$

**53)** $\begin{cases} \sqrt{3x+y}+\sqrt{2x+7}=10 \\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x+y}}\right)=2 \end{cases}$

**54)** $\begin{cases} 2y^3-(x+4)y^2+8y+x^2-4x=0 \\ \sqrt{\dfrac{1-x}{2}}+\sqrt{x+2y+3}=4(x-1)^2+8y-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

**55)** $\begin{cases} (x-y)\left(x+y+y^2\right)=x(y+1) \\ 3\sqrt{x^3+4x}=y^2+4y+7 \end{cases}$

**56)** $\begin{cases} 2y^3-(x-4)y^2+4y-x^2-2x=0 \\ 3\left(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{4(x-y+1)}\right)=(x+1)^2-8\left(y-1\right) \end{cases}$

**57)** $\begin{cases} 8(x^2+y^2)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2}=13 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1 \end{cases}$

**58)** $\begin{cases} x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{2-x^2}=2 \\ (x+y)^3-12(x-1)(y-1)+\sqrt{xy}=9 \end{cases}$

**59)** $\begin{cases} x^3+y^3+7\left(x+y\right)xy=8xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \\ \sqrt{y}-\sqrt{2x-3}=6-2x \end{cases}$

**HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**1)** Ta viết lại hệ phương trình thành: $\begin{cases} \left(x-1\right)^2+y^2=1 \\ \left(x-1\right)^3+y^3=1 \end{cases}$ đặt $a=x-1$ ta có hệ mới $\begin{cases} a^2+y^2=1 \\ a^3+y^3=1 \end{cases}$. Suy ra $-1\le a,y\le 1$. Mặt khác ta cũng có: $a^3=1-y^3=\left(1-y\right)\left(1+y+y^2\right)\ge 0\Rightarrow 0\le a\le 1$. Tương tự ta cũng có $0\le y\le 1\Rightarrow \begin{cases} a^2\ge a^3 \\ y^2\ge y^3 \end{cases}\Rightarrow a^2+y^2\ge a^3+y^3=1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=1,y=0$ hoặc $a=0,y=1$. Từ đó suy ra các nghiệm của hệ là: $\left(x;y\right)=\left(1;1\right),\left(2;0\right)$.

**2)** Hệ phương trình có dạng gần đối xứng từ hệ ta suy ra
$8x^3-y^3=7\left(2x^2y-y^2x\right)\Leftrightarrow 8x^3-14x^2y+7xy^2-y^3=0\Leftrightarrow (x-y)(4x-y)(2x-y)=$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=x \\ y=2x \\ y=4x \end{array}\right.$ thay vào một phương trình ta tìm được nghiêm là:

$(x;y)=(1;1),\left(-\frac{1}{2};-2\right)$

Ta có thể giải nhanh hơn như sau: Lấy phương trình (2) trừ 6 lần phương trình (1) thì thu được: $(2x-y)^3=1\Rightarrow 2x-y=1\Leftrightarrow y=2x-1$.

**3)** Từ hệ phương trình suy ra $\begin{cases} x^2-1+xy=y^2 \\ 3x+y-3=y^2 \end{cases}\Rightarrow x^2-1+xy=3x+y-3\Leftrightarrow x^2+(y-3)x-y+2=0$. Đây là phương trình bậc 2 của $x$ có $\Delta=y^2-6y+9-4(-y+2)=(y-1)^2$ từ đó tính được $x=1$ hoặc $x=2-y$ thay vào ta tìm được các nghiệm là $(x;y)=(1;0),(1;1),(5;-3)$

Chú ý ta có thể giải cách khác:
$x^2-1+xy=3x+y-3\Leftrightarrow y(x-1)+x^2-3x+2=0\Leftrightarrow (x-1)(y+x-2)=0$.

**4)** Nhận xét: Có thể đưa hệ về dạng đẳng cấp:Từ hệ ta suy ra
$2\left(3x^2+8y^2+12xy\right)=23\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow 17x^2-24xy+7y^2=0\Leftrightarrow (x-y)(17x-7y)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=y \\ x=\frac{7}{17}y \end{array}\right.$. Giải hệ với 2 trường hợp ta suy ra

$(x;y)=(1;1),(-1;-1),\left(\frac{7}{13};\frac{17}{13}\right),\left(-\frac{7}{13};-\frac{17}{13}\right)$.

Cách khác: Cộng hai phương trình của hệ ta thu được:

$(2x+3y)^2=25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x+3y=5\\2x+3y=-5\end{array}\right.$ rồi thay vào để giải như trên.

**5)** Ta viết lại hệ đã cho thành: $\begin{cases}5x^2+2y^2+2xy=26\\3x+2x^2-xy-y^2=11\end{cases}$

Nhân hai vế của phương trình: (2) với 2 rồi cộng với phương trình (1) ta được: $9x^2+6x=48 \Leftrightarrow (3x+1)^2=48 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\frac{8}{3}\end{array}\right.$ thay vào ta tìm được $y=1$ hoặc $y=-3$.

Cách khác: Ta viêt lại hệ thành:

$\begin{cases}(2x+y)^2+(x-y)^2=26\\(2x+y)+(x-y)+(2x+y)(x-y)=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=26\\a+b+ab=11\end{cases}$ đây là hệ đối xứng loại 1.

**6)** Nhận xét $x=y=0$ là nghiệm của hệ. Xét $x,y\neq 0$. Ta chia 2 phương trình cho $x^2y^2$

$\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2\\\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(2+\frac{2}{xy}\right)=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2-\frac{2}{xy}=2\\\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(2+\frac{2}{xy}\right)=8\end{cases}$. Đặt

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=a;\left(2+\frac{2}{xy}\right)=b$ thu được $\begin{cases}ab=8\\a^2-b=0\end{cases} \Rightarrow a^3=8 \Rightarrow a=2;b=4$. Từ đó tìm được nghiệm là $(x;y)=(1;1)$.

**7)** Ta viết lại hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} x^2+(y+1)^2=5 \\ x+x(y+1)+y+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=5 \\ a+b+ab=5 \end{cases}$$ đây là hệ đối

Xứng loại 1, ta dễ tìm được $a=2,b=1$ hoặc $a=1,b=2$. Từ đó giải được $x=y=1$ hoặc $x=2;y=0$.

Cách khác: Ta viết lại hệ thành:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y=4 \\ 4x+2y+2xy=8 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+2xy+4(x+y)=12 \Leftrightarrow (x+y)^2+4(x+y)-12=0$$

.

**8)** Từ hệ ta suy ra

$$x^2+xy+2y^2=4(x^2+y^2-xy) \Leftrightarrow 3x^2-5xy+2y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)(3x-2y)=0$$

.

Giải hệ ứng với 2 trường hợp ta có: $x=y=1; x=y=-1$,

$x=\frac{2\sqrt{7}}{7}; y=\frac{3\sqrt{7}}{7}; x=-\frac{2\sqrt{7}}{7}; y=-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

**9)** Ta viết hệ đã cho thành:

$$\begin{cases} (x-y)(2x+3y)=12 \\ (x-y)(xy+6)=12 \end{cases} \Rightarrow (x-y)(2x+3y)=(x-y)(xy+6)$$

$(x-y)(2x+3y-6-xy)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x-3)(y-2)=0$. Giải 3 trường hợp ta thu được: $(x;y)=(3;-1),(3;2),(-4;2)$.

**10)** Từ hệ ta suy ra

$$\begin{cases} 2xy+3y^2=5xy^2 \\ 4x^2+y^2=5xy^2 \end{cases} \Leftrightarrow 2xy+3y^2=4x^2+y^2 \Leftrightarrow 4x^2-2xy-2y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)(4x+2y)$$

. Giải 2 trường hợp ta thu được $(x;y)=(0;0),(1;1),\left(\frac{2}{5};-\frac{4}{5}\right)$.

**11)** Ta viết lại hệ đã cho thành: $\begin{cases}(x+2)(y+2)=9\\ 27(x+y)+y^3+x^3+8=(3x+1)^3\end{cases}$

Chú ý rằng: $27(x+y)=3(x+2)(y+2)$ suy ra

$27(x+y)+y^3+x^3+8=(3x+1)^3 \Leftrightarrow x^3+y^3+3(x+2)(y+2)(x+y)+8=(3x+1)^3$

$\Leftrightarrow (x+y+2)^3=(3x+1)^3 \Leftrightarrow x+y+2=3x+1 \Leftrightarrow y=2x-1$ thay vào ta tìm được: $(x;y)=(1;1),\left(-\frac{7}{2};-8\right)$.

**12)** Hệ đã cho tương đương với:

$\begin{cases}x^2(4y+1)=2y-3\\ x^2(x^2-12y)=9-4y^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2(4y+1)(2y+3)=4y^2-9\\ x^2(x^2-12y)=9-4y^2\end{cases}$

Cộng theo vế hai phương trình ta được: $x^2(x^2+8y^2+2y+3)=0$

$\Leftrightarrow x^2\left[x^2+7y^2+(y+1)^2+2\right]=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{3}{2}$ (tm)

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Điều kiện: $x\neq -1; y\neq -1$.

**13)** Hệ phương tình đã cho tương đương: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{(y+1)^2}+\dfrac{y^2}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{x}{y+1}.\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

Đặt $u=\dfrac{x}{y+1};v=\dfrac{y}{x+1}$, hệ thành: $\begin{cases}u^2+v^2=\dfrac{1}{2}\\ uv=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2+2uv=1\\ u^2+v^2-2uv=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)^2=1\\ (u-v)^2=0\end{cases}$

Suy ra $u=v=\dfrac{1}{2}$ hoặc $u=v=-\dfrac{1}{2}$. Nếu $u=v=\dfrac{1}{2}$ thì $x=y=1$ (tm). Nếu $u=v=-\dfrac{1}{2}$ thì $x=y=-\dfrac{1}{3}$ (tm).

**14)** Điều kiện $\begin{cases}x+2y\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$. Đặt $t=\sqrt{x+2y}\ge 0$ từ phương trình $(1)$ suy ra $t^2+3t-4=0\Rightarrow t=1\Rightarrow x+2y=1$ thay vào phương trình $(2)$ ta có: $\sqrt[3]{8-4y}+\sqrt{2y}=2$. Đặt $\sqrt{2y}=a\ge 0\Rightarrow 2y=a^2$. Thay vào phương trình ta có: $\sqrt[3]{8-2a^2}=2-a\Leftrightarrow a^3-8a^2+12a=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=2\\ a=6\end{array}\right.$. Từ đó tìm được các nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;0),(-3;2),(-35;18)$

**15)** Phương trình (1) của hệ có thể viết lại như sau:

$(2x-y)(x+2y-5)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=2x\\ x=5-2y\end{array}\right.$

Thay vào phương trình (2) của hệ ta tìm được các nghiệm là $(x;y)=(1;2),(-1;-2),(-3;4)$.

**16)** Từ phương trình ( 2) ta có:

$$7x^3+3xy(3x+y)=1+3(x+y)(x+y+1)$$

Hay $7x^3+3xy(4x+2y-x-y)=1+3(x+y)(x+y+1)$

Hay $8x^3+y^3+6xy(2x+y)=x^3+y^3+3xy(x+y)+3(x+y+1)(x+y)+1$

Hay $(2x+y)^3=(x+y+1)^3 \Rightarrow 2x+y=x+y+1 \Rightarrow x=1$. Thay vào phương trình đầu tìm được nghiệm của hệ là: $(x;y)=(1;1),(1;-4)$.

**17)** Dễ thấy hệ có nghiệm $(0;0)$.

Nếu $x,y\neq(0;0)$ hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{xy}-\dfrac{7}{x}-\dfrac{5}{y}=-8\end{cases}$.

Đặt $\dfrac{1}{x}=u;\dfrac{1}{y}=v$ và cộng hai phương trình của hệ ta thu được:

$$\begin{cases}u^2+v^2=2\\ u^2+3uv-7u+5v=-8\end{cases}$$

$\Rightarrow 2u^2+v^2+3uv-7u+5v+6=0 \Leftrightarrow (u+v-2)(2u+v-3)=0$ .Ta được:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u+v=2\\ u^2+v^2=2\end{cases}\\ \begin{cases}2u+v=3\\ u^2+v^2=2\end{cases}\end{array}\right.$$

**18)**

Ta có:

$2y^3=(x+y).1=(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3 \Rightarrow y^3=x^3 \Leftrightarrow x=y$ .Hệ tương đương với $\begin{cases}x=y\\ x^2-xy+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=1\\ x=y=-1\end{array}\right.$.



hoc360.net

**19)** Hệ tương đương:

$$\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=15\\15(x-y)=15y^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=15\\(x+y)(x^2+y^2)(x-y)=15y^4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=15\\x^4-y^4=15y^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=15\\x=\pm 2\end{cases}$$

$$+)\begin{cases}x=2y\\(x+y)(x^2+y^2)=15\end{cases}\Rightarrow 15y^3=15\Leftrightarrow y=1;x=2$$

$$+)\begin{cases}x=-2y\\(x+y)(x^2+y^2)=15\end{cases}\Rightarrow -5y^3=15\Leftrightarrow y=-\sqrt[3]{3};x=2\sqrt[3]{3}$$

Vậy nghiệm của hệ: $x=2;y=1$ , $x=2\sqrt[3]{3};y=-\sqrt[3]{3}$.

**20)** Ta có: $2x^5=(x+y)\left(x^4+y^4+x^2y^2-xy(x^2+y^2)\right)=x^5+y^5\Leftrightarrow x=y$

Ta thu được hệ tương đương: $\begin{cases}x=y\\xy(x^2+y^2)=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1\\x=y=-1\end{array}\right.$.

**21)** Hệ đã cho tương đương: $\begin{cases}(x+y)^2+(x-y)^2-(x+y)(x-y)=1\\2(x+y)^3=(x+y)+(x-y)\end{cases}$

Đặt $u=x+y;v=x-y$, sau đó giải như bài 18.

**22)** Nếu $y=0$ suy ra $1=0$ (loại)

Chia cả hai vế cho $y^3\neq 0, y^4\neq 0$ ta được:

$\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)=15\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^4}=x\end{cases}$. Đặt $\dfrac{1}{y}=t$ ta được: $\begin{cases}(x+t)(x^2+t^2)=15\\ t+t^4=x\end{cases}$, sau đó giải như bài 19

**23)** Ta có: $16=x^4+y^4+4xy\left(x^2+y^2\right)+6x^2y^2=(x+y)^4\Rightarrow x+y=\pm 2$

+) $\begin{cases}x+y=2\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Rightarrow x^2+(2-x)^2=2\Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

+) $\begin{cases}x+y=-2\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Rightarrow x^2+(x+2)^2=2\Leftrightarrow 2x^2+4x+2=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ có 2 cặp nghiệm là $(1;1),(-1;-1)$.

**24)** Ta có: PT 2 $\Leftrightarrow 27x^3-y^3-27x^2y+9y^2x=x^3+y^3+3y^2x+3x^2y$

$\Leftrightarrow (3x-y)^3=(x+y)^3\Leftrightarrow x=y$. Hệ đã cho tương đương:

$\begin{cases}x^3+y^3=2\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

**25)** Ta có: PT 2 $\Leftrightarrow 15x^4+y^4+12x^2y^2=40xy=8xy\left(4x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow 16x^4+y^4-8xy\left(4x^2+y^2\right)+12x^2y^2=x^4$

$\Leftrightarrow (2x-y)^4=x^4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-y=x\\ 2x-y=-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ 3x=y\end{array}\right.$

+) $\begin{cases}4x^2+y^2=5\\ x=y\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1\\ x=y=-1\end{array}\right.$.

+) $\begin{cases}4x^2+y^2=5\\3x=y\end{cases}\Rightarrow 4x^2+9x^2=5\Leftrightarrow x^2=\dfrac{5}{13}\Rightarrow\left(\sqrt{\dfrac{5}{13}};3\right),\left(-\sqrt{\dfrac{5}{13}};-3\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right)$.

**26)** Điều kiện: $x,y\neq 0$.

Ta có: $\dfrac{1}{(x+y)^2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{2}{(x+y)^3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{1}{x^2y^2}$

Hệ đã cho tương đương với hệ: $\begin{cases}x(x+2y)=8\\x^2y^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\pm4\\x^2+2xy=8\end{cases}$

Xét hệ: $\begin{cases}xy=4\\x^2+2xy=8\end{cases}$. khi đó $\begin{cases}xy=4\\x^2=0\end{cases}$. Hệ này vô nghiệm.

Xét hệ: $\begin{cases}xy=-4\\x^2=16\end{cases}$

Hệ này có nghiệm $(4;-1)$ và $(-4;1)$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(4;-1)$ và $(-4;1)$.

**27)** Ta có: $\begin{cases}x^2+y^2=9\\\dfrac{1-x^2}{(1+xy)^2-(x+y)^2}+1-y^2=2\end{cases}$

Hệ này tương tự với hệ $\begin{cases}x^2+y^2=9\\\dfrac{1-x^2}{(1+xy)^2-(x+y)^2}+1-y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-y^2=1\\x^2+y^2=9\\x,y\neq\pm1\end{cases}$

Khi đó, hệ có nghiệm $(-3;0)$ và $(3;0)$.

**28)** Điều kiện: $x\geq 2, y\geq 4$

Vì $12x\sqrt{y-4} \le 3x(y-4+4) = 3xy$ và $4\sqrt{2}y\sqrt{x-2} \le 2y(x-2+2) = 2xy$

Cộng hai bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được:

$5xy = 12x\sqrt{y-4} + 4\sqrt{2}y\sqrt{x-2} \le 3xy + 2xy = 5xy$

Do vậy dấu "=" phải xảy ra. Khi đó $x = 4, y = 8$.

Kiểm tra lại, ta thấy $x = 4, y = 8$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

**29)** Điều kiện: $x \ge 16, y \ge 9$.

Khi đó: $\dfrac{8}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+6} + \dfrac{17}{8}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{21}{4}$. Đặt $t = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \ge 2\sqrt{\dfrac{x}{y}.\dfrac{y}{x}} = 2$.

Từ sự đánh giá qua bất đẳng thức dưới đây:

$6 = \dfrac{8}{t+6} + \dfrac{17}{8}t + \dfrac{3}{4} = \dfrac{8}{t+6} + \dfrac{1}{8}(t+6) + 2t \ge 2 + 2.2 = 6$, suy ra $t+6 = 8$ hay $t = 2$.

Vậy $t = x \ge 16$. Xét phương trình vô tỷ $\sqrt{x-16} + \sqrt{x-9} = 7$ với $x \ge 16$.

Bình phương hai vế và giản ước được: $\sqrt{(x-16)(x-9)} = 37 - x$

Từ đây suy ra $x = 25$.

Kiểm tra lại, ta thấy $x = 25, y = 25$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

**30)** Điều kiện: $3 \le x, y, z \le 13$. Cộng ba phương trình vế theo vế, ta được:

$\sqrt{x-3} + \sqrt{13-x} + \sqrt{y-3} + \sqrt{13-y} + \sqrt{z-3} + \sqrt{13-z} = 6\sqrt{5}$.

Xét: $T = \sqrt{t-3} + \sqrt{13-t}$ với $t \in [3;13]$



hoc360.net

Vì $T=\sqrt{t-3}+\sqrt{13-t}\le\sqrt{(1+1)(t-3+13-t)}=2\sqrt{5}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki và dấu "=" xảy ra khi $t=8$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm $x=y=z=8$.

**31)** Biến đổi hệ phương trình thành:

$$\begin{cases} x^2(x-y)=(x+y)^2+7(x-y)+4 & (1) \\ 4=-3x^2-y^2+8(x-y) & (2) \end{cases}$$

Thực hiện phép thế (2) vào (1) ta có:

$$x^2(x-y)=(x+y)^2+7(x-y)-3x^2-y^2+8(x-y)$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-y)=-2x^2+2xy+15(x-y)$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-y)=-2x(x-y)+15(x-y)\Leftrightarrow(x-y)(x^2+2x-15)=0$$

TH1: $x=y$. Thay vào phương trình (2) có ngay: $4x^2+4=0$. Phương trình này vô nghiệm.

TH2: $x^2+2x-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3\Rightarrow y^2+8y+7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=-7 \end{array}\right. \\ x=-5\Rightarrow y^2+8y+119=0(VN) \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm sau: $(3;-1),(3;-7)$

**32)** Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{2x+y} \\ v=\sqrt{3-x-y} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+2y=u^2 \\ 3-x-y=v^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=u^2+v^2-3 \\ x=6-u^2-2v^2 \end{cases}$

$\Rightarrow 2x+3y+4=u^2-v^2+7$

Khi đó hệ ban đầu trở thành: $\begin{cases} 3u+v=5 \\ 2v-\sqrt{u^2-v^2+7}=2(*) \end{cases}$

Thế $v=5-3u$ vào phương trình (*) giải tìm được $u=1$, từ đó v = 2

$\Rightarrow$ x = –3; y = 2

**33)** PT thứ hai của hệ

$\Leftrightarrow x+2y+2\sqrt{x+2y}+1=x^2+2x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2y}+1\right)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2y}=x$ hoặc $\sqrt{x+2y}=-x-2$

TH1: $\sqrt{x+2y}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2y=x^2-x \end{cases}$ thay vào phương trình thứ nhất ta được

$13x^2-11x-30=0$

TH2: $\sqrt{x+2y}=-x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\le 0 \\ 2y=x^2+x+1 \end{cases}$ thay vào phương trình thứ nhất ta được bậc hai theo x

**34)** Điều kiện: $x\ge 4; y\ge 0; x^2\ge y; 4x\ge y; y\ge 3x$

Phương trình (1)

$\Leftrightarrow 2x-2\sqrt{x^2-y}=4x-y \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-y}=y-2x \Leftrightarrow y=4x-4 \vee y=0$

+ Nếu $y=0$ thì không thỏa mãn do điều kiện $y\ge 3x\ge 12$

+ Nếu $y=4x-4$ thay vào phương trình (2) ta thu được:

$\sqrt{x^2-16}=2+\sqrt{x-4} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-16}-3=\sqrt{x-4}-1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-25}{\sqrt{x^2-16}+3}=\dfrac{x-5}{\sqrt{x-4}+1} \Leftrightarrow (x-5)\left(\dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x-4}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=5 \vee \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x-4}+1}=0$

Với $x=5 \Rightarrow y=16$

Xét $\dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x-4}+1}=0 \Leftrightarrow (x+5)\sqrt{x-4}+x+2-\sqrt{x^2-16}=0$.

Dễ thấy $x+2-\sqrt{x^2-16}=\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-16}>0$ với mọi $x\ge 4$ nên phương trình vô nghiệm

Tóm lại hệ có nghiệm duy nhất: $(x;y)=(5;16)$

**35).** ĐK: $x\ge 2y, x+\sqrt{x-2y}\ge 0$

Đặt $\begin{cases} a=3y \\ b=\sqrt{x-2y} \end{cases}$, phương trình (1) của hệ đã cho tương đương với:

$a\left(a^2+1\right)=b\left(b^2+1\right)\Rightarrow\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2+1\right)=0$ .

Do $a^2+ab+b^2>0\left(\forall a,b\right)\Rightarrow a=b$

Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-2y}=3y\\\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\ge 0\\x=9y^2+2y\\\sqrt{9y^2+2y+3y}=9y^2+2y+3y-2\end{cases}$

Đặt $t=9y^2+5y, pt\Leftrightarrow\sqrt{t}=t-2\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 2\\t^2-5t+4=0\end{cases}\Rightarrow t=4$.

Do $y\ge 0\Rightarrow y=\dfrac{4}{9}\Rightarrow x=\dfrac{8}{3}$

Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất: $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{9}\right)$

**36)** Từ phương trình (1) ta rút ra được:

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}{\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)}=\frac{9x}{5}\Leftrightarrow\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-y^2}+x^2-y^2}{y^2}=\frac{9x}{5}$$

(*)

Từ phương trình 2 ta có kết quả: $\dfrac{9x}{5}=\dfrac{6x}{y}-1$

Thay vào (*) ta có:

$$\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-y^2}-y^2}{y^2}=\frac{6x}{y}-1\Leftrightarrow 2x^2+2x\sqrt{x^2-y^2}=6xy\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x+\sqrt{x^2-y^2}=3y\end{array}\right.$$

Nếu $x=0$ vô nghiệm.

Nếu $x+\sqrt{x^2-y^2}=3y\Leftrightarrow\sqrt{x^2-y^2}=3y-x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3y-x\ge 0\\x^2-y^2=9y^2-6xy+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y-x\ge 0\\\left[\begin{array}{l}y=0\\y=\dfrac{5}{3}x\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow y=\frac{5}{3}x.$$

Thay vào ta tìm được: $(x;y)=(5;3)$

KL: Hệ có nghiệm: $(x;y)=(5;3)$

**37)** Biến đổi phương trình (1)

$$(x+3)\sqrt{(y+4)^2+4}=-(y+4)\sqrt{(x+3)^2+1} \qquad (*)$$

+ $x=-3\Rightarrow y=-4$ ta thấy không thỏa mãn.

+ $x\neq -3\Rightarrow y\neq -4$ thì bình phương hai vế phương trình (*)

$$\begin{cases}(x+3)(y+4)<0\\(y+4)^2=4(x+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow y+4=-2(x+3)\Leftrightarrow y=-2x-10$$

Thay vào phương trình (2) và rút gọn ta được:

$$4x^2+28x+51+3\sqrt[3]{4x+15}=0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2+8x+16\right)+3\sqrt[3]{4x+15}-(4x+13)=0$$

$$\Leftrightarrow 4(x+4)^2+\frac{27(4x+15)-(4x+13)^3}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2}+3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15}+(4x+13)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 4(x+4)^2-\frac{16(4x+7)(x+4)^2}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2}+3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15}+(4x+13)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2\left[1-\frac{4(4x+7)}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2}+3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15}+(4x+13)^2}\right]=0$$

$$\left[\begin{array}{l}1-\dfrac{4(4x+7)}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2}+3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15}+(4x+13)^2}=0\\x=-4\end{array}\right.$$

- Với $x=-4\Rightarrow y=-2$

- Với $1-\dfrac{4(4x+7)}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2}+3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15}+(4x+13)^2}=0 \qquad (3)$

Ta sẽ chứng minh phương trình này vô nghiệm như sau:

Dễ thấy với mọi x thì $4x^2+28x+51>0$

Do đó phương trình(**)có nghiệm khi $3\sqrt[3]{4x+15}<0\Rightarrow x<-\dfrac{15}{4}$. Từ đó suy ra vế trái của (3) luôn dương, dẫn đến phương trình này vô nghiệm.

KL: $(x;y)=(-4;-2)$

**38)** Từ phương trình (2) ta thu được: $y^2=2-x^2-y-\dfrac{xy}{2}$

Thay vào phương trình (1) ta có:

$$2x^3+x\left(2-x^2-y-\frac{xy}{2}\right)+x^2-2y=4\Rightarrow x^3+2x-xy-\frac{x^2y}{2}+x^2-2y=4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4)+x(x^2+2x+4)-y(x^2+2x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+2x^2+4x-x^2y-2xy-4y=8$$

$$\Leftrightarrow (x^3-8)+(x^3+2x^2+4x)-(x^2y+2xy+4y)=0\Rightarrow(2x-2-y)(x^2+2x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow y=2x-2$$

Thay $y=2x-2$ vào phương trình (2)và rút gọn ta được

$$x(6x-7)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=-2\\ x=\dfrac{7}{6}\ \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x;y)=(0;-2),\left(\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{3}\right)$

**39)** Với điều kiện $x>0$ hệ phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases}x^2y^2+8xy^2-6xy-12y^2-7y+8=0\\ 13y^2+y+1-6xy^2=0\end{cases}$$

Lấy (1) + (2) ta có được phân tích sau:

$$x^2y^2+2xy^2+y^2-6xy-6y+9=0\Leftrightarrow[y(x+1)]^2-6y(x+1)+9=0$$

Ta được $y(x+1)=3\Leftrightarrow 19y^2-17y+1=0$

- Với $y=\dfrac{17+\sqrt{213}}{38};x=\dfrac{49-3\sqrt{213}}{2}$
- Với $y=\dfrac{17-\sqrt{213}}{38};x=\dfrac{49+3\sqrt{213}}{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có bộ nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{49-3\sqrt{213}}{2};\frac{17+\sqrt{213}}{38}\right),\left(\frac{49+3\sqrt{213}}{2};\frac{17-\sqrt{213}}{38}\right)$$

**40).** Điều kiện: $y\neq 0$

Với $y \neq 0$ ta biến đổi hệ phương trình thành $\begin{cases} 2\dfrac{x^2}{y} - xy = \dfrac{4}{xy} \\ 2\dfrac{x^2}{y} - 2xy + y^3 = 2 \end{cases}$

Đặt $a = \dfrac{x^2}{y}; b = xy$ hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} 2a - b = \dfrac{4}{b} \\ 2a - 2b + \dfrac{b^2}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab - b^2 = 4 \quad (3) \\ 2a^2 - 2ab + b^2 = 2a \quad (4) \end{cases}$$

Cộng (3) và (4) theo vế và thu gọn ta được

$$a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array} \right.$$

$TH1: a = -1 \Rightarrow b^2 + 2b + 4 = 0$ ( VN)

$TH2: a = 2 \Rightarrow b = 2$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \\ y = \sqrt[3]{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$

**41)** Điều kiện: $\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 2y - y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

**Cách 1:** Đặt $t = x + 1, 0 \leq t \leq 2$. Lúc đó hệ pt thành:

$$\begin{cases} t^3 - 3t^2 + 2 = y^3 - 3y^2 + 2 \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2 \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} = -2 \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta suy ra: $(t - y)\left(t^2 + ty + y^2 - 3(t + y)\right) = 0$ Vì $t^2 + ty + y^2 - 3(t + y) = 0 \Leftrightarrow t^2 + (y - 3)t + y^2 - 3y = 0$ có $\Delta = (y - 3)^2 - 4(y^2 - 3y) = (y - 3)(y - 3 - 4y) = -3(y - 3)(y + 1) < 0$ nên phương trình này vô nghiệm.

Vậy $t = y \Rightarrow x + 1 = y$. Thay $x + 1 = y$ vào phương trình (2) có:

$x^2-2\sqrt{1-x^2}=-2 \Leftrightarrow 1-x^2+2\sqrt{1-x^2}-3=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{1-x^2}-1\right)\left(\sqrt{1-x^2}+3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{1-x^2}=1\\ \sqrt{1-x^2}=-3\end{array}\right. \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=1$

Vậy hệ pt có 1 nghiệm duy nhất là $(x;y)=(0;1)$

**Cách 2:** Phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2+\sqrt{1-x^2}+2=3\sqrt{2y-y^2} \Leftrightarrow f(x)=g(y)$.

Xét $f(x)$ trên miền $[-1;1]$ ta có $3 \le f(x) \le \frac{13}{4}$

Ta lại có: $g(y)=3\sqrt{y(2-y)} \le \frac{y+2-y}{2}=3$.

Vậy $f(x) \ge g(y)$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y=1 \\ x=\pm 1, x=0 \end{cases}$.

Thay vào phương trình (1) có nghiệm $(x;y)=(0;1)$ (thỏa mãn)

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(0;1)$.

**42)** Vì $x=0$ không phải là nghiệm của hệ chia phương trình (1) cho $x^3$ ta thu được: $2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}$

$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(1-\frac{1}{x}\right)=\sqrt{(3-2y)^3}+\sqrt{3-2y}$

Đặt $a=1-\frac{1}{y}, b=\sqrt{3-2y}$ suy ra

$a^3+a=b^3+b \Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2+1\right)=0 \Leftrightarrow a=b$.

Thay vào pt thứ 2 ta được:

$\left(\sqrt{x+2}-3\right)-\left(\sqrt[3]{15-x}-2\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x-7}{\sqrt{x+2}+3}+\frac{x-7}{\sqrt[3]{(15-x)^2}+2\sqrt[3]{15-x}+4}=0$

$\Leftrightarrow x=7 \Rightarrow y=\frac{111}{98}$

**43)** Dễ thấy $xy=0$ không thỏa mãn hệ.

Với $xy \neq 0$ viết lại hệ dưới dạng: $\begin{cases} \left(2x - \dfrac{1}{x}\right)\left(2y - \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{7}{2} \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0$ (ẩn x) có nghiệm là $\Delta_1 = (y-7)^2 - 4y^2 + 24y - 56 \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[1; \dfrac{7}{3}\right]$

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0$ (ẩn y) có nghiệm là: $\Delta_2 = (x-6)^2 - 4x^2 + 28x - 56 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[2; \dfrac{10}{3}\right]$

Xét hàm số $f(t) = 2t - \dfrac{1}{t}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên

$\Rightarrow f(x).f(y) \geq f(2).f(1) = \dfrac{7}{2}$

Kết hợp với phương trình thứ nhất ta được: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ là nghiệm của hệ.

"Để chứng minh hàm số $f(x)$ đồng biến trên miền xác định D ta làm như sau:

Xét hai giá trị $x_1 \neq x_2 \in D$. Chứng minh: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$"

Ngược lại để chứng minh hàm số $f(x)$ nghịch biến trên miền xác định D ta làm như sau: Xét hai giá trị $x_1 \neq x_2 \in D$. Chứng minh: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$"

**44)** Điều kiện xác định $x \geq \dfrac{-1}{2}; y \geq 2$.

Ta viết lại hệ thành: $\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x + 1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt[4]{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases}$

Đặt $a = 2x+1, b = \sqrt{y-2}$ suy ra $2a^3 + a = 2b^3 + b \Leftrightarrow a = b$. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có: $\Leftrightarrow 2x + 1 = \sqrt{y-2}$

Thay vào phương trình thứ hai ta được: $\sqrt[4]{4y-8} + \sqrt{2y+4} = 6(*)$

Đặt $t = \sqrt{2y+4}$ thì $2y = t^2 - 4$ thay vào ta có: $\sqrt[4]{2t^2 - 16} = 6 - t \Rightarrow t = 4$

$\Rightarrow y=6$ . Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x;y)=\left(\frac{1}{2};6\right)$

**45)** Điều kiện: $\begin{cases}13x+4y\ge 0\\2x+y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\frac{4y}{13}\\x\ge -\frac{y}{2}\end{cases}$

Đặt $a=\sqrt{13x+4y},b=\sqrt{2x+y}$ . Khi đó ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases}a^2-4b^2=5x\\a+2b=5\\b+x-2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b=x\\a+2b=5\\b+x-2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{5-x}{4} & (1)\\a+2b=5 & (2)\\b+x-2y=2 & (3)\end{cases}$$

Thế (1) vào (3) ta được: $x=\frac{8y+3}{3}(4)$ . Thế (4) vào phương trình

$\sqrt{2x+y}+x-2y=2$ ta được: $\sqrt{\frac{19y+6}{3}}=\frac{3-2y}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le\frac{3}{2}\\4y^2-69y-19=0\end{cases}$

Giải ra $y=\frac{69-3\sqrt{545}}{8}$ từ đó tính được $x=24-\sqrt{545}$

Thử lại ta thấy $(x;y)=\left(24-\sqrt{545};\frac{69-3\sqrt{545}}{8}\right)$ là nghiệm cần tìm.

**46)** Ta tìm cách loại bỏ $18y^3$ . Vì $y=0$ không là nghiệm của phương trình (2) nên tương đương $72x^2y^2+108xy=18y^3$ .

Thế $18y^3$ từ phương trình (1) vào ta thu được:

$$8x^3y^3-72x^2y^2-108xy+27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}xy=-\frac{3}{2}\\xy=\frac{21-9\sqrt{5}}{4}\\xy=\frac{21+9\sqrt{5}}{4}\end{array}\right..$$

Thay vào phương trình (1) ta tìm được $x,y$ .

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 (L) \\ y = \sqrt[3]{\dfrac{8(xy)^3 + 27}{18}} = -\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{5} - 3\right) \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}\left(3 - \sqrt{5}\right) \\ y = \sqrt[3]{\dfrac{8(xy)^3 + 27}{18}} = \dfrac{3}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right) \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}\left(3 + \sqrt{5}\right) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm

$$(x;y) = \left(\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right); -\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-3\right)\right), \left(\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{5}\right); -\frac{3}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\right).$$

**47)** Điều kiện: $x \le 2, y \ge \dfrac{1}{2}$.

Phương trình (1) tương đương:

$$(2-x)\sqrt{2-x} + \sqrt{2-x} = (2y-1)\sqrt{2y-1} + \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x-1}\right) = f\left(\sqrt{2y-1}\right)$$

Đặt $a = \sqrt{2-x}, b = \sqrt{2y-1} \Rightarrow a^3 + a = b^3 + b \Rightarrow a = b$.

$\sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow x = 3 - 2y$ thay vào ta có:

$$\sqrt[3]{5-2y} + 2\sqrt{y+2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 5 \\ a^3 + 2b^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1; b = 2 \\ a = \dfrac{-3-\sqrt{65}}{4}; b = \dfrac{23+\sqrt{65}}{8} \\ a = \dfrac{\sqrt{65}-3}{4}; b = \dfrac{23-\sqrt{65}}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \dfrac{233+23\sqrt{65}}{32} \\ y = \dfrac{233-23\sqrt{65}}{32} \end{array}\right..$$

Vậy hệ có nghiệm

$$(x;y) = (-1;2), \left(\frac{23\sqrt{65}-185}{16}; \frac{233-23\sqrt{65}}{32}\right), \left(-\frac{23\sqrt{65}+185}{16}; \frac{233+23\sqrt{65}}{32}\right)$$

**48)** Điều kiện: $x^2 > 1$.

Ta có (1) tương đương

$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=\sqrt{y^2+1}-y$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1}.$

Từ đó ta rút ra $x=-y$.

Thay vào (2) ta được: $y+\dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

Bình phương hai vế (điều kiện $y>0$). Khi đó ta có:

$$y^2+\frac{2y^2}{\sqrt{y^2-1}}+\frac{y^2}{y^2-1}=\left(\frac{35}{12}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{y^4-y^2+y^2}{y^2-1}+\frac{2y^2}{\sqrt{y^2-1}}=\left(\frac{35}{12}\right)^2.$$

Đặt $\dfrac{y^2}{\sqrt{y^2-1}}=t>0$. Phương trình tương đương:

$$t^2+2t-\left(\frac{35}{12}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{49}{12}(L) \\ t=\dfrac{25}{12} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}}=\frac{25}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\pm\dfrac{5}{4} \\ y=\pm\dfrac{5}{3} \end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện chỉ lấy 2 giá trị dương.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right),\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

**49)** Triển khai phương trình (1)

$(1)\Leftrightarrow x^2y^2+6xy+9+x^2+2xy+y^2=8 \Leftrightarrow x^2y^2+x^2+y^2+1=-8xy$

$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=-8xy$.

Nhận thấy $x=0, y=0$ không là nghiệm của hệ.

Phương trình (1) khi đó là: $\dfrac{x^2+1}{x}.\dfrac{y^2+1}{y}=-8$.

Đặt $\dfrac{x}{x^2+1}=a;\dfrac{y}{y^2+1}=b$. Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} a+b=-\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{ab}=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y}{y^2+1}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=2\pm\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2+\pm\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ có nghiệm

$(x;y)=\left(-1;2-\sqrt{3}\right),\left(-1;2+\sqrt{3}\right),\left(2-\sqrt{3};-1\right),\left(2+\sqrt{3};-1\right)$.

**50)** Ta có:

$$(x+2y)^2 \le (1+1)\left(x^2+4y^2\right) \Rightarrow \frac{\left(x^2+4y^2\right)}{2} \ge \sqrt{\frac{(x+2y)^2}{4}} \Leftrightarrow \frac{\left(x^2+4y^2\right)}{2} \ge \frac{|x+2y|}{2}$$

Mặt khác ta cũng có:

$$\frac{x^2+2xy+4y^2}{3}=\frac{3\left(x+2y\right)^2+(x-2y)^2}{12} \ge \frac{\left(x+2y\right)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+2xy+4y^2}{3}} \ge \frac{|x+2y|}{2}$$

Từ đó suy ra $\sqrt{\dfrac{x^2+4y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+2xy+4y^2}{3}} \ge |x+2y| \ge x+2y$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=2y\ge 0$

Thay vào phương trình còn lại ta thu được:

$$x^4-x^3+3x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^3+3x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

Hệ có một cặp nghiệm: $(x;y)=\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$

**51)** Cộng theo vế các pt của hệ ta được: $(x-4)^3+(y-4)^3+(z-4)^3=0$ (*)

Từ đó suy ra trong 3 số hạng ở tổng này phải có ít nhất 1 số hạng không âm, không mất tính tổng quát ta giả sử: $(z-4)^3\ge 0 \Rightarrow z\ge 4$

Thế thì phương trình thứ nhất của hệ tương đương:

$x^3-16=12(z-2)^2\ge 12.2^2\Rightarrow x\ge 4$

Thế thì phương trình thứ hai của hệ tương đương:

$y^3-16=12(x-2)^2\ge 12.2^2\Rightarrow y\ge 4$

Do vậy từ $(x-4)^3+(y-4)^3+(z-4)^3=0(*)\Rightarrow x=y=z=4$ thử lại thỏa mãn.

Vậy $(x;y;z)=(4;4;4)$ là nghiệm của hệ.

**52)** Phương trình (1) của hệ có dạng: $\left(\sqrt{x^2+2}-y\right)\left(\sqrt{x^2+2}+y^2-1\right)=0$

Do $\sqrt{x^2+2}+y^2-1>0$ nên suy ra $\sqrt{x^2+2}-y=0\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+2}$ thay vào phương trình (2) ta có: $(x+2)+(x+2)\sqrt{(x+2)^2+2}=-x-x\sqrt{(-x)^2+2}$

$\Rightarrow x+2=-x\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=\sqrt{3}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-1;\sqrt{3}\right)$

**53)** Theo bất đẳng thức cô si ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{x+3y}}=\sqrt{\dfrac{x}{x+y}.\dfrac{x+y}{x+3y}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{x+y}{x+3y}\right)\\ \sqrt{\dfrac{y}{x+3y}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\dfrac{2y}{x+3y}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2y}{x+3y}\right)\end{cases}\Rightarrow\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{3}{2}\right)$$

Tương tự ta cũng có: $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{3}{2}\right)$

Từ đó suy ra $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x+y}}\right)\le 2$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y$ thay vào phương trình thứ nhất ta được: $x=y=4$

$$\begin{cases}2y^3-(x+4)y^2+8y+x^2-4x=0\\ \sqrt{\dfrac{1-x}{2}}+\sqrt{x+2y+3}=4(x-1)^2+8y-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

**54)** Điều kiện: $\begin{cases}1-x\ge 0\\ x+2y+3\ge 0\end{cases}$



hoc360.net

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại thành:

$x^2-(y^2+4)x+2y^3-4y^2+8y=0$

$\Rightarrow \Delta=(y^2+4)^2-4(2y^3-4y^2+8y)=\left(y^2-4y+4\right)^2$

Từ đó ta tính được: $\left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=y^2-2y+4 \end{array}\right.$

Vì $x=y^2-2y+4=(y-1)^2+3>1$ nên không thỏa mãn

Thay $x=2y$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}}+\sqrt{2x+3}=4x^2-4x+\frac{7}{2}$$

Ta có: $4x^2-4x+\frac{7}{2}=(2x-1)^2+\frac{5}{2}\geq\frac{5}{2}$;

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}}+\sqrt{2x+3}=\frac{1}{2}\sqrt{2-2x}+\sqrt{2x+3}\leq\sqrt{\left(\frac{1}{4}+1\right)\left(2-2x+2x+3\right)}=\frac{5}{2}$$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi các dấu bằng đồng thời xảy ra.

Suy ra $x=\frac{1}{2};y=\frac{1}{4}$

**55)** Từ phương trình (2) ta suy ra $x>0$

Phương trình (1) được viết lại như sau:

$$x^2+\left(y^2-y-1\right)x-y^3-y^2=0\Rightarrow\Delta=\left(y^2-y-1\right)^2+4\left(y^3+y^2\right)=\left(y^2+y+1\right)^2$$

Từ đó tính được: $\left[\begin{array}{l} x=-y^2<0 \\ x=y+1 \end{array}\right.$

Thay $y=x-1$ vào phương trình ta thu được: $3\sqrt{x(x^2+4)}=x^2+4+2x$.

Chia phương trình cho $x^2+4$ ta có: $3\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}=1+\frac{2x}{x^2+4}$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}>0$ ta có $2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $t=1\Leftrightarrow x^2-x+4=0$ vô nghiệm

Với $t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=1$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$

**56)** Điều kiện: $x\ge 1$

Ta viết lại phương trình (1) thành: $x^2+(y^2+2)x-2y^3-4y^2-4y=0$

Tính được

$\Delta=\left(y^2+2\right)^2+8y^3+16y^2+16y=\left(y^2+4y+2\right)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2y\\x=-y^2-2y-2<0\end{array}\right.$

Thay $y=\dfrac{x}{2}$ vào phương trình ta thu được:

$3\left(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x+4}\right)=x^2-2x+9(*)$

Theo bất đẳng thức Cosi ta có:

$3\left(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x+4}\right)=\dfrac{3}{2}.2\sqrt{1.(x-1)}\le\dfrac{3}{2}(1+x-1)=\dfrac{3}{2}x$

$3\sqrt[3]{2x+4}=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{4.4.(x+2)}\le\dfrac{1}{2}(4+4+x+2)=\dfrac{x+10}{2}$

Từ đó suy ra $3\left(\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2x+4}\right)\le\dfrac{3}{2}x+\dfrac{x+10}{2}=2x+5$

Mặt khác ta có: $x^2-2x+9-(2x+5)=(x-2)^2\ge 0$

Từ đó suy ra phương trình (*) có nghiệm khi các dấu bằng đồng thời xảy ra $x=2$.

Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$

Mặt khác ta thấy $x=2;y=3$ là một nghiệm của hệ

Vậy $(x;y)=(2;3)$ là nghiệm duy nhất của hệ.

**57)** Đặt $a=x+y+\dfrac{1}{x+y},b=x-y\Leftrightarrow$

Hệ $\begin{cases}5\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+3(x-y)^2=13\\(x+y+\dfrac{1}{x+y})+x-y=1\end{cases}$ nên ta có:

$$\begin{cases} 5(a^2-2)+3b^2=13 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2+3b^2=23 \\ a+b=1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được $\begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}$ và $\begin{cases} a=-\dfrac{5}{2} \\ b=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ:

$$(x;y)=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2};\frac{5\pm\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{3}{4};-\frac{11}{4}\right),\left(\frac{3}{2};-2\right).$$

**58)** Từ phương trình (2) ta suy ra $xy\ge 0 \Leftrightarrow x,y$ cùng dấu. Từ phương trình (1) ta suy ra $x,y\ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có:

$x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{2-x^2}\le \dfrac{x^2+2-y^2}{2}+\dfrac{y^2+2-x^2}{2}=2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2+y^2=2$.

Bài toán trở thành: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x+y)^3-12(x-1)(y-1)+\sqrt{xy}=9 \end{cases}$

Ta có:

$$(x+y)^3-12(x-1)(y-1)+\sqrt{xy}-9=(x+y)^3+12(x+y)-21-12xy+\sqrt{xy}$$

Đặt $t=x+y\Rightarrow t\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=2$ ta thu được

$\left(x+y\right)^2-2xy=2\Leftrightarrow x+y=\sqrt{2\left(t^2+1\right)}$. Ta có:

$$(x+y)^3+12(x+y)-21-12xy+\sqrt{xy}\le$$

$$(x+y)^3+12(x+y)-21-12\frac{\left(x+y\right)^2-\left(x^2+y^2\right)}{2}+\frac{\left(x+y\right)}{2}=t^3-6t^2+12t-8.$$

Ta có $t^3-6t^2+12t-8=\left(t-2\right)^3\le 0$. Khi $t=2$ thì $\Rightarrow x=y=1$ là nghiệm duy nhất của hệ.

**59).** Từ phương trình 2 của hệ ta suy ra $x, y \geq 0$. Xét phương trình:

$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)}$

Ta có:

$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = (x+y)(x^2+y^2+6xy) = (x+y)\left[(x+y)^2 + 4xy\right]$.

Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $(x+y)^2 + 4xy \geq 2\sqrt{(x+y)^2.4xy}$. Suy ra

$x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 4\sqrt{xy}(x+y)\sqrt{(x+y)^2} = 4\sqrt{xy}(x+y)^2$. Ta có

$(x+y)^2 = (x^2+y^2) + 2xy \geq 2\sqrt{(x^2+y^2).2xy}$.

Suy ra $x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Thay vào phương trình (2) ta thu được:

$\sqrt{x} - \sqrt{2x-3} = 6 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2(x-3) \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} = 2(x-3)$

Suy ra $x = 3$ hoặc: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$ Do $x \geq \dfrac{3}{2}$ nên pt này vô nghiệm.

Tóm lại: Hệ có nghiệm: $x = y = 3$.