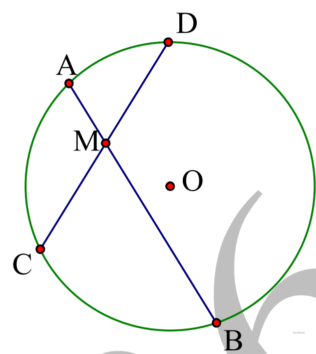
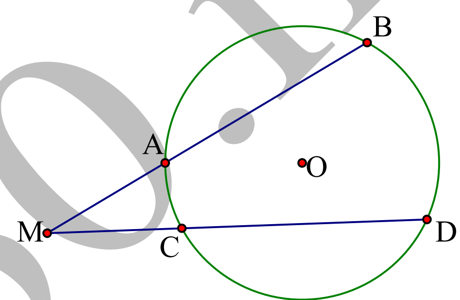
CHÙM BÀI TOÁN VỀ TIẾP TUYẾN, CÁT TUYẾN

Những tính chất cần nhớ:

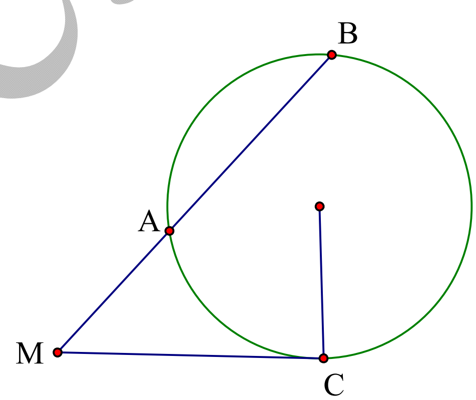
1). Nếu hai đường thẳng chứa các dây AB, CD, KCD của một đường tròn cắt nhau tại M thì $MA.MB = MC.MD$

2). Đảo lại nếu hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại M và $MA.MB = MC.MD$ thì bốn điểm A, B, C, D thuộc một đường tròn.

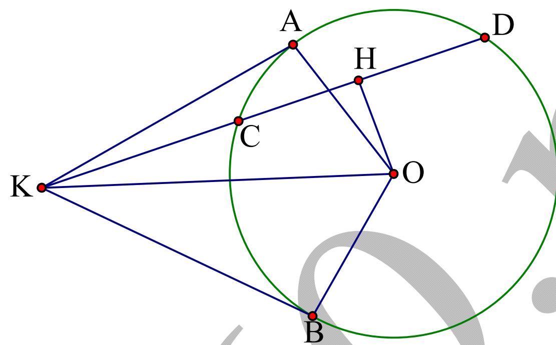




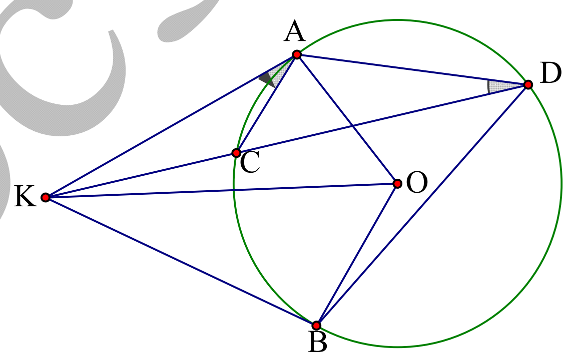
3). Nếu MC là tiếp tuyến và MAB là cát tuyến thì $MC^2 = MA.MB = MO^2 - R^2$



4). Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD, H, là trung điểm CD thì năm điểm K, A, H, O, B nằm trên một đường tròn.



5). Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD thì $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$



Ta có: $\widehat{KAC} = \widehat{ADK} \Rightarrow \Delta KAC \# \Delta KAD \Leftrightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{KC}{KA}$

Tương tự ta cũng có: $\frac{BC}{BD}=\frac{KC}{KB}$ mà $KA=KB$ nên suy ra $\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}$

Chú ý: Những tứ giác quen thuộc $ACBD$ như trên thì ta luôn có: $\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}$ và $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$

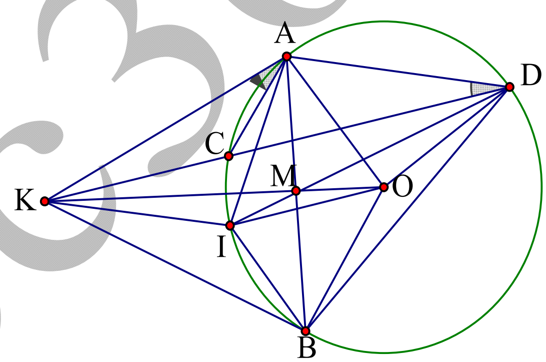
NHỮNG BÀI TOÁN TIÊU BIỂU

Bài 1: Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta kẻ các tiếp tuyến KA,KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi M là giao điểm OK và AB. Vẽ dây DI qua M. Chứng minh

a) $KIOD$ là tứ giác nội tiếp

b) KO là phân giác của góc IKD

Giải:



a) Để chứng minh $KIOD$ là tứ giác nội tiếp việc chỉ ra các góc là rất khó khăn.

Ta phải dựa vào các tính chất của cát tuyến , tiếp tuyến.

Ta có: $AIBD$ là tứ giác nội tiếp và $AB\cap ID=M$ nên ta có: $MA.MB=MI.MD$

Mặt khác $KAOB$ là tứ giác nội tiếp nên $MA.MB = MO.MK$

Từ đó suy ra $MO.MK = MI.MD$ hay $KIOD$ là tứ giác nội tiếp.

a) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $KIOD$. Ta có $IO = OD = R \Rightarrow \widehat{OKI} = \widehat{OKD}$

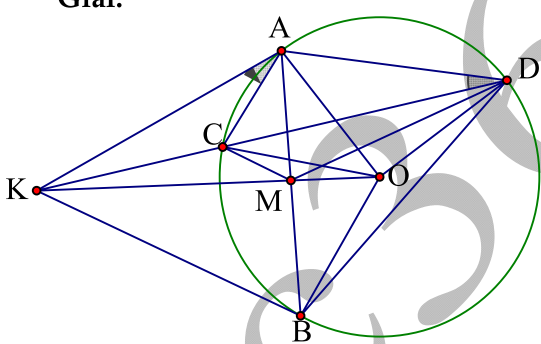
suy ra KO là phân giác của góc IKD

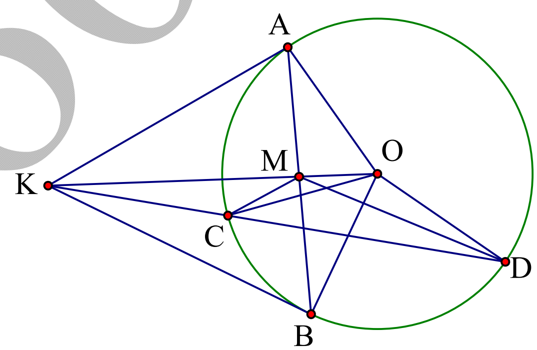
Bài 2: Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi M là giao điểm OK và AB. Chứng minh

a) $CMOD$ là tứ giác nội tiếp

b) Đường thẳng AB chứa phân giác của góc CMD

Giải:





a) Vì KB là tiếp tuyến nên ta có: $KB^2 = KC.KD = KO^2 - R^2$

Mặt khác tam giác KOB vuông tại B và $BM \perp KO$ nên $KB^2 = KM.KO$ suy ra

$KC.KD = KM.KO$ hay $CMOD$ là tứ giác nội tiếp

b) $CMOD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{KMC} = \widehat{ODC}, \widehat{OMD} = \widehat{OCD}$.

Mặt khác ta có: $\widehat{ODC} = \widehat{OCD} \Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{OMD}$

Trường hợp 1:

Tia KD thuộc nửa mặt phẳng chứa A và bờ là KO (h1)

Hai góc $\widehat{AMC}, \widehat{AMD}$ có 2 góc phụ với nó tương ứng là $\widehat{KMC}, \widehat{ODC}$ mà $\widehat{KMC} = \widehat{ODC}$ nên $\widehat{AMC} = \widehat{AMD}$ hay MA là tia phân giác của góc $\widehat{CMD}$

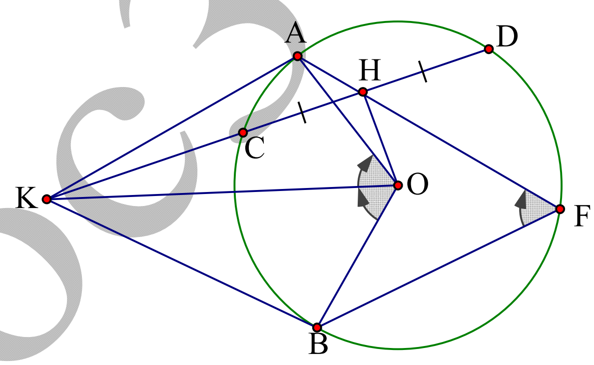
Trường hợp 2:

Tia KD thuộc nửa mặt phẳng chứa B và bờ là KO (h2) thì tương tự ta cũng có MB là tia phân giác của góc $\widehat{CMD}$

Suy ra Đường thẳng AB chứa phân giác của góc $\widehat{CMD}$.

Bài 3. Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi H là trung điểm CD. Vẽ dây AF đi qua H. Chứng minh $BF // CD$

Giải:



Để chứng minh $BF // CD$ ta chứng minh $\widehat{AHK} = \widehat{AFB}$

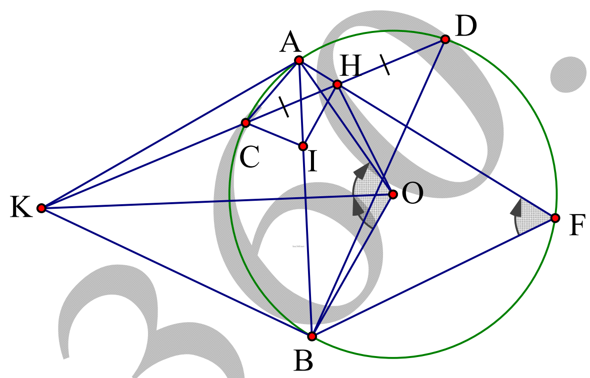
Ta có $\widehat{AFB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$ (Tính chất góc nội tiếp chắn cung AB).

Mặt khác KO là phân giác góc $\widehat{AOB}$ nên

$\widehat{AOK} = \widehat{BOK} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{AOK}$. Vì A, K, B, O, H cùng nằm trên đường tròn đường kính KO nên $\widehat{AHK} = \widehat{AOK} \Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{AHK} \Leftrightarrow BF // CD$

Bài 4. Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi H là trung điểm CD. Đường thẳng qua H song song với BD cắt AB tại I. Chứng minh $CI \perp OB$

Giải:



Ta có $HI // BD \Rightarrow \widehat{CHI} = \widehat{CDB}$. Mặt khác $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ cùng chắn cung CB nên suy ra $\widehat{CHI} = \widehat{CAB}$ hay $AHIC$ là tứ giác nội tiếp. Do đó $\widehat{IAH} = \widehat{ICH} \Leftrightarrow \widehat{BAH} = \widehat{ICH}$. Mặt khác ta có A, K, B, O, H cùng nằm trên đường tròn đường kính KO nên $\widehat{BAH} = \widehat{BKH}$

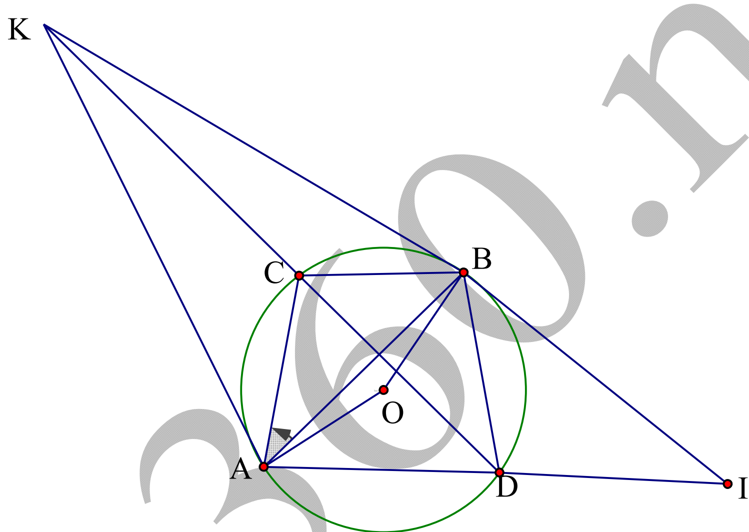
Từ đó suy ra $\widehat{ICH} = \widehat{BKH} \Rightarrow CI // KB$. Mà $KB \perp OB \Rightarrow CI \perp OB$

Nhận xét: Mấu chốt bài toán nằm ở vấn đề $OB \perp KB$ .Thay vì chứng minh $CI \perp OB$ ta chứng minh $CI // KB$

Bài 5: Cho đường tròn (O) dây cung ADI. Gọi I là điểm đối xứng với A

qua D. Kẻ tiếp tuyến IB với đường tròn (O). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt IB ở K. Gọi C là giao điểm thứ hai của KD với đường tròn (O). Chứng minh rằng $BC//AI$.

Giải:



Ta cần chứng minh: $\widehat{AIK} = \widehat{KBC}$

Mặt khác ta có: $\widehat{KBC} = \widehat{CAB} = \frac{1}{2} sđ\overset{\frown}{CB}$ nên ta sẽ chứng minh $\widehat{AIK} = \widehat{CAB}$ hay

$\Leftrightarrow \Delta BID \sim \Delta BCA$ Thật vậy theo tính chất 5 ta có: $\frac{CB}{CA} = \frac{DB}{DA}$ mà

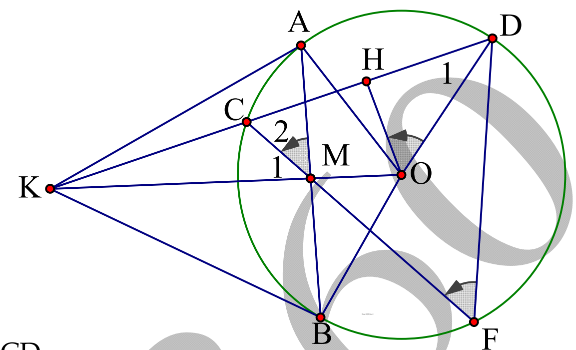
$DA = DI \Rightarrow \frac{CB}{CA} = \frac{DB}{DI}$

Tứ giác $ACBD$ nội tiếp nên $\widehat{BCA} = \widehat{BDI} \Rightarrow \Delta BID \sim \Delta BCA \Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{CAB}$

Hay $\widehat{AIK} = \widehat{KBC} \Rightarrow BC//AI$

Bài 6 Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi M là giao điểm OK và AB. Vẽ dây CF qua M. Chứng minh $DF//AB$

Giải:



Kẻ $OH \perp CD$

Ta chứng minh được: $CMOD$ là tứ giác nội tiếp (bài toán 2) nên $\widehat{M_1} = \widehat{D_1}$ mà $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 90^0; \widehat{D_1} + \widehat{DOH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{M_2} = \widehat{DOH}$. Mặt khác ta có:

$\widehat{CFD} = \frac{1}{2}\widehat{COD}, \widehat{DOH} = \frac{1}{2}\widehat{COD} \Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{DOH}$. Từ đó suy ra

$\widehat{M_2} = \widehat{CFD} \Leftrightarrow DF//AB$

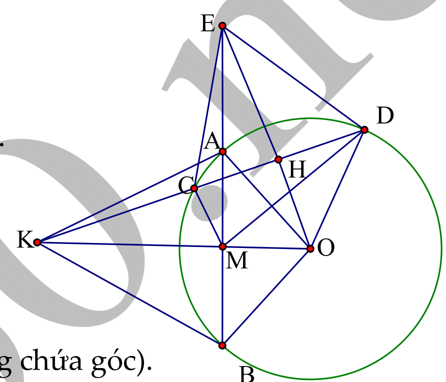
Chú ý: $DF//AB \Rightarrow ABFD$ là hình thang cân có hai đáy là $AB, DF \Rightarrow \widehat{OMD} = \widehat{OMF}$

Bài 7: Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi M là giao điểm OK và AB. Kẻ OH vuông góc với CD cắt AB ở E. Chứng minh

a) $CMOE$ là tứ giác nội tiếp

b) CE, DE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Giải:



a) Theo bài toán 2, ta có $CMOD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{CMK} = \widehat{ODC} = \widehat{OCD}$.

Do đó các góc phụ với chúng bằng nhau: $\widehat{CME} = \widehat{COE}$.

Suy ra $CMOE$ là tứ giác nội tiếp (theo cung chứa góc).

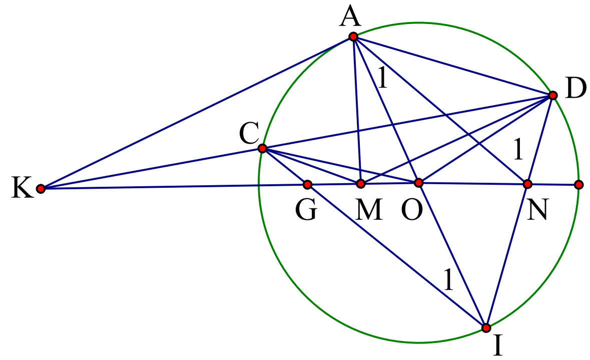
c) Cũng theo bài toán 2, $CMOD$ nội tiếp.

Mặt khác $CMOE$ là tứ giác nội tiếp nên E, C, M, O, D thuộc một đường tròn.

Từ đó dễ chứng minh CE, DE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài 8) Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Vẽ đường kính AI. Các dây IC, ID cắt KO theo thứ tự ở G, N. Chứng minh rằng $OG = ON$.

Giải:



Ta vẽ trong hình trường hợp O và A nằm khác phía đối với CD. Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Để chứng minh $OG = ON$, ta sẽ chứng minh $\Delta IOG = \Delta AON$.

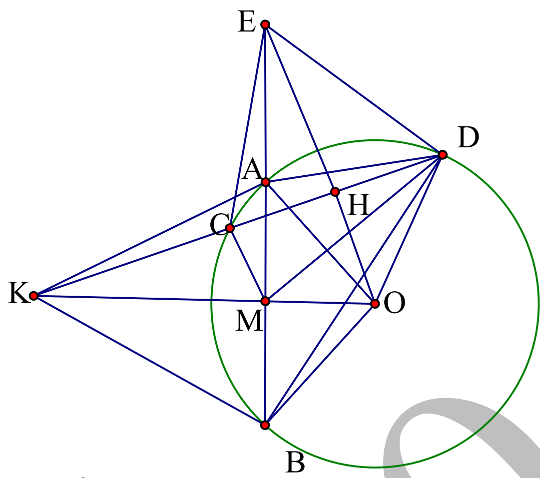
Ta đã có $OI = OA, \widehat{IOG} = \widehat{AON}$, cần chứng minh $\widehat{CIA} = \widehat{IAN}$, muốn vậy phải có $AN//CI$. Ta sẽ chứng minh $\widehat{AND} = \widehat{CID}$. Chú ý đến AI là đường kính, ta có $\widehat{ADI} = 90^0$, do đó ta kẻ $AM \perp OK$ Ta có $AMND$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{AND} = \widehat{AMD}$ (1)

Sử dụng bài 2, ta có $CMOD$ là tứ giác nội tiếp và $\widehat{AMD} = \frac{1}{2}\widehat{CMD} = \frac{1}{2}\widehat{COD}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AND} = \frac{1}{2}\widehat{COD}$. Ta lại có $\widehat{CID} = \frac{1}{2}\widehat{COD}$ nên $\widehat{AND} = \frac{1}{2}\widehat{CID}$.

HS tự giải tiếp.

Bài 9 Từ điểm K nằm ngoài đường tròn ta (O) kẻ các tiếp tuyến KA, KB cát tuyến KCD đến (O). Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $\widehat{ADC} = \widehat{MDB}$.

Giải:



Kẻ $OH \perp CD$, cắt AB ở E.

Theo bài 7, EC là tiếp tuyến của đường tròn (O), nên theo bài toán quen thuộc 3, ta có $ECMD$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{EBD} = \widehat{ECD}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{EMD}$.

Do đó hai góc bù với nhau chúng bằng nhau:
$\widehat{CAD} = \widehat{BMD} \Rightarrow \Delta CAD \sim \Delta BMD$ (g.g) nên $\widehat{ADC} = \widehat{MDB}$