QUỸ TÍCH

PHƯƠNG PHÁP CHUNG ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

I). Định nghĩa:

Một hình H được gọi là tập hợp điểm (Quỹ tích) của những điểm M thỏa mãn tính chất A khi và chỉ khi nó chứa và chỉ chứa những điểm có tính chất A.

II). Phương pháp giải toán:

Để tìm một tập hợp điểm** M **thỏa mãn tính chất** A **ta thường làm theo các bước sau:

Bước 1: **Tìm cách giải:**

+ Xác định các yếu tố cố định, không đổi, các tính chất hình học có liên quan đến bài toán

+ Xác định các điều kiện của điểm M

+ Dự đoán tập hợp điểm.

Bước 2: **Trình bày lời giải:**

A. **Phần thuận:**Chứng minh điểm M thuộc hình H

B. **Giới hạn:** Căn cứ vào các vị trí đặc biệt của điểm M để chứng minh điểm M chỉ thuộc một phần B của hình H (Nếu có)

C. **Phần đảo:** Lấy điểm M bất kỳ thuộc B. Ta chứng minh điểm M thoả mãn các tính chất A

D. **Kết luận:** Tập hợp các điểm M là hình B. (Nêu rõ hình dạng và cách dựng hình B)

III). MỘT SỐ DẠNG QUỸ TÍCH CƠ BẢN TRONG CHƯƠNG TRÌNH THCS

I). TẬP HỢP ĐIỂM LÀ ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

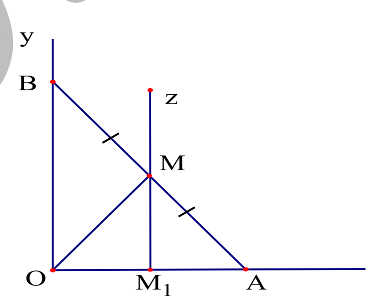
Tập hợp các điểm M cách đều hai điểm A, B

cho trước là đường trung trực của đoạn thẳng AB

Ví dụ 1: Cho góc xOy cố định và điểm A cố định nằm trên tia Ox.

B là điểm chuyển động trên tia Oy, Tìm tập hợp trung điểm M của AB

a) Phần thuận:



+ Xét tam giác vuông OAB ta có :

$OM = MA = MB$ nên

tam giác OAM cân tại M. Mặt khác OA cố định

suy ra M nằm trên đường trung trực của đoạn

thẳng OA.

b) Giới hạn:

+ Khi B trùng với O thì $M \equiv M_1$ là trung điểm OA

+ Khi B chạy xa vô tận trên tia OB thì M chạy xa vô tận trên tia M_1z

c) Phần đảo .

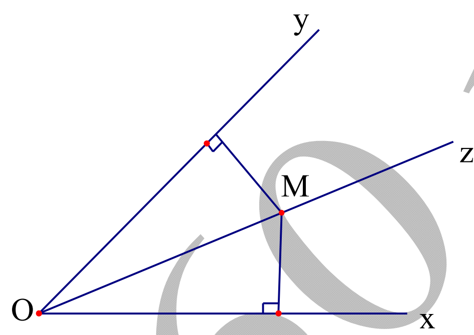
Lấy M bất kỳ thuộc tia M_1z, AM cắt Oy tại B. Suy ra

$MO = MA \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MOA}$. Mặt khác $\widehat{OBM} = \widehat{BOM}$ (cùng phụ với góc $\widehat{MAO} = \widehat{MOA}$) $\Rightarrow MO = MB$. Suy ra $MO = MA = MB$. Hay M là trung điểm của AB.

d) Kết luận: Tập hợp các trung điểm M của AB là đường trung trực của đoạn OA.

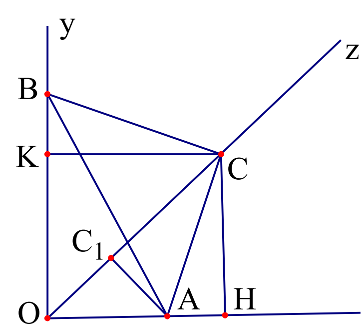
II) TẬP HỢP ĐIỂM LÀ TIA PHÂN GIÁC

Tập hợp các điểm M nằm trong góc xOy khác góc bẹt và cách đều hai cạnh của góc xOy là tia phân giác của góc xOy.



Ví dụ 1) Cho góc xOy trên tia Ox lấy điểm A cố định. B là điểm chuyển động trên tia Oy. Tìm tập hợp các điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại C.

Giải:



a) Phần thuận:

Dựng CH, CK lần lượt vuông góc với Ox, Oy

thì $\Delta vCAH = \Delta vCBK \Rightarrow CH = CK$.

Mặt khác góc xOy cố định

suy ra $C \in$ tia phân giác Oz của góc xOy

b) Giới hạn, Phần đảo: Dành cho học sinh.

c) Kết luận:Tập hợp điểm C là tia phân giác Oz của góc xOy

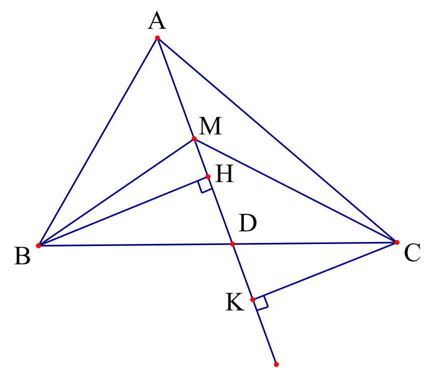
III). TẬP HỢP ĐIỂM LÀ ĐƯỜNG THẲNG , ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Ta thường gặp các dạng tập hợp cơ bản như sau:

1. Tập hợp các điểm M nằm trên đường thẳng đi qua các điểm cố định A, B là đường thẳng AB
2. Tập hợp các điểm M nằm trên đường thẳng đi qua điểm cố định A tạo với đường thẳng (d) một góc không đổi
3. Tập hợp các điểm M cách đường thẳng (d) cho trước một đoạn không đổi h là các đường thẳng song song với (d) và cách đường thẳng (d) một khoảng bằng h

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC .Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\frac{S_{MAB}}{S_{MAC}} = a > 0$ cho trước.

Hướng dẫn:



Phần thuận:

Gọi D là giao điểm của AM và BC .

Vẽ BH, CK lần lượt vuông góc với AM , $H, K \in AM$

Ta có: $\frac{S_{MAB}}{S_{MAC}} = \frac{BH}{CK} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{DB}{DC} = a$.

Suy ra $\frac{BD}{CD} + 1 = \frac{a+1}{a} \Leftrightarrow DB = \frac{a}{a+1} BC \Rightarrow D$ là điểm cố định .

Vậy điểm M nằm trên đường thẳng (d) cố định đi qua A, D.

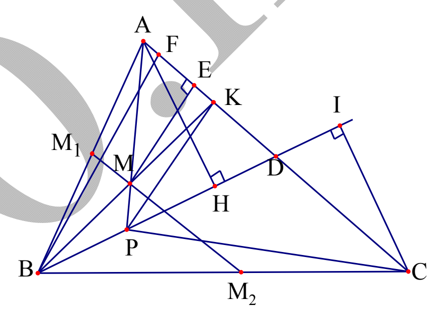
Phần còn lại dành cho học sinh.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và điểm K chuyển động trên cạnh AC, P là điểm chuyển động trên trung tuyến BD của tam giác ABC sao cho $S_{APK} = S_{BPC}$. Gọi M là giao điểm của AP, BK Tìm tập hợp các điểm M.

Hướng dẫn:

Bài toán liên quan đến diện tích nên ta dựng các đường cao

$MF \perp AC, BE \perp AC, AH \perp BD, CI \perp BD$



Ta dễ chứng minh được:

$$\frac{S_{ABK}}{S_{AMK}} = \frac{MK}{BK} = \frac{MF}{BE}, \frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{AH}{CI} = \frac{AD}{DC} = 1$$

Mặt khác ta cũng có: $\frac{S_{APB}}{S_{BPC}} = \frac{AH}{CI} = 1$. Từ giả thiết ta suy ra $S_{APK} = S_{APB}$.

Nhưng $\frac{S_{APK}}{S_{APB}} = \frac{MK}{BM} = 1 \Rightarrow BM = \frac{1}{2} BK$

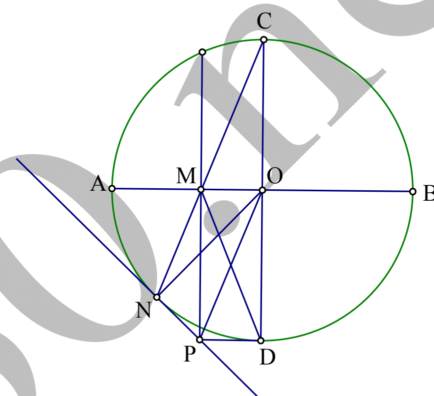
Vậy tập hợp điểm M là đường trung bình song song với cạnh AC của tam giác ABC trừ hai trung điểm M_1, M_2 của tam giác ABC

điểm I.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Một điểm M chuyển động trên đoạn thẳng AB (M không trùng với O, A, B). Đường thẳng CM cắt (O) tại giao điểm thứ 2 là N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của (O) ở điểm P. Chứng minh rằng điểm P luôn chạy trên một đoạn thẳng cố định:

Hướng dẫn:

Điểm M, N cùng nhìn đoạn OP dưới một góc vuông nên tứ giác $MNPO$ nội tiếp suy ra $\widehat{MNO} = \widehat{MPO} = \widehat{MDO}$. Từ đó suy ra $MODP$ là hình chữ nhật. Do đó $MP = OD = R$.



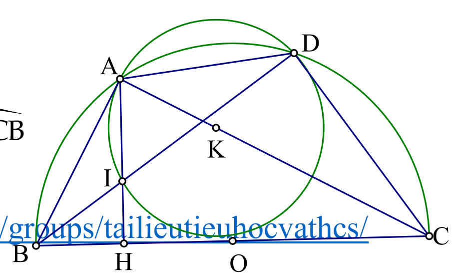
Vậy điểm P nằm trên đường thẳng song song với AB cách AB một khoảng không đổi R

Giới hạn: P thuộc đoạn thẳng nằm giữa hai tiếp tuyến tại A, B của (O)

Ví dụ 4: Cho nửa đường tròn đường kính BC trên nửa đường tròn lấy điểm A (Khác B, C). Kẻ AH vuông góc với $BC (H \in BC)$. Trên cung AC lấy điểm D bất kỳ (khác A, C). Đường thẳng BD cắt AH tại điểm I. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AID luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi D thay đổi trên cung AC.

Hướng dẫn:

Ta có: $\widehat{BDC} = 90^0$, $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$ cùng phụ với góc $\hat{B}$. Mặt khác $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$



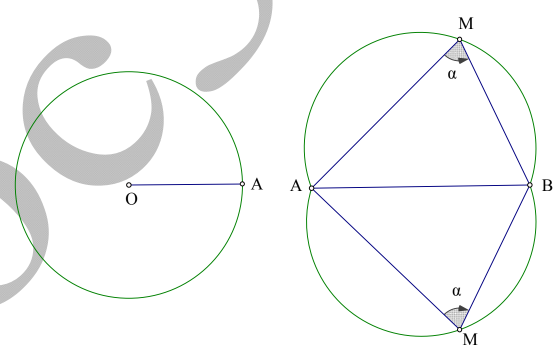
(cùng chắn cung AB). Suy ra

$\widehat{BAI} = \widehat{ADI}$ suy ra AB là tiếp tuyến của

đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI. Mặt khác AC cố định $AC \perp AB$ nên tâm K của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADI luôn thuộc đường thẳng AC.

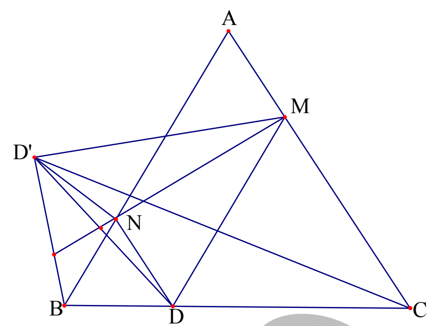
IV. TẬP HỢP ĐIỂM LÀ ĐƯỜNG TRÒN, CUNG CHỨA GÓC.

1. Nếu A, B cố định. Thì tập hợp các điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 90^0$ là đường tròn đường kính AB (Không lấy các điểm A, B)
2. Nếu điểm O cố định thì tập hợp các điểm M cách O một khoảng không đổi R là đường tròn tâm O bán kính R.
3. Tập hợp các điểm M tạo thành với 2 đầu mút của đoạn thẳng AB cho trước một góc $\widehat{MAB} = \alpha$ không đổi $\left(0 < \alpha < 180^0\right)$ là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB. Gọi tắt là ''cung chứa góc ''



Ví dụ 1. Cho tam giác cân ABC $(AB = AC)$ và D là một điểm trên cạnh BC. Kẻ $DM // AB$ ($M \in AC$). $DN // AC (N \in AB)$. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua MN. Tìm quỹ tích điểm D' khi điểm D di động trên cạnh BC.

Hướng dẫn giải:



Phần thuận: Từ giả thiết đề ra ta thấy $NB = ND = ND'$, do đó ba điểm B, D, D' nằm trên đường tròn tâm N. Từ đó $\widehat{BD'D} = \frac{1}{2}\widehat{BND} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (1).

Tương tự ta có ba điểm D', D, C nằm trên đường tròn tâm M. Nên $\widehat{DD'C} = \frac{1}{2}\widehat{DMC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BD'C} = \widehat{BAC}$ (không đổi).

Vì BC cố định, D' nhìn BC dưới một góc $\widehat{BAC}$ không đổi, D' khác phía với D (tức là cùng phía với A so với MN) nên D' nằm trên cung chứa góc $\widehat{BAC}$ vẽ trên đoạn BC (một phần của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Phần đảo: Bạn đọc tự giải.

Kết luận: Quỹ tích của điểm D' là cung chứa góc BAC trên đoạn BC. Đó chính là cung $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

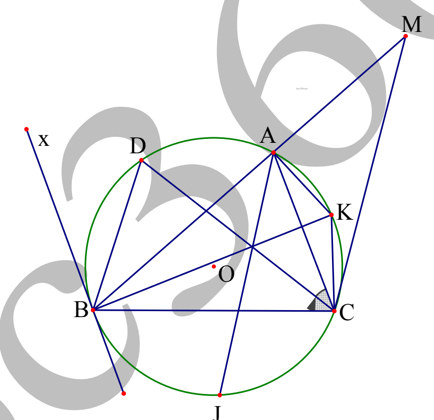
Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, A khác C). Tia phân giác của $\widehat{ACB}$ cắt đường tròn (O) tại điểm D khác điểm C. Lấy điểm I thuộc đoạn CD sao cho $DI = DB$. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm K khác điểm B.

a) Chứng minh rằng tam giác KAC cân.

b) Chứng minh đường thẳng AI luôn đi qua một điểm J cố định.

c) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho $AM = AC$. Tìm quỹ tích các điểm M khi A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O).

Hướng dẫn giải:



a) Ta có $\widehat{DBK} = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{DA} + sđ\overset{\frown}{AK}\right); sđ\widehat{DIB} = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{BD} + sđ\overset{\frown}{KC}\right)$.

Vì $sđ\overset{\frown}{BD} + sđ\overset{\frown}{DA}$ và ΔDBI cân tại D nên $sđ\overset{\frown}{KC} + sđ\overset{\frown}{AK}$. Suy ra $AK = CK$ hay ΔKAC cân tại K (đpcm).

b) Từ kết quả câu a, ta thấy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên đường thẳng AI luôn đi qua điểm J (điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A). Rõ ràng J là điểm cố định.

c). Phần thuận: Do ΔAMC cân tại A, nên $\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Giả sử số đo $\widehat{BAC}$ là 2α (không đổi) thì khi A di động trên cung lớn BC thì M thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn BC về phía điểm O.

Phần đảo: Tiếp tuyến Bx với đường tròn (O) cắt cung chứa góc α vẽ trên đoạn BC tại điểm X. Lấy điểm M bất kỳ trên $\overset{\frown}{Cx}$ (một phần của cung chứa góc α và vẽ trên đoạn $BC(M \# X; M \# C)$. Nếu MB cắt đường tròn (O) tại A thì rõ ràng A thuộc cung lớn BC của đường tròn (O).

Vì $\widehat{BAC} = 2\alpha; \widehat{AMC} = \alpha$ suy ra ΔAMC cân tại A hay $AC = AM$.

Kết luận: Quỹ tích các điểm M là cung $\overset{\frown}{Cx}$, một phần của cung chứa góc α vẽ trên đoạn BC về phía O trừ hai điểm C và X.

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC cố định. A là điểm di động trên đoạn thẳng BC. D là tâm của đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với $(O;R)$ tại B; E là tâm của đường tròn đi qua A, C và tiếp xúc với $(O;R)$ tại C. Tìm tập hợp các giao điểm M khác A của hai đường tròn (D) và (E).

Hướng dẫn:

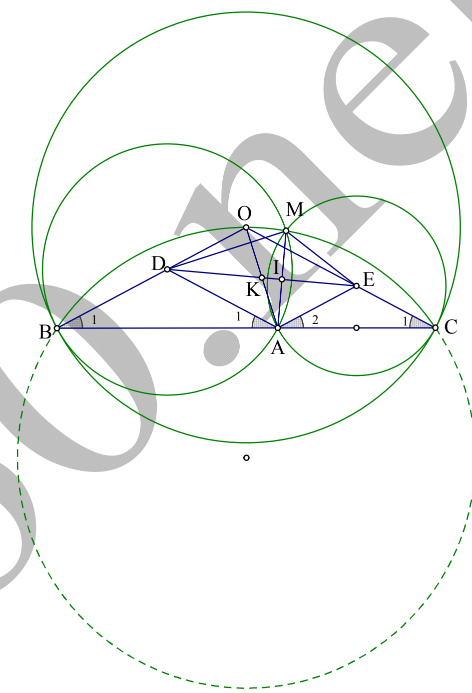
a) Phần thuận:

(O) và (D) tiếp xúc tại $B \Rightarrow O, B, D$ thẳng hàng; (O) và (E) tiếp xúc tại $C \Rightarrow O, E, C$ thẳng hàng. $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}\,(DB = DA)$, $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}\,(OB = OC)$,

$\widehat{A_2} = \widehat{C_1}\left(EA = EC\right)$. Suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{A_2}, \widehat{A_1} = \widehat{C_1}$,

$\widehat{B_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow BO//AE, \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow DA//OE$.

Do đó $ADOE$ là hình bình hành.



Gọi K là tâm hình bình hành $ADOE \Rightarrow K$ là trung điểm của AO và DE. (D) cắt (E) tại A, M $\Rightarrow DE$ là trung trực của AM.

Gọi I là giao điểm của DE và AM.

IK là đường trung bình của $\Delta AMO \Rightarrow IK//MO \Rightarrow DOME$ là hình thang. Mà $DM = OE$ (cùng bằng bán kính của (D)).

Vậy D, M, O, E là bốn đỉnh của hình thang cân. Do đó D, M, O, E cùng thuộc một đường tròn.

$\Delta MBC \sim \Delta ADE\left(\widehat{MBC} = \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{ADM}, \widehat{MCB} = \widehat{AED} = \frac{1}{2}\widehat{AEM}\right)$,

suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{DAE} = \widehat{DOE}$ (không đổi). BC cố định. vậy M thuộc cung chứa góc $\widehat{BOC}$.

b) Giới hạn:

Khi $A \equiv B$ thì $M \equiv B$, Khi $A \equiv C$ thì $M \equiv C$. Vậy M chuyển động trên cung chứa $\widehat{BOC}$.

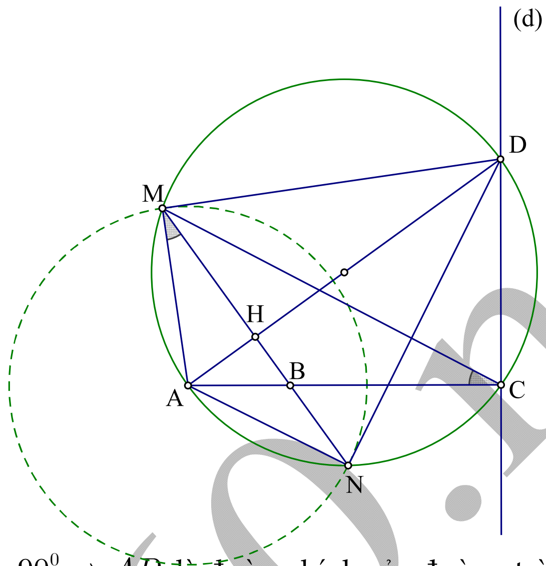
c) Phần đảo: Lấy điểm M bất kỳ trên cung chứa góc $\widehat{BOC}$. Dựng đường tròn (D) qua M và tiếp xúc (O) tại B, đường tròn (D) cắt BC tại A. Dựng đường tròn (E) qua M, A, C. Cần chứng minh (E) tiếp xúc (O) tại C. Thật vậy, từ B, C dựng hai tiếp tuyến Bx, Cy của (O) ta có

$\widehat{BMA} = \widehat{ABx}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$), $\widehat{ABx} = \widehat{ACy}$ (vì $NB = NC$). Suy ra $\widehat{BMA} = \widehat{ACy}$, suy ra Bx, Cy, MA đồng quy tại N. Do đó $\widehat{AMC} = \widehat{ACy}$, suy ra CN là tiếp tuyến của (E) qua N, A, C. Vậy (E) và (O) tiếp xúc nhau tại C.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm M là cung chứa góc $\widehat{BOC}$ dựng trên đoạn BC.

Ví dụ 4. Cho ba điểm A, B, C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ đường thẳng (d) vuông góc với AC tại C, D là điểm di động trên đường thẳng (d). Từ B vẽ đường thẳng vuông góc AD tại $H\left(H \in AD\right)$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD tại M, N. Tìm tập hợp các điểm M, N.

Hướng dẫn:



a) Phần thuận: $\widehat{ACD} = 90^0 \Rightarrow AD$ là đường kính của đường tròn $\left(ACD\right) \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}, AM = AN$. Xét ΔAMB và ΔACM có $\widehat{M}$ chung, $\widehat{AMB} = \widehat{ACM}\left(\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AM}\right)$. Do đó $\Delta AMB \sim \Delta ACM$, suy ra $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AB}{AM} \Rightarrow AM^2 = AB.AC \Rightarrow AM = \sqrt{AB.AC}$ (không đổi). Vậy $AM = AN = \sqrt{AB.AC}$ không đổi. Do đó M, N thuộc đường tròn cố định $\left(A;\sqrt{AB.AC}\right)$.

b) Giới hạn: Điểm D chuyển động trên đường thẳng $\left(d\right)$ nên M, N chuyển động trên đường tròn $\left(A;\sqrt{AB.AC}\right)$.

c) Phần đảo: Lấy điểm M bất kỳ thuộc đường tròn $\left(A;\sqrt{AB.AC}\right)$. Vẽ $AH \perp MB\left(H \in MB\right)$ cắt $\left(d\right)$ tại D; MH cắt $\left(A;\sqrt{AB.AC}\right)$ tại N. Ta có

$AM = AN = \sqrt{AB.AC}$. $\Delta AHB \sim \Delta ACD$ ($\widehat{A}$ chung,

$\widehat{AHB} = \widehat{ACD} = 90^0$) $\Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AH.AD = AB.AC$. Do đó

$AM^2 = AN^2 = AH.AD$. Xét ΔAMH và ΔADM có $\widehat{A}$ chung,

$\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AH}{AM}\left(AM^2 = AH.AD\right)$. Do đó

$\Delta AMH \sim \Delta ADM \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{AMD}$. Mà $\widehat{AHM} = 90^0$ nên

$\widehat{AMD} = 90^0 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔACD.

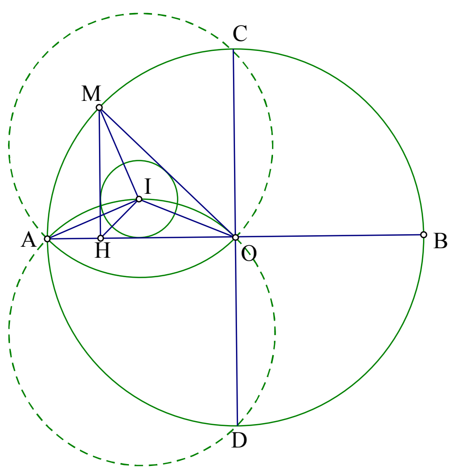
Tương tự N cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔACD.

d). Kết luận: Tập hợp các điểm M là đường tròn $\left(A;\sqrt{AB.AC}\right)$.

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O;R)$ hai đường kính AB và CD vuông góc.

M là điểm di động trên $\overset{\frown}{CAD}$. H là hình chiếu của M trên AB. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HMO. Tìm tập hợp các điểm I.

Hướng dẫn:



a) Phần thuận:

ΔHMO có

$\widehat{H} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HMO} + \widehat{HOM} = 90^0$.

Do đó $\widehat{IMO} + \widehat{IOM} = \dfrac{1}{2}\widehat{HOM} = 45^0$

ΔIMO có $\widehat{OIM} = 180^0 - \left(\widehat{IMO} + \widehat{IOM}\right) = 135^0$. Xét ΔIMO và ΔIAO có OI (chung); $OM = OA(= R)$; $\widehat{IOM} = \widehat{IOA}$ (I là tâm đường tròn nội tiếp ΔHMO). Do đó $\Delta IMO = \Delta IAO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IOM} = \widehat{OIA}$

$\widehat{OIA} = 135^0$, OA cố định. Do đó I thuộc cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn thẳng OA.

b) Giới hạn:

$M \to A$ thì $I \to A$. Khi $M \to C$ thì $I \to O$.Khi $M \to D$ thì $I \to O$. Vậy M chuyển động trên hai cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn thẳng OA.

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ trên cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn $OA \Rightarrow \widehat{OIA} = 135^0$. Vẽ tia $OM, M \in (O)$ sao cho OI là tia phân giác của $\widehat{AOM}$.

Xét ΔIMO và ΔIAO có $OM = OA = R, \widehat{IOM} = \widehat{IOA}$, OI (cạnh chung). Do đó $\Delta IMO = \Delta IAO$ (c.g.c), suy ra $\widehat{OIM} = \widehat{OIA} = 135^0$.

ΔIMO có $\widehat{IMO} + \widehat{IOM} = 180^0 - \widehat{OIM} = 45^0 \Rightarrow \widehat{HOM} + 2.\widehat{IOM} = 90^0$

$\widehat{HOM} + \widehat{HMO} = 90^0$. Do đó $\widehat{HMO} = 2\widehat{IMO}$, suy ra MI là phân giác $\widehat{HMO}$. Do đó I là tâm đường tròn nội tiếp ΔHMO.

d) Kết luận:

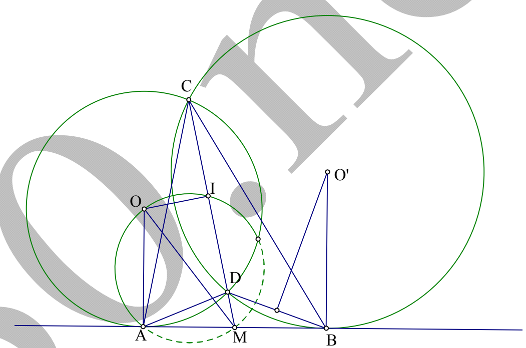
Tập hợp các tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác HMO là cung chứa góc 135^0 vẽ trên đoạn thẳng OA (trừ hai điểm A và O).

Ví dụ 6. Cho đường tròn (O) điểm A cố định trên đường tròn. Trên tiếp tuyến tại A lấy một điểm B cố định. Gọi đường tròn (O') là đường tròn tiếp xúc với AB tại B có bán kính thay đổi. Tìm tập hợp các trung điểm I của dây chung CD của (O) và (O').

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: CD cắt AB tại M.

Xét ΔMAD và ΔMCA có $\widehat{AMD}$ (chung), $\widehat{MAD} = \widehat{MCA}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến, dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$).



Do đó $\Delta MAD \sim \Delta MCA \Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$. Chứng minh tương tự ta có $MB^2 = MC.MD$. Suy ra $MA^2 = MB^2 \Rightarrow MA = MB \Rightarrow M$ cố định. $IC = ID \Rightarrow OI \perp CD$

$\widehat{OIM} = 90^0, OM$ cố định. Do đó I thuộc đường tròn đường kính OM.

b) Giới hạn: Điểm I là trung điểm dây cung CD của $(O) \Rightarrow I$ nằm trong đường tròn $(O) \Rightarrow I$ chuyển động trên đường tròn đường kính OM nằm trong đường tròn (O).

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ trên đường tròn đường kính OM (phần nằm trong đường tròn (O))

$\Rightarrow \widehat{OIM} = 90^0$. MI cắt (O) tại C, D. Gọi (O') là đường tròn (BDC).

$OI \perp CD \Rightarrow I$ là trung điểm CD. $\Delta MAD \sim \Delta MCA$ (vì $\widehat{AMD}$ chung, $\widehat{MAD} = \widehat{MCD}$) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA}$. Mà $MA = MB$, suy ra $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MD}{MB}$.

Xét ΔMDB và ΔMBC có $\widehat{M}$ chung, $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MD}{MB}$. Do đó

$\Delta MDB \sim \Delta MBC \Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MCB}$. Vẽ $O'H \perp DB$, ta có

$\widehat{HO'B} = \widehat{MCB}$ suy ra $\widehat{MBD} = \widehat{HO'B}$. Do đó

$\widehat{MBD} + \widehat{HBO'} = \widehat{HO'B} + \widehat{HBO'} = 90^0 \Rightarrow O'B \perp AB \Rightarrow AB$ tiếp xúc với đường tròn (O').

d) Kết luận: Tập hợp các điểm I là đường tròn đường kính OM (phần nằm trong đường tròn (O).

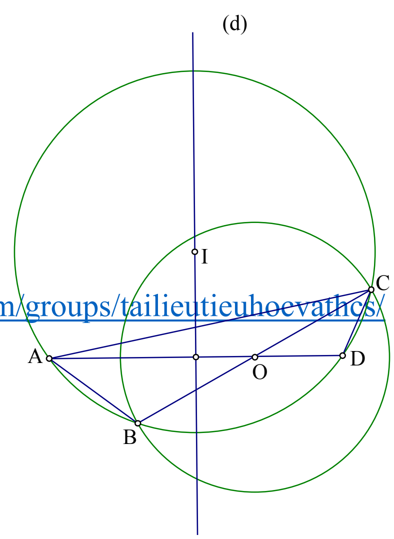
MỘT SỐ BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1. Cho đường tròn (O), A là điểm cố định nằm ngoài đường tròn (O). OBC là đường kính quay quanh O. Tìm tập hợp tâm I đường ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận:

Gọi D là giao điểm của AO với đường tròn (I) $(A \neq D)$.



Xét ΔOAB và ΔOCD có:

$\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ (cùng chắn $\overset\frown{BD}$)

của (I)); $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (đối đỉnh). Do đó

$\Delta OAB \sim \Delta OCD \Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} \Rightarrow OA.OD = OB.OC$

$\Rightarrow OA.OD = R^2 \Rightarrow OD = \dfrac{R^2}{OA} \Rightarrow OD = \dfrac{R^2}{OA}, \dfrac{R^2}{OA}$ không đổi $\Rightarrow D$ cố định. Vậy I thuộc đường thẳng (d) cố định là trung trực của đoạn thẳng AD.

b) Giới hạn:

Khi BOC qua A thì $I \to I_1$ (I_1 là trung điểm của AD).

Khi BOC không qua A thì I chạy xa vô tận trên đường thẳng (d).

Vậy I chuyển động trên đường thẳng (d) (trừ điểm I_1 là trung điểm AD là đường trung trực của đoạn thẳng AD.

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc đường thẳng (d) $(I \neq I_1)$. Vẽ đường tròn $(I;IA)$ cắt đường tròn (O) tại B. BO cắt $(I;IA)$ tại C. Ta có: $IA = ID \Rightarrow D$ thuộc đường tròn tâm I bán kính
IA

$\Delta OAB \sim \Delta OCD \Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} \Rightarrow OC = \dfrac{OA.OD}{OB} = \dfrac{OA.\dfrac{R^2}{OA}}{R} = R \Rightarrow C$ thuộc đường tròn (O).

d) Kết luận: Tập hợp các điểm I là đường trung trực của đoạn thẳng AD (với D thuộc tia đối của tia OA và $OD = \dfrac{R^2}{OA}$)trừ điểm I_1 (I_1 là trung điểm của đoạn thẳng AD).

Câu 2. Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ đường kính AB. Vẽ đường thẳng $\left(d\right)$ vuông góc với AB tại $I\left(I \in AB\right)$. Gọi M là điểm chuyển động trên đường tròn $\left(O;R\right)$. MA và MB lần lượt cắt $\left(d\right)$ tại C và D. Tìm tập hợp các tâm J của đường tròn qua ba điểm A,D,C.

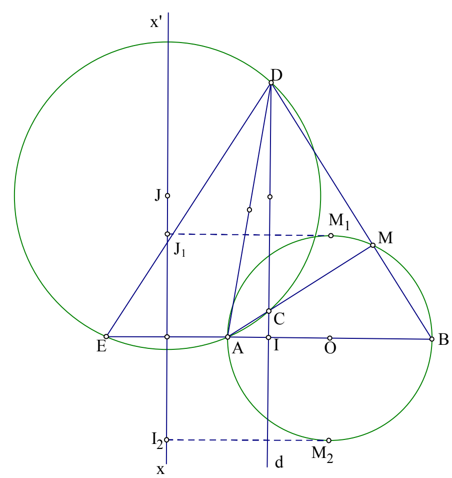
Hướng dẫn:

a) Phần thuận: Gọi E là điểm đối xứng của B qua $\left(d\right) \Rightarrow E$ cố định.

$\widehat{EDC} = \widehat{BDC}; \widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\widehat{CAI} = \widehat{BDC}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

Suy ra $\widehat{EDC} = \widehat{CAI} \Rightarrow$ tứ giác $EDCA$ nội tiếp $\Rightarrow$ đường tròn qua ba điểm A,D,C đi qua hai điểm cố định A,E.



Vậy tâm I của đường tròn qua ba điểm A,D,C thuộc đường thẳng cố định là đường trung trực xy của đoạn thẳng AE.

b) Giới hạn:

+ Khi $M \equiv M_1$ thì $J \equiv J_1$ (M_1 là trung điểm $\overset{\frown}{AB}$; $J_1M_1 \perp OM_1, J_1 \in (d)$

+ Khi $M \equiv M_2$ thì $J \equiv J_2$ (M_2 là trung điểm $\overset{\frown}{AB}$;
$J_2M_2 \perp OM_2, J_2 \in (d)$

Do đó J chuyển động trên hai tia J_1x, J_2y của đường trung trực của đoạn thẳng AE.

c)Phần đảo: Lấy điểm J bất kỳ trên tia J_1x (hoặc J_2y). Vẽ đường tròn $(J;JA)$ cắt (d) tại C, D.

AC cắt BD tại M.

Ta có: $JE = JA$ (J thuộc trung trực của AE) $\Rightarrow E \in (J, JA)$.

$\widehat{ACI} = \widehat{DEA}$ ($EDCA$ nội tiếp (J)); $\widehat{DBE} = \widehat{DEA}$ (B, E đối xứng qua (d)).

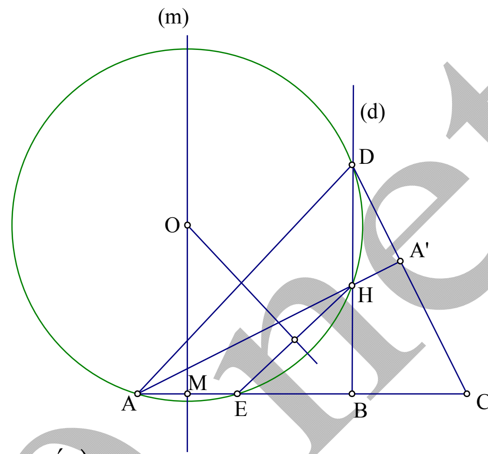
Suy ra $\widehat{ACI} = \widehat{DBE} \Rightarrow$ tứ giác $ICMB$ nội tiếp đường tròn.

Mà $\widehat{CIB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{CMB} = 90^0 \Rightarrow M$ thuộc đường tròn (O).

d)Kết luận: Tập hợp các tâm J đường tròn qua ba điểm A, D, C là hai tia J_1y của đường trung trực của đoạn thẳng AE.

Câu 3. Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Trên đường thẳng d vuông góc AB tại B lấy điểm bất kỳ D. Gọi H là trực tâm của tam giác DAC. Tìm tập hợp các tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác DAH.

Hướng dẫn:



a) Phần thuận: AC cắt (O) tại A, E.

Xét ΔBAH và ΔBDC có:

$\widehat{ABH} = \widehat{DBC}\left(= 90^0\right)$;

$\widehat{BAH} = \widehat{BDC}$

(hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc).

Do đó $\Delta BAH \sim \Delta BDC \Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BH}{BC}$. Suy ra: $BD.BH = AB.BC$ (không đổi) (1)

Xét ΔBAD và ΔBHE có: $\widehat{B}$ chung, $\widehat{BAD} = \widehat{BHE}$ (tứ giác $ADHE$ nội tiếp). Do đó:

$\Delta BAD \sim \Delta BHE \Rightarrow \dfrac{BA}{BH} = \dfrac{BD}{BE} \Rightarrow BA.BE = BD.BE \Rightarrow BC = BE$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $BD.BH = AB.BC = BA.BE \Rightarrow BC = BE$. E thuộc đường thẳng cố định AB suy ra E cố định. $OA = OE$ (O là tâm đường tròn $\left(DAH\right)$) $\Rightarrow O$ thuộc đường thẳng cố định , $\left(m\right)$ là đường trung trực của đoạn thẳng AE.

b) Giới hạn: D chuyển động trên cả đường thẳng $\left(d\right)$ nên O chuyển động trên cả đường thẳng $\left(m\right)$ (loại trừ điểm m là giao điểm của AC và $\left(m\right)$).

c) Phần đảo: Lấy O bất kỳ trên đường thẳng $\left(m\right)$. Vẽ đường tròn $\left(O;OA\right)$ cắt đường thẳng $\left(d\right)$ lần lượt tại H, D.

$OA = OE$ nên $E \in \left(O;OA\right)$. Xét ΔBAD và ΔBHE có: $\widehat{B}$ chung;

$\widehat{BAD} = \widehat{BHE}$ (tứ giác $ADHE$ nội tiếp). Suy ra:

$\Delta BAD \sim \Delta BHE \Rightarrow \dfrac{BA}{BH} = \dfrac{BD}{BE} \Rightarrow BA.BE = BD.BH$. Mà $BE = BC$

do đó: $BD.BH = AB.BC \Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BH}{BC}$. Xét ΔBAH và ΔBDC có:

$\widehat{ABH} = \widehat{DBC}\left(= 90^0\right)$; $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BH}{BC}$. Do đó

$\Delta BAH \sim \Delta BDC \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{BDC}$.

Mà $\widehat{DBC} + \widehat{BCD} = 90^0$ nên

$\widehat{BAH} + \widehat{BCD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AA'C} = 90^0 \Rightarrow AH \perp DC$.

ΔADC có $DB \perp AC, AH \perp DC \Rightarrow H$ là trực tâm của ΔDAC.

d) Kết luận: Tập hợp các tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác DAH là đường trung trực $\left(m\right)$ của đoạn thẳng AE (trừ điểm M là giao điểm của AC với $\left(m\right)$ (với E là điểm đối xứng của C qua B).

Câu 3. Cho tam giác cân ABC nội tiếp trong đường tròn $\left(O;R\right)$ có $AB = AC = R\sqrt{2}$. M là điểm chuyển động trên cung nhỏ AC đường thẳng AM cắt đường thẳng BC tại D. Tìm tập hợp các điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: $AB = AC = R\sqrt{2}$ (gt); AB, AC là dây cung của $\left(O;R\right)$ nên AB, AC là các cạnh của hình vuông nội tiếp $\left(O;R\right)$ suy ra

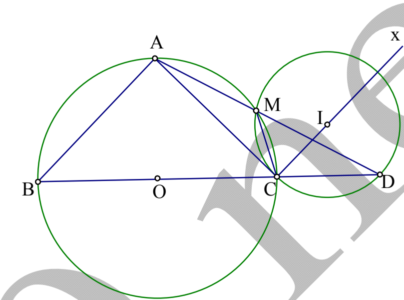
ΔABC vuông cân tại A, suy ra BC là đường kính của $(O;R)$,

$\widehat{CID} = 2\widehat{CMD} = 90^0$

Ta có: $\widehat{CMD} = 45^0 \Rightarrow \widehat{CMD}$ nhọn,

do đó $\widehat{CMD} = \dfrac{1}{2}\widehat{CID} \Rightarrow \widehat{CID} = 90^0$.

ΔICD có $IC = ID(= R) \Rightarrow \Delta ICD$



cân tại I mà $\widehat{CID} = 90^0$ nên ΔICD vuông cân tại I, suy ra $\widehat{ICD} = \widehat{IDC} = 45^0$. Ngoài ra $\widehat{ACB} = 45^0$ do đó $\widehat{ACI} = 90^0$.

$\widehat{ACI} = 90^0$ và AC cố định Cx vuông góc với AC tại C.

b) Giới hạn:

Khi $M \equiv C$ thì $I \equiv C$.

Khi $M \equiv A$ thì I chạy xa vô tận trên tia Cx.

Vậy I chuyển động trên tia Cx vuông góc với AC tại C.

c) Phần đảo: Lấy I bất kỳ thuộc tia Cx. Vẽ đường tròn $(I;IC)$, đường tròn này cắt BC tại B, cắt (O) tại M $(M \neq C; D \neq C)$. Tứ giác $BAMC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{AMC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AMC} = 135^0$.

ΔICD có $IC = ID\left(=r\right) \Rightarrow \widehat{IDC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{CID} = 90^0$

$\widehat{CMD} = \dfrac{1}{2}\widehat{CID} \Rightarrow \widehat{CID} = 45^0$

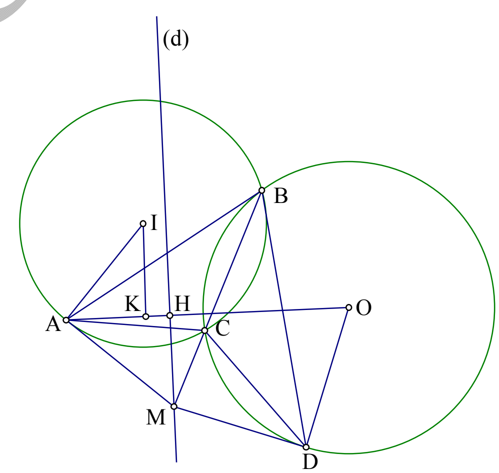
$\widehat{AMC} + \widehat{CMD} = 135^0 + 45^0 = 180^0 \Rightarrow A, M, D$ thẳng hàng.

d) Kết luận: Tập hợp các tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔMCD là tia Cx vuông góc với AC tại C.

Câu 4. Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ và điểm A cố định. Đường tròn tâm I di động qua A cắt $\left(O\right)$ tại B,C. Gọi M là giao điểm của BC và tiếp tuyến tại A của đường tròn $\left(I\right)$. Tìm tập hợp các điểm M.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: Vẽ tiếp tuyến MD với $\left(O\right)$ $\left(D \in \left(O\right)\right)$.



Xét ΔMAC và ΔMBA có $\widehat{M}$ chung,

$\widehat{MAC} = \widehat{MBA}$,(góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AC)của $\left(I\right)$.

Do đó $\Delta MAC \sim \Delta MBA$.

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$.

Tương tự $MD^2 = MB.MC$. Mặt khác,

ΔMOD có $\widehat{D} = 90^0$ nên theo định lý Pitago, ta có:
$MD^2 = MO^2 - OD^2 = MO^2 - R^2$. Do đó $MA^2 = MO^2 - R^2$, suy ra
$MO^2 - MA^2 = R^2$.

$\Delta HMA\left(\widehat{MHA} = 90^0\right) \Rightarrow MA^2 = MH^2 + AH^2$

$\Delta HMO\left(\widehat{MHO} = 90^0\right) \Rightarrow MO^2 = MH^2 + HO^2$. Do đó:

$\left(MH^2 + OH^2\right) - \left(MH^2 + AH^2\right) = R^2 \Rightarrow OH^2 - AH^2 = R^2$;

Do đó

$$\left(OH + AH\right)\left(OH - AH\right) = R^2 \Rightarrow \begin{cases} OH - AH = \dfrac{R^2}{OA} \\ OH + AH = OA \end{cases} \Rightarrow OH = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R^2}{OA} + OA\right)$$

(không đổi) $\Rightarrow H$ cố định. H cố định, OA cố định, $MH \perp AO$ tại H. Vậy M thuộc đường thẳng (d) vuông góc với OA tại H.

b) Giới hạn: O chuyển động trên cả đường thẳng (d).

c) Phần đảo: Lấy M bất kỳ thuộc đường thẳng (d). Vẽ cát tuyến MBC với (O) $\left(B, C \in (O)\right)$, vẽ đường tròn (I) qua A, B, C vẽ tiếp tuyến MD với (O) $\left(D \in (O)\right)$.

Xét ΔMCD và ΔMDB có $\widehat{M}$ (chung), $\widehat{MDC} = \widehat{MBD}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung CD của (O)).

Do đó $\Delta MCD \sim \Delta MDB \Rightarrow \dfrac{MC}{MD} = \dfrac{MD}{MB} \Rightarrow MD^2 = MB.MC$

ΔMDO có $\widehat{D} = 90^0 \Rightarrow MD^2 = MO^2 - OD^2 = MO^2 - R^2$.

Suy ra $MB.MC = MO^2 = R^2$; mà $HO^2 - AH^2 = R^2$, do đó

$MB.MC = MO^2 - \left(HO^2 - AH^2\right) = \left(MO^2 - HO^2\right) + AH^2 =$

$MH^2 + AH^2 = MA^2$.Xét ΔMAC và ΔMBA có $\widehat{AMC}$ (chung);

$\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MA}$ (vì $MB, MC = MA^2$).Do đó

$\Delta MAC \sim \Delta MBA \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MBA}$. Vẽ $IK \perp AC$ ta có

$\widehat{AIK} = \widehat{ABC}\left(= \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC}\right)$ suy ra: $\widehat{MAC} = \widehat{AIK}$. Mặt khác ΔAKI có

$\widehat{K} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AIK} + \widehat{IAK} = 90^0$ nên $\widehat{MAC} + \widehat{IAK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IAM} = 90^0$,

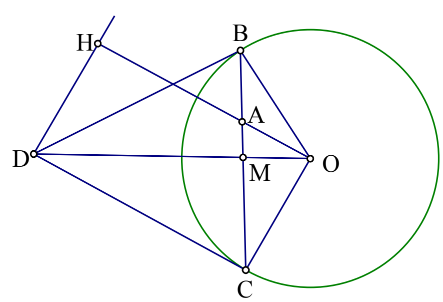
do đó MA là tiếp tuyến của (I).

d) Kết luận: Tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với OA tại H (với $OH = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R^2}{OA} + OA\right)$)

Câu 5. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định trong đường tròn $(A \neq 0)$ BC là dây cung di động quay quanh A. Các tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (O) cắt nhau tại D. Tìm tập hợp các điểm D.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: Gọi M là giao điểm của OD và BC.



Vẽ $DH \perp OA\left(H \in OA\right)$, $DB = DC$ (định lý tiếp tuyến), $OB = OC\left(= R\right)$

suy ra DO là trung trực của $BC \Rightarrow DO \perp BC$.

Xét ΔOMA và ΔOHD có $\widehat{O}$ chung, $\widehat{OMA} = \widehat{OHD}\left(= 90^0\right)$. Do đó

$\Delta OMA \sim \Delta OHD \Rightarrow \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OM}{OH} \Rightarrow OA.OH = OM.OD$, ΔOBD có

$\widehat{B} = 90^0; BM \perp OD$ nên $OM.OD = OB^2 = R^2$. Suy ra

$OA.OH = R^2 \Rightarrow OH = \dfrac{R^2}{OA}$ (không đổi) $\Rightarrow H$ cố định. Vậy D thuộc đường thẳng cố định $\left(d\right)$ vuông góc với đường thẳng OA tại H.

b) Giới hạn: BC quay quanh A nên D chuyển động trên đường thẳng $\left(d\right)$.

c) Phần đảo: Lấy D bất kỳ trên đường thẳng $\left(d\right)$. Vẽ dây BC qua A và vuông góc với OD tại $M\left(M \in OD\right)$. Xét

$\Delta OMA \sim \Delta OHD \Rightarrow \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OM}{OH} \Rightarrow OA.OH = OM.OD$. Mà

$OA.OH = R^2$ nên $OM.OD = R^2 = \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{OB}{OD}$ do đó

$\Delta OMB \sim \Delta OBD$,

suy ra $\widehat{OMB} = \widehat{OBD}$ có $\widehat{MOB}$ (chung); $\dfrac{OM}{OB} = \dfrac{OB}{OD}$ do đó

$\Delta OMB \sim \Delta OBD$,

suy ra $\widehat{OMB} = \widehat{OBD}$; mà $\widehat{OMB} = 90^0$ nên $\widehat{OBD} = 90^0 \Rightarrow DB$ là tiếp tuyến của $\left(O\right)$.

Tương tự DC là tiếp tuyến của $\left(O\right)$.

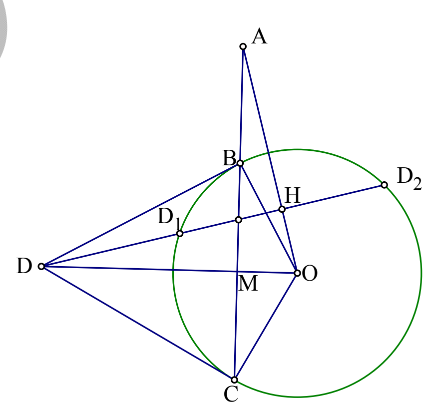
d) Kết luận: Tập hợp các điểm D là đường thẳng (d) vuông góc với OA tại H (với $OH = \dfrac{R^2}{OA}$).

Câu 6. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Cát tuyến (m) qua A cắt đường tròn (O) tại B và C. Tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (O) cắt nhau tại D. Tìm tập hợp các điểm D.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: Gọi M là giao điểm của OD và BC. Vẽ đường thẳng d qua D vuông góc với OA tại H $(H \in OA)$.

$DB = DC$ (định lý tiếp tuyến); $OB = OC(= R)$. Suy ra DO là trung trực của $BC \Rightarrow DO \perp BC$.



Xét ΔOMA và ΔOHD

có $\widehat{MOA}$ chung; $\widehat{OMA} = \widehat{OHD}\left(= 90^0\right)$

do đó $\Delta OMA \sim \Delta OHD \Rightarrow$

$\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OM}{OH} \Rightarrow OA.OH = OM.OD$

ΔOBD có $\widehat{B} = 90^0$, $BM \perp OD$ nên $OM.OD = OB^2 = R^2$, suy ra $OA.OH = R^2$ hay $OH = \dfrac{R^2}{OA}$ không đổi $\Rightarrow H$ cố định. Vậy D thuộc đường thẳng (d) cố định vuông góc với đường thẳng OA tại H.

b) GIới hạn: D nằm ngoài đường tròn $\left(O;R\right)$, do đó D chuyển động trên đường thẳng $\left(d\right)$ trừ đoạn thẳng D_1D_2 (với D_1,D_2 là giao điểm của $\left(d\right)$ và đường tròn $\left(O;R\right)$.

c) Phần đảo: Lấy điểm D bất kỳ trên đường thẳng $\left(d\right)$ trừ đoạn thẳng D_1D_2. Vẽ đường thẳng $\left(m\right)$ qua A vuông góc với OD cắt đường tròn $\left(O;R\right)$ tại B,C cắt OD tại M.

Xét ΔOMA và ΔOHD có $\widehat{MOA}$ chung; $\widehat{OMA}=\widehat{OHA}\left(=90^0\right)$,

do đó $\Delta OMA\sim\Delta OHD\Rightarrow\dfrac{OA}{OD}=\dfrac{OM}{OH}\Rightarrow OA.OH=OM.OD$.

Mà $OA.OH=R^2$ nên $OM.OD=R^2$, suy ra $\dfrac{OM}{OB}=\dfrac{OB}{OD}$.

Xét ΔOMB và ΔOBD có $\widehat{O}$ chung; $\dfrac{OM}{OB}=\dfrac{OB}{OD}$, do đó $\Delta OMB\sim\Delta OBD$, suy ra $\widehat{OMB}=\widehat{OBD}$ mà $\widehat{OMB}=90^0$ nên $\widehat{OBD}=90^0\Rightarrow DB$ là tiếp tuyến của $\left(O\right)$.

Tương tự DC là tiếp tuyến của $\left(O\right)$.

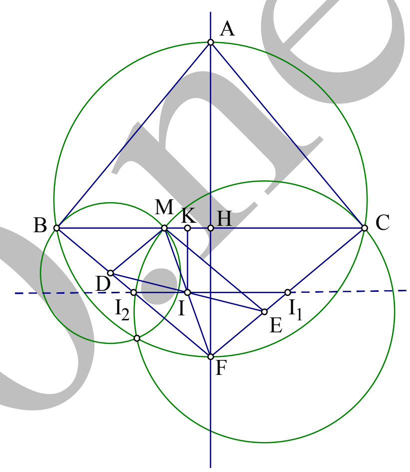
d) Kết luận: Tập hợp các điểm D là đường thẳng $\left(d\right)$ (trừ đoạn thẳng D_1D_2) vuông góc với OA tại H (với $OH=\dfrac{R^2}{OA}$).

Câu 7. Tam giác ABC cân tại A cố định nội tiếp trong đường tròn $\left(O;R\right)$. Điểm M di động trên cạnh BC. Gọi D là tâm đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AB tại B. Gọi E là tâm đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Tìm tập hợp các điểm I là trung điểm của DE.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận:

Vẽ đường kính AF của đường tròn (O);



$\widehat{ABF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

$\widehat{ABD} = 90^0$ (AB tiếp xúc với (D) tại B).

Suy ra B, D, F thẳng hàng.

Tương tự C, E, F thẳng hàng.

ΔABC cân tại $A \Rightarrow AF \perp BC$; $\Rightarrow \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{CF}; \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

$BD = DM \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{DMB}; EM = EC \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{EMC}$.

Suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{DMB} = \widehat{EMC} = \widehat{C_1}$.

$\widehat{B_1} = \widehat{EMC} \Rightarrow BF // ME; \widehat{C_1} = \widehat{DMB} \Rightarrow MD // CF$.

$\begin{cases} BF // ME \\ MD // CF \end{cases} \Rightarrow DMEF$ là hình bình hành mà I là trung điểm của $DE \Rightarrow I$ là trung điểm của MF.

Vẽ $IK \perp BC$.

ΔFMH có $IK//FH\left(IK\perp BC, FH\perp BC\right)$; I là trung điểm của MF

$\Rightarrow IK$ là đường trung bình của $\Delta FMH \Rightarrow IK=\frac{1}{2}FH$ (không đổi).

Vậy I thuộc đường thẳng $\left(d\right)$ song song với BC cách BC một khoảng bằng $\frac{1}{2}FH$.

b) Giới hạn:

Khi $M\equiv B$ thì $I=I_1$ (I_1 là trung điểm của BF);

Khi $M\equiv C$ thì $I=I_2$ (I_2 là trung điểm của CF).

Do đó I chuyển động trên đoạn thẳng I_1I_2.

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc đoạn thẳng I_1I_2, FI cắt BC tại M.

Vẽ $MD//CF\left(D\in BF\right), ME//BF\left(E\in CF\right)\Rightarrow DMEF$ là hình bình hành mà I là trung điểm của MF $\Rightarrow I$ là trung điểm của DE.

Dễ dàng chứng minh được $DB=DM$ và $EM=EC$.

Do đó AB tiếp xúc với $\left(D\right); AC$ tiếp xúc với $\left(E\right)$.

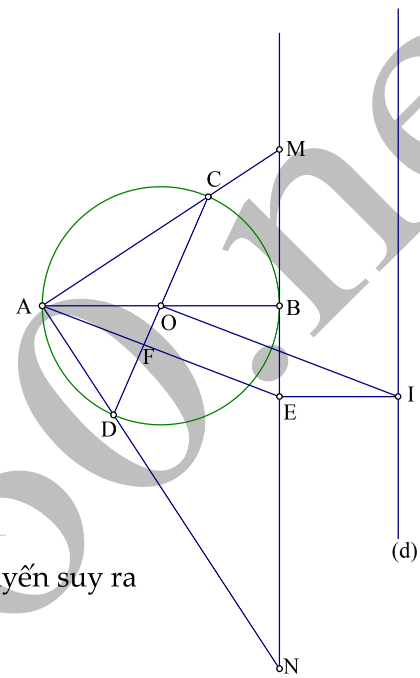
d) Kết luận: Tập hợp các điểm I là đường trung bình của tam giác FBC (với F là trung điểm của $\overset{\frown}{BC}$).

Câu 8. Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ đường kính cố định AB và đường kính CD di động. AC và AD cắt tiếp tuyến $\left(a\right)$ với $\left(O\right)$ tại B lần lượt tại M và N. Tìm tập hợp tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.

Hướng dẫn:

a). Phần thuận: sđ$\widehat{ACD}=\frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$; sđ$\widehat{DNM}=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB}-\text{sđ}\overset{\frown}{BD}\right)$.

$=\frac{1}{2}\left(180^0-\text{sđ}\overset{\frown}{BD}\right)=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AD}$



Suy ra $\widehat{ACD}=\widehat{DNM}\Rightarrow$

tứ giác $DCMN$ nội tiếp trong

đường tròn (I).

$\widehat{DAC}=90^0$ (góc nội tiếp

chắn nửa đường tròn).

ΔAMN có $\widehat{A}=90^0$, AE là trung tuyến suy ra

$EA=EM\Rightarrow\widehat{EAM}=\widehat{AME}$.

Do đó $\widehat{ACF}+\widehat{FAC}=\widehat{ANM}+\widehat{AMN}$.

Mà $\widehat{ANM}+\widehat{AMN}=90^0\Rightarrow\widehat{ACF}+\widehat{FAC}=90^0$ hay $AE\perp DC$.

I là tâm đường tròn qua

$D,C,M,N\Rightarrow OI\perp DC, AE\perp DC\Rightarrow AE//OI$.

$AO\perp a, EI\perp a\Rightarrow AO//EI$

Suy ra $AOIE$ là hình bình hành $\Rightarrow EI=AO=R$.

Đường thẳng a cố định.

Vậy I thuộc đường thẳng cố định d song song với đường thẳng a và cách a một khoảng bằng R.

b) Giới hạn: CD quay quanh O nên E chuyển động trên cả đường thẳng a do đó I chuyển động trên cả đường thẳng $d, d//a, d$ cách a một khoảng bằng R. d nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa điểm A.

c) Phần đảo: Lấy điểm I tùy ý trên đường thẳng (d). Vẽ $IE \perp (a) (E \in (a))$. Vẽ $DC \perp OI$ tại O.

AC, AD lần lượt cắt a tại M, N.

$AO \perp (a), EI \perp (a) \Rightarrow AO//EI$ mà $AO = EI (= R)$ do đó $AOIE$ là hình bình hành $\Rightarrow AE//OI$. Mà $OI//DC$ nên $AE \perp DC$.

Tương tự như trên, ta chứng minh được tứ giác $DCMN$ nội tiếp. Suy ra ΔEAM cân tại $E \Rightarrow EA = EM$. Suy ra ΔEAN cân tại $E \Rightarrow EA = EN$. Do đó $EM = EN$.

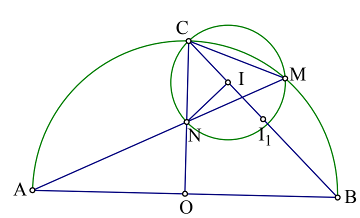
Vậy I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm I là đường thẳng d, song song với a, d cách a một khoảng bằng R, d nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa điểm A.

Câu 9. Cho nửa đường tròn đường kính AB tâm O bán kính R. C là trung điểm cung AB. M là điểm chuyển động trên cung BC, AM cắt CO tại N. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN. Tìm tập hợp các điểm I.

Hướng dẫn:

a). Phần thuận: $\widehat{CMN} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} = 45^0$;



$\widehat{CMN}$ nhọn suy ra $\widehat{CMN}=\frac{1}{2}\widehat{CIN}\Rightarrow$

$\widehat{CIN}=90^0$. ΔICN cân $\left(IC=IN=r\right)$

có $\widehat{CIN}=90^0\Rightarrow\Delta ICN$ vuông cân tại $I\Rightarrow\widehat{NCI}=45^0$.

Mà $\widehat{NCB}=45^0$ (ΔOBC cân tại O) suy ra C,I,B thẳng hàng.

Do đó I thuộc đường thẳng BC.

b) Giới hạn:

Khi $M\equiv B$ thì $I\equiv I_1$ (I_1 là trung điểm của BC.

Khi $M\equiv C$ thì $I\equiv C$.

Vậy I chuyển động trên đoạn I_1C thuộc đoạn thẳng BC.

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc đoạn thẳng I_1C. Vẽ đường tròn $\left(I;IC\right)$ cắt OC tại N, AN cắt $\left(I\right)$ tại $M\left(M\neq N\right)$.

Ta có $IC=IN\Rightarrow\Delta ICN$ cân mà

$\widehat{NCI}=45^0\Rightarrow\widehat{CNI}=45^0\Rightarrow\widehat{CIN}=90^0$. Do đó $\widehat{CMN}=\frac{1}{2}\widehat{CIN}=45^0$;

$\widehat{CMN}=\widehat{CBA}\left(=45^0\right)\Rightarrow$ tứ giác $ACMB$ nội tiếp được $\Rightarrow M$ thuộc nửa đường tròn $\left(O\right)$.

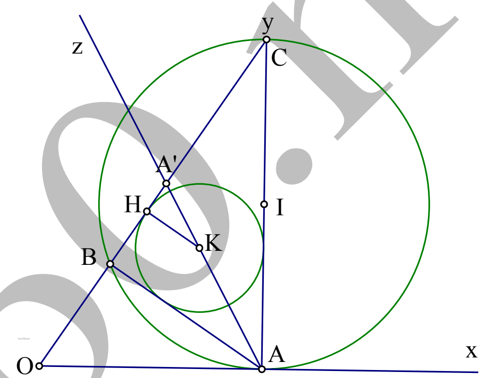
d) Kết luận: Tập hợp các điểm I là đoạn thẳng CI_1 (I_1 là trung điểm của đoạn thẳng BC).

Câu 10. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. A là điểm cố định trên tia Ox. Đường tròn (I) di động tiếp xúc tia Ox tại A và cắt tia Oy tại B và C. Tìm tập hợp tâm K của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: $\widehat{BAK}=\dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$ (tính chất tiếp tuyến).

$\widehat{OAB}=\widehat{OCA}\left(=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}\right)$.



Do đó $\widehat{OAK}=\widehat{OAB}+\widehat{BAK}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\widehat{OAB}+\widehat{OCA}\right)+\dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$

$=\dfrac{1}{2}\widehat{OCA}+\dfrac{1}{2}\widehat{OAC}$

$=\dfrac{1}{2}\widehat{OCA}+\dfrac{1}{2}\left(\widehat{OAB}+\widehat{BAC}\right)=90^0-\dfrac{1}{2}\widehat{AOC}=90^0-\dfrac{1}{2}\widehat{xOy}.$

Ta có $\widehat{OAK}$ không đổi, OA cố định, do đó K thuộc tia Az sao cho $\widehat{OAz}=90^0-\dfrac{1}{2}\widehat{xOy}$.

b) Giới hạn: K nằm trong $\widehat{xOy}$. Do đó K thuộc đoạn thẳng AA' (A' là giao điểm của tia Az và tia Oy).

c) Phần đảo: Lấy điểm K bất kỳ trên tia Az. Vẽ $KH\perp Oy\left(H\in Oy\right)$, vẽ đường tròn $\left(K;KH\right)$. Từ A vẽ các tiếp tuyến với $\left(K\right)$ lần lượt cắt Oy tại

B và C. Cần chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với tia Ox.

Ta có $\widehat{BAK} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (tính chất tiếp tuyến);

$\widehat{OAK} = \widehat{OAz} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{xOy} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \frac{1}{2}\widehat{OCA} + \frac{1}{2}\widehat{OAC}$
$= \frac{1}{2}\widehat{OCA} + \frac{1}{2}\left(\widehat{OAB} + \widehat{BAC}\right).\widehat{OAK} = \frac{1}{2}\left(\widehat{OCA} + \widehat{OAB}\right) + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (1).

Mà $\widehat{OAK} = \widehat{OAB} + \widehat{BAK} = \widehat{OAB} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$\widehat{OAB} = \widehat{OCA}$. (*)

Vẽ tia Am là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔABC (tia Ax nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa tia OA). Ta có:
$\widehat{mAB} = \widehat{OCA}\left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}\right)$ (**) Từ (*) và (**) có $\widehat{OAB} = \widehat{mAB}$ suy ra hai tia AO và Am trùng nhau.

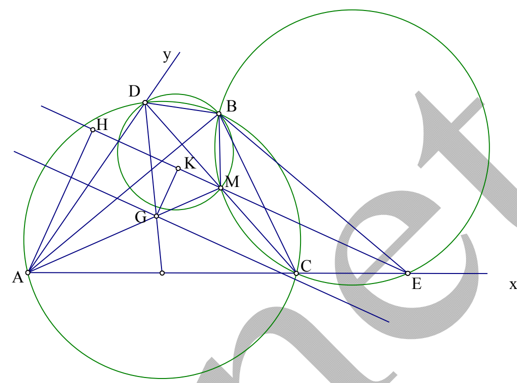
Vậy AO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm K là đoạn thẳng AA' (A' là giao điểm của hai tia Az và Oy và $\widehat{OAz} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{xOy}$.

Câu 11. Cho $\widehat{xAy} = \alpha$ không đổi , điểm B cố định nằm trong $\widehat{xAy}$. Đường tròn (O) di động qua A và B cắt Ax, Ay lần lượt tại C và D. Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác ADC thuộc một đường cố định.

Hướng dẫn:

Ta có: $\widehat{xAB} = \widehat{CDB}$,



$\widehat{BAy} = \widehat{BCD}\widehat{DAC} + \widehat{DBC} = 180^0$

Các góc $\widehat{xAB}, \widehat{BAy}, \widehat{DAC}$ không đổi.

Do đó các góc $\widehat{CDB}, \widehat{BCD}, \widehat{DBC}$ không đổi. Gọi M là trung điểm của đoạn CD, ta có các góc $\widehat{BMC}, \widehat{BMD}$ không đổi.

Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC cắt Ax tại E, đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD cắt Ay tại F.

Ta có $\widehat{BEC} + \widehat{BMC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AEB} = 180^0 - \widehat{BMC}$ không đổi $\Rightarrow E$ cố định.

$\widehat{BME} = \widehat{BCE}\left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BE}\right)$, $\widehat{BDF} = \widehat{BCE}$ (tứ giác $ADBC$ nội tiếp),

$\widehat{BDF} + \widehat{BMF} = 180^0$ (tứ giác $DBMF$ nội tiếp).

Do đó $\widehat{BME} + \widehat{BMF} = 180^0 \Rightarrow E, M, F$ thẳng hàng.

Vẽ $AH \perp EF\left(H \in EF\right), GK \perp EF\left(K \in EF\right)$ ta có AH không đổi; đặt $AH = h, AH\,//\,GK$. ΔAHM có $GK\,//\,AH$ suy ra $\frac{GM}{AM} = \frac{GK}{AH}$.

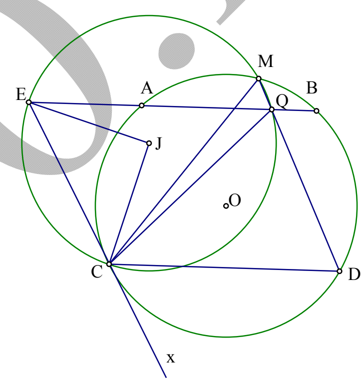
G là trọng tâm ΔADC, AM là trung tuyến của ΔADC nên $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$.Do đó $\frac{GK}{AH} = \frac{1}{3}$, suy ra $GK = \frac{1}{3}h$ không đổi, EF cố định.

Vậy G thuộc đường thẳng song song với EF là cách EF một khoảng bằng $\frac{1}{3}h$.

Câu 12. Cho đường tròn $(O;R)$ và hai dây cung AB và CD song song với nhau. M là điểm di động trên đường tròn (O). Đường thẳng MD cắt đường thẳng AB tại Q. Tìm tập hợp tâm J đường tròn ngoại tiếp tam giác MCQ.

Hướng dẫn:

1) Xét M nằm trên cung lớn CD.



Tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB ở E, ta có E cố định.Gọi Cx là tia đối của tia CE. $\widehat{QEC} = \widehat{DCx}$ (vì $AB//DC$),

$\widehat{QMC} = \widehat{DCx}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{DC}\right)$.

Do đó $\widehat{QEC} = \widehat{QMC} \Rightarrow$ tứ giác $MECQ$ nội tiếp.

Ta có $JE = JC$; E,C cố định. Do đó J thuộc đường cố định là đường trung trực của đoạn thẳng EC.

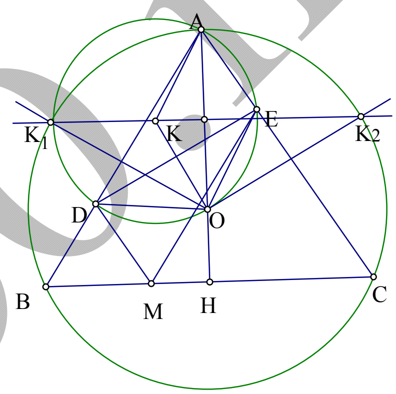
2) Xét M nằm trên cung CD. Tương tự trường hợp 1) ta cũng có: $\widehat{QEC} = \widehat{DCx}$. $\widehat{QMC} + \widehat{DCx} = 180^0$. Do đó $\widehat{QEC} + \widehat{QMC} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác $MCEQ$ nội tiếp được. Ta có $JE = JC$; E,C cố định.

Do đó J thuộc đường trung trực của đoạn thẳng EC.

Câu 13. Cho tam giác ABC cân tại A. M là điểm di động trên cạnh BC. Vẽ MD song song $AC\left(D \in AB\right)$ vẽ ME song song $AB\left(E \in AC\right)$. K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE. Tìm tập hợp điểm K.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: Gọi O là giao điểm của đường tròn $\left(ADE\right)$ và đường cao AH của tam giác ABC.



Tứ giác $MDAE$ là hình bình hành

(vì $MD//EA$ và $DA//ME$),

suy ra $DM = AE$.

Ta có: $\widehat{DMB} = \widehat{ACB}\left(DM//AC\right)$;

$\widehat{DBM} = \widehat{ACB}$ (ΔABC cân tại A).

Suy ra $\widehat{DMB} = \widehat{DBM}$.

Vậy ΔDBM cân tại D, suy ra $DM = DB$.Do đó $AE = DB\left(= DM\right)$

$\widehat{DAO} = \widehat{OAE} \Rightarrow \overset{\frown}{OD} = \overset{\frown}{OE} \Rightarrow OD = OE$.

Xét ΔOAE và ΔOBD có $OE = OD, \widehat{AEO} = \widehat{ODB}$ (tứ giác $AEOD$ nội tiếp), $AE = DB$.

Do đó $\Delta OAE = \Delta OBD$ (c.g.c) $\Rightarrow OA = OB \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AB.

Vậy O là điểm cố định (O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

Ta có $KA = KO$, OA cố định, suy ra K nằm trên đường trung trực d của đoạn thẳng OA.

b) Giới hạn:

Khi $M \equiv B$ thì $D \equiv B, K \equiv K_1$ (K_1 là giao điểm của d và đường trung trực của AB).

Khi $M \equiv C$ thì $E \equiv C, K \equiv K_2$ (K_2 là giao điểm của d và đường trung trực của AC).

Vậy K di động trên đoạn thẳng K_1K_2.

c) Phần đảo: Lấy điểm K bất kỳ thuộc đoạn thẳng K_1K_2. Vẽ đường tròn $\left(K; KA\right)$ cắt AB, AC lần lượt ở D và E. Vẽ $DM // AC \left(M \in AC\right)$. Cần chứng minh rằng $ME // AB$.

Ta có: $KA = KO \Rightarrow O \in \left(K\right)$.

Xét ΔOAE và ΔOBD có: $\widehat{OAE} = \widehat{OBD}\left(= \widehat{OAD}\right); \widehat{AEO} = \widehat{ODB}$ (tứ giác $AEOD$ nội tiếp)

Do đó $\Delta OAE \sim \Delta OBD \Rightarrow \dfrac{AE}{BD} = \dfrac{OA}{OB} = 1 \Rightarrow AE = BD$.

$\widehat{DBM} = \widehat{ACB}$ (ΔABC cân tại A), $\widehat{DMB} = \widehat{ACB}\left(DM // AC\right)$. Do đó $\widehat{DBM} = \widehat{DMB} \Rightarrow \Delta DBM$ cân tại $D \Rightarrow DM = BD$.

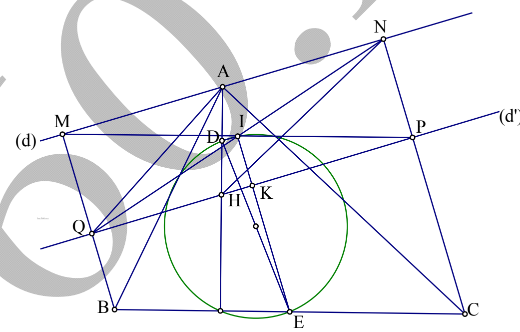
Ta có $AE = DM$ mà $AE // DM$ nên tứ giác $MDAE$ là hình bình hành, suy ra $ME // AB$.

d) Kết luận: Tập hợp điểm K là đoạn thẳng K_1K_2 thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AO.

Câu 14. Cho tam giác ABC, H là trực tâm. Hai đương thẳng song song (d) và (d') lần lượt đi qua A và H. Các điểm M, N lần lượt là hình chiếu của B và C trên (d); các điểm Q, P lần lượt là hình chiếu của B, C trên (d'). MP cắt NQ tại I. Tìm tập các điểm I khi (d) và (d') di động.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận:



$$\begin{cases} BM \perp (d) \\ CN \perp (d)(gt) \end{cases} \Rightarrow BM // CN$$

$$\begin{cases} BM // CN \\ MN // QP(gt) \end{cases} \Rightarrow MNPQ$$

là hình bình hành.

Mà $\widehat{QMN} = 90^0$ (gt) nên $MNPQ$

là hình chữ nhật $\Rightarrow I$ là trung điểm của các đoạn thẳng MP và NQ.

Gọi D và E lần lượt là trung điểm của AH và BC, ta có D, E cố định.

$ANHQ$ là hình thang, DI là đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo, suy ra $DI // MN$.

$MPCB$ là hình thang, IE là đường trung bình hình thang, suy ra $IE // NC$.

$DI//MN, IE//NC$ mà $\widehat{MNC} = 90^0$ nên $\widehat{DIE} = 90^0$.

$\widehat{DIE} = 90^0, DE$ cố định. Vậy I thuộc đường tròn đường kính DE.

b) Giới hạn: (d) quay quanh A nên điểm I chuyển động trên đường tròn đường kính DE.

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc đường tròn đường kính DE. Nối DI. Qua A, H kẻ các đường thẳng $(d),(d')$ song song với DI. Gọi M, Q lần lượt là hình chiếu của B trên $(d),(d')$. MI cắt (d') tại P; QI cắt (d) tại N; PQ cắt IE tại K.

$MN//DI//QP, DA = DH \Rightarrow IM = IP, IN = IQ$

$IM = IP, IN = IQ \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mà $\widehat{M} = 90^0$ nên $MNPQ$ là hình chữ nhật.

ΔPMB có $IM = IP, IK//MB \Rightarrow KB = KP$;

ΔBPC có $KB = KP, EB = EC \Rightarrow EK//CP$

$\widehat{DIE} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn),
$DI//MN \Rightarrow EI \perp MN, EI \perp MN, PN \perp MN$

$\Rightarrow C, P, N$ thẳng hàng.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm I là đường tròn đường kính DE.

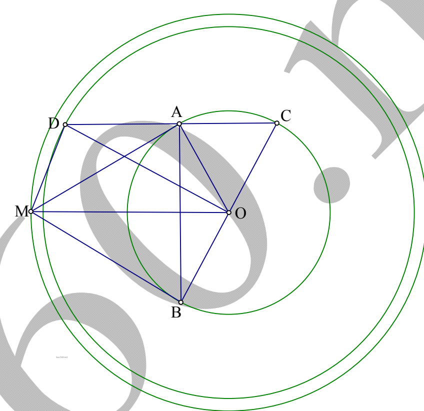
Câu 15. Cho đường tròn $\left(O;R\right)$, M là điểm ở ngoài $\left(O\right)$, vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến $\left(O\right)$ (A, B là tiếp điểm). đường trung trực của đường kính BC cắt CA tại D.

1) Tìm tập hợp các điểm M sao cho ΔMAB đều.

2) Tìm tập hợp các điểm D sao cho ΔMAB đều.

Hướng dẫn:

1) a) Phần thuận:



ΔMAB đều $\Rightarrow \widehat{AMB} = 60^0$;

$\widehat{OMA} = \dfrac{1}{2}\widehat{AMB} = 30^0$

(MA, MB là tiếp tuyến của $\left(O\right)$)

ΔOMA có $\widehat{OAM} = 90^0, \widehat{OAM} = 30^0$ suy ra ΔOMA là nửa tam giác đều,

do đó $OA = \dfrac{1}{2}OM \Rightarrow OM = 2OA = 2R$

$OM = 2R$, O cố định, suy ra M thuộc đường tròn cố định $\left(O;2R\right)$.

b) Giới hạn: M là điểm tùy ý trên $\left(O;2R\right)$ đều vẽ được ΔMAB đều. Vậy M chuyển động trên $\left(O;2R\right)$.

c) Phần đảo: Lấy M bất kỳ thuộc $\left(O;2R\right)$ vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến $\left(O;R\right)$ (A, B là tiếp điểm) $\Rightarrow MA = MB \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M.

Tam giác OMA có $\widehat{A}=90^0; OA=\frac{1}{2}OM\left(=R\right)$, suy ra ΔOMA là nửa tam giác đều nên $\widehat{OMA}=30^0$, suy ra $\widehat{AMB}=2.\widehat{OMA}=60^0$.

ΔMAB cân có $\widehat{AMB}=60^0 \Rightarrow \Delta MAB$ đều.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm M là đường tròn $\left(O;2R\right)$.

2) a) Phần thuận: ΔMAB đều $\Rightarrow \widehat{AMB}=60^0$. Mà $\widehat{AMB}+\widehat{AOB}=180^0$ nên $\widehat{AOB}=120^0$;

$\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}=60^0$.

ΔDOC có $\widehat{O}=90^0, \widehat{DCO}=60^0$ suy ra ΔDOC là nửa tam giác đều và ta có $DO=OC\sqrt{3}=R\sqrt{3}$.

$DO=R\sqrt{3}$, O cố định nên D thuộc đường tròn $\left(O;R\sqrt{3}\right)$.

b) Giới hạn: D là điểm tùy ý trên $\left(O;R\sqrt{3}\right)$.

c) Phần đảo: Lấy điểm D bất kỳ thuộc $\left(O;R\sqrt{3}\right)$. Vẽ đường kính BC vuông góc OD, DC cắt $\left(O\right)$ tại A. M là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, B của $\left(O\right)$.

ΔDOC có $\widehat{O}=90^0; DO=OC\sqrt{3}\left(=R\sqrt{3}\right) \Rightarrow \Delta DOC$ là nửa tam giác đều

$\Rightarrow \widehat{DCO}=60^0 \Rightarrow \widehat{MAB}=60^0$.

ΔMAB cân $\left(MA = MB\right)$ có $\widehat{MAB} = 60^0 \Rightarrow \Delta MAB$ đều.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm D là đường tròn $\left(O; R\sqrt{3}\right)$.

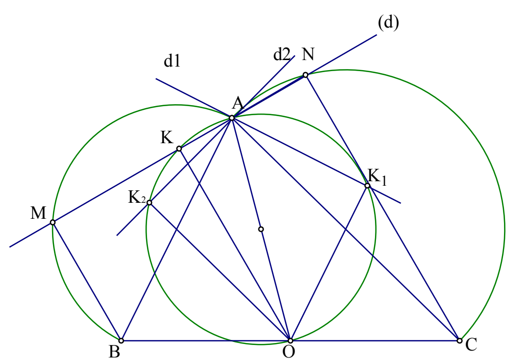
Câu 16. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. ở bên ngoài tam giác vẽ hai nửa đường tròn có đường kính AB, AC. Một đường thẳng $\left(d\right)$ quay quanh A cắt hai nửa đường tròn trên theo thứ tự tại M, N (khác A). Tìm tập hợp các trung điểm của MN.

Hướng dẫn:

a) Phần thuận: $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{ANC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $BCNM$ là hình thang vuông.

Gọi O là trung điểm của BC ta có O cố định; gọi K là trung điểm của MN. OK là đường trung bình của hình thang $BCNM$ suy ra $OK//BM$

$$\begin{cases} OK//BM \\ \widehat{AMB} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{AKO} = 90^0$$



$\widehat{AKO} = 90^0$, OA cố định,

do đó K thuộc đường tròn

đường kính OA.

b) GIới hạn:

Khi $(d) \equiv (d_1)$ ((d_1) là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB)thì $K \equiv K_1$ (K_1 là hình chiếu của (O) trên (d_1)).

Khi $(d) \equiv (d_2)$ ((d_2) là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AC)thì $K_1 \equiv K_2$ (K_2 là hình chiếu của (O) trên (d_2)).

Vậy K chuyển động trên cung $\overset{\frown}{K_1K_2}$ của đường tròn đường kính OA.

c) Phần đảo: Lấy điểm K bất kỳ thuộc cung $\overset{\frown}{K_1K_2} \Rightarrow \widehat{OKA} = 90^0$.

AK cắt các đường tròn đường kính AB, AC lần lượt tại M, N.

$\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ANC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $BCNM$ là hình thang vuông.

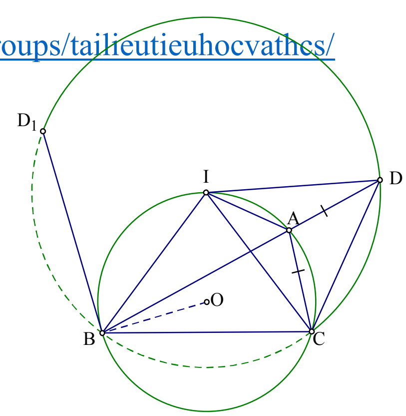
$OK \perp MN$ do đó $OK//BM \Rightarrow KM = KN$.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm K là cung $\overset{\frown}{K_1K_2}$ của đường tròn đường kính OA.

Câu 17. Cho đường tròn $(O;R)$ cố định BC là dây cung cố định, A là điểm chuyển động trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Tìm tập hợp các điểm D.

Hướng dẫn:

a). Phần thuận: Gọi J là trung điểm của cung lớn $\overset{\frown}{BC}$,



ta có I cố định.

xét điểm A thuộc cung $\overset{\frown}{IC}$.

$\widehat{IAC} + \widehat{IBC} = 180^0$

(tứ giác $BIAC$ nội tiếp);

$\widehat{IAD} + \widehat{IAB} = 180^0$ (hai góc kề bù),

$\widehat{IBC} = \widehat{IAB}\left(\overset{\frown}{IC} = \overset{\frown}{ID}\right)$. Suy ra $\widehat{IAC} = \widehat{IAD}$.

Xét ΔIAC và ΔIAD có IA (cạnh chung), $\widehat{IAC} = \widehat{IAD}, AC = AD$.

Do đó $\Delta IAC = \Delta IAD$ (c.g.c), suy ra $IC = ID$.

I, C cố định $\Rightarrow IC$ không đổi. Vậy D chuyển động trên đường tròn $\left(I;IC\right)$.

b) GIới hạn:

Khi $A \equiv B$ thì $D \equiv D_1$ (D_1 là giao điểm của $\left(I;IC\right)$ với tiếp tuyến của $\left(O\right)$ tại B).

Khi $A \equiv C$ thì $D \equiv C$.

Vậy D chuyển động trên cung $\overset{\frown}{D_1C}$ của đường tròn $\left(I;IC\right)$.

c) Phần đảo: Lấy điểm D bất kỳ trên cung $\overset{\frown}{D_1C} \Rightarrow IC = ID$.

BD cắt $\left(O\right)$ tại $A\left(A \neq B\right)$.

$\widehat{AIC} = \widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$ của (O);

$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{DIC}$.

Suy ra $\widehat{AIC} = \frac{1}{2}\widehat{DIC}$, do đó $\widehat{AIC} = \widehat{DIA}$.

Xét ΔIAC và ΔIAD có $IC = ID, \widehat{AIC} = \widehat{DIA}, IA$ là cạnh chung.

Do đó $\Delta IAC = \Delta IAD$ (c.g.c), suy ra $AC = AD$.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm D là cung $\overset{\frown}{D_1C}$ của đường tròn (I, IC) (với D_1 là giao điểm của đường tròn (I, IC) với tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, I là trung điểm cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ của (O)).

Câu 18. Cho AB là dây cung cố định của đường tròn $(O;R)$. C là điểm chuyển động trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$. Trên tia CA lấy điểm D sao cho $CD = CB$. Tìm tập hợp các điểm D.

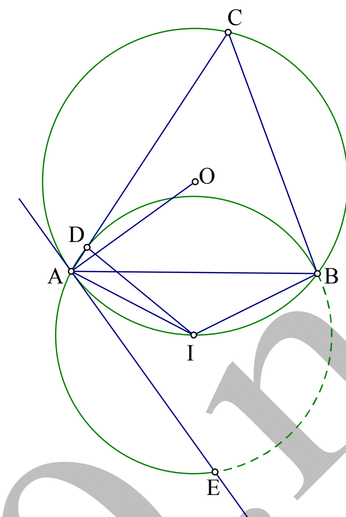
Hướng dẫn:

a) Phần thuận: Gọi I là trung điểm của $\overset{\frown}{AB}$.

Xét ΔDCI và ΔBCI có $CD = CB, \widehat{DCI} = \widehat{BCI}\left(\overset{\frown}{AI} = \overset{\frown}{IB}\right)$,

CI (cạnh chung).

Do đó (c.g.c), suy ra $ID = IB$ (không đổi); I cố định. vậy D thuộc đường tròn cố định $\left(I;IB\right)$.



b) Giới hạn:

Khi $C \equiv A$ thì $D \equiv E$

(E là giao điểm của tiếp tuyến tại A với $\left(O\right)$ và $\left(I;IB\right)$).

Khi $C \equiv B$ thì $D \equiv B$. Vậy D chuyển động trên cung $\overset{\frown}{BAE}$ của $\left(I;IB\right)$.

c) Phần đảo: Lấy điểm D bất kỳ trên $\overset{\frown}{BAE}$ của $\left(I;IB\right)$, ta có $ID = IB$. Vẽ phân giác của $\widehat{DIB}$ cắt $\left(O\right)$ tại C.

Xét ΔDCI và ΔBCI (c.g.c), suy ra $\widehat{DCI} = \widehat{BCI}, CD = CB$.

Mà $\widehat{BCI} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BI}$ nên $\widehat{DCB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}$ và $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}$. Do đó A, D, C thẳng hàng.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm D là $\overset{\frown}{BAE}$ của $\left(I;IB\right)$ (I là trung điểm của $\overset{\frown}{AB}$.

Chú ý:

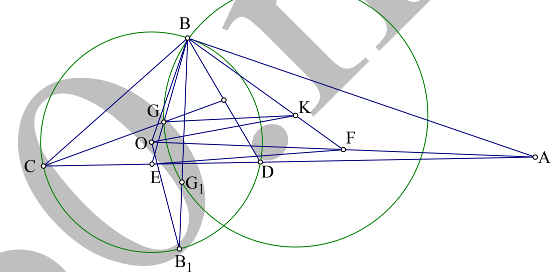
1) Xét bài toán tương tự khi C chuyển động trên $\overset{\frown}{AB}$.

2) Nhận xét gì về các bài toán

Câu 19. Cho đường tròn $(O;R)$, A là điểm cố định ở ngoài (O). Kẻ tiếp tuyến AB với (O). Đường thẳng (d) quay quanh A cắt (O) tại hai điểm C,D. Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác BCD.

Hướng dẫn:

a). Phần thuận: Gọi E,F là trung điểm của CD,OA ta có F cố định (vì OA cố định); K là điểm trên BF sao cho $\frac{BK}{BF}=\frac{2}{3}$, suy ra K cố định (vì BF cố định).



ΔBEF có: $\frac{BG}{BE}=\frac{BK}{BF}=\frac{2}{3}$. Suy ra

$GK//EF \Rightarrow \frac{GK}{EF}=\frac{2}{3} \Rightarrow GK=\frac{2}{3}EF$ mà $EF=\frac{1}{2}OA$, do đó

$GK=\frac{1}{3}OA$ (không đổi) K cố định. Vậy G thuộc đường tròn cố định K bán kính $\frac{1}{3}OA$.

b) Giới hạn:

Khi d tiến dần đến tiếp tuyến AB thì $G \to B$.

Khi d tiến dần đến tiếp tuyến AB_1 thì $G \to G_1$ (với G_1 là giao điểm của đường tròn $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$ với BB_1).

Vậy G chuyển động trên $\overparen{BG_1}$ của đường tròn $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$ (trừ hai điểm B và G_1).

c) Phần đảo: Lấy điểm G bất kỳ trên $\overparen{BG_1}$ (trừ B và G_1 của $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$),

suy ra $GK = \frac{1}{3}OA$. Trên tia BG lấy điểm E sao cho $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$.

AE cắt (O) tại D, C. ΔBEF có:

$\frac{BG}{BE} = \frac{BK}{BF} = \frac{2}{3} \Rightarrow GK / /EF \Rightarrow \frac{GK}{EF} = \frac{2}{3}GK = \frac{3}{2}.\frac{1}{3}OA = \frac{1}{2}OA$

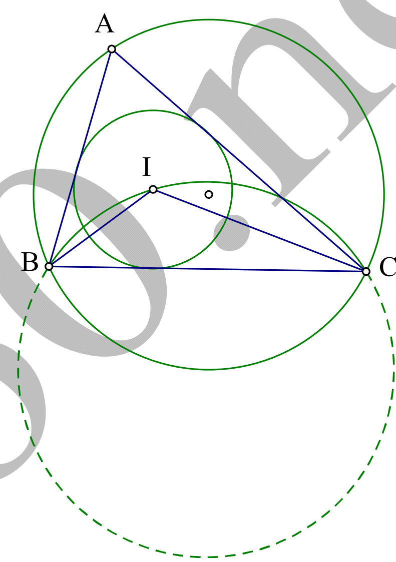
$\Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính $OA \Rightarrow \widehat{OAE} = 90^0$.

$OE \perp CD \Rightarrow E$ là trung điểm của CD. ΔBCD có BE là trung tuyến và $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$ nên G là trọng tâm của ΔBCD.

d) Kết luận: Tập hợp các điểm G là $\overparen{BG_1}$ của đường tròn $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$ (với K thuộc đoạn $BF, BK = \frac{2}{3}BF$, G_1 là giao điểm của BB_1 và $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$ (trừ B và G_1)).

Câu 21. Cho điểm A chuyển động trên cung lớn $\overparen{BC}$ cố định của đường tròn $(O;R)$. Tìm tập hợp các tâm I đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC.

Hướng dẫn:



Cách 1.a) Phần thuận:

Cung $\overset{\frown}{BC}$ cố định,

đặt sđ$\overset{\frown}{BC} = \alpha$ (không đổi)

sđ$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\alpha$

$\widehat{IBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ (BI là phân giác của $\widehat{ABC}$); $\widehat{ICB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$

(CI là phân giác của $\widehat{ACB}$);

$\widehat{BIC} = 180^0 - \left(\widehat{IBC} + \widehat{ICB}\right) = 180^0 - \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right)$

$= 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90^0 + \frac{1}{2}\alpha,$ BC cố định. Do đó I thuộc cung chứa góc $90^0 + \frac{1}{2}\alpha$ dựng trên đoạn thẳng BC.

b) Giới hạn:

Khi $A \equiv B$ thì $I \equiv B$. Khi $A \equiv C$ thì $I \equiv C$. Vậy I chuyển động trên cung chứa góc $90^0 + \frac{1}{2}\alpha$ dựng trên đoạn thẳng BC nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm O.

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ của cung chứa góc $90^0 + \frac{1}{2}\alpha$ dựng trên đoạn thẳng BC. Vẽ điểm A trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn $(O;R)$ sao cho BI là phân giác của $\widehat{ABC}$.

$$\widehat{BIC} = 90^0 + \frac{1}{2}\alpha; \widehat{IBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$$
$$\widehat{ICB} = 180^0 - \left(\widehat{BIC} + \widehat{IBC}\right) = 90^0 - \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) = \frac{1}{2}\widehat{ACB} \Rightarrow CI$$

là phân giác của $\widehat{ACB}$. ΔABC có BI và CI là phân giác $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

d) Kết luận: Tập hợp các tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC là cung chứa góc $90^0 + \frac{1}{2}\alpha$ dựng trên đoạn thẳng BC nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm O.

Cách 2.

a) Phần thuận: AI cắt (O) tại D, ta có $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ suy ra $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow DB = DC$ (không đổi).

$\widehat{BID} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI}$ ($\widehat{BID}$ là góc ngoài của ΔABI).

$$\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD}; \widehat{BAI} = \widehat{CBD}\left(\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC}\right)$$

$\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$ (I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC)

Suy ra $\widehat{IBD} = \widehat{BID} \Rightarrow DB = DI$

$DI = DB$ không đổi. D cố định.

Vậy I thuộc đường tròn $\left(D, DB\right)$.

b) Giới hạn:

Khi $A \equiv B$ thì $I \equiv B$, Khi $A \equiv C$ thì $I \equiv C$.

Vậy I chuyển động trên $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn $\left(D, DB\right)$.

c) Phần đảo: Lấy điểm I bất kỳ thuộc $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn $\left(D, DB\right)$, ta có $DI = DB = DC$. $DB = DI \Rightarrow \widehat{IBD} = \widehat{BID}$, DI cắt đường tròn tại $A\left(A \neq D\right) \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{DAC}$, $\widehat{CBD} = \widehat{DAC}$. Do đó $\widehat{BAI} = \widehat{CBD}$

$\widehat{BID} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI}; \widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD}$. Suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$.

Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC .

c) Kết luận: Tập hợp các điểm I là $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn $\left(D, DB\right)$ nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm O .