Chủ đề 5: PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Để giải một phương trình bậc lớn hơn 3. Ta thường biến đổi phương trình đó về một trong các dạng đặc biệt đó là:

1. Phương pháp đưa về dạng tích: Tức là biến đổi phương trình:

$$F(x)=0 \Leftrightarrow f(x).g(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$$

Đưa về một phương trình tích ta thường dùng các cách sau:

Cách 1: Sử dụng các hằng đẳng thức đưa về dạng: $a^2-b^2=0, a^3-b^3=0,...$

Cách 2: Nhẩm nghiệm rồi chia đa thức: Nếu $x=a$ là một nghiệm của phương trình $f(x)=0$ thì ta luôn có sự phân tích: $f(x)=(x-a)g(x)$. Để dự đoán nghiệm ta dựa vào các chú ý sau:

Chú ý:

Cách 3: Sử dụng phương pháp hệ số bất định. Ta thường áp dụng cho phương trình bậc bốn.

Đặc biệt đối với phương trình bậc 4: Ta có thể sử dụng một trong các cách xử lý sau:

- Phương trình dạng: $x^4=ax^2+bx+c$

Phương pháp: Ta thêm bớt vào 2 vế một lượng: $2mx^2+m^2$ khi đó phương trình trở thành: $(x^2+m)^2=(2m+a)x^2+bx+c+m^2$

Ta mong muốn vế phải có dạng: $(Ax+B)^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+a>0 \\ \Delta=b^2-4(2m+a)(c+m^2)=0 \end{cases} \Rightarrow m$$

- Phương trình dạng: $x^4+ax^3=bx^2+cx+d$

Ta sẽ tạo ra ở vế phải một biểu thức bình phương dạng: $\left(x^2+\frac{a}{2}x+m\right)^2$

Bằng cách khai triển biểu thức:

$\left(x^2+\frac{a}{2}x+m\right)^2=x^4+ax^3+\left(2m+\frac{a^2}{4}\right)x^2+amx+m^2$. Ta thấy cần thêm vào hai vế một lượng: $\left(2m+\frac{a^2}{4}\right)x^2+amx+m^2$ khi đó phương trình trở thành:

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+m\right)^2=\left(2m+\frac{a^2}{4}+b\right)x^2+(am+c)x+m^2+d$$

Bây giờ ta cần: $\begin{cases} 2m+\dfrac{a^2}{4}+b>0 \\ \Delta_{VP}=(am+c)^2-4\left(2m+\dfrac{a^2}{4}+b\right)\left(m^2+d\right)=0 \end{cases} \Rightarrow m=?$

Ta sẽ phân tích để làm rõ cách giải các bài toán trên thông qua các ví dụ sau:

Ví dụ 1)

Giải các phương trình:

a) $x^4-10x^2-x+20=0$.

b) $x^4-22x^2-8x+77=0$

c) $x^4-6x^3+8x^2+2x-1=0$.

d) $x^4+2x^3-5x^2+6x-3=0$.

Lời giải:

a) $x^4-10x^2-x+20=0 \Leftrightarrow x^4=10x^2+x-20$

Ta thêm vào 2 vế phương trình một lượng: $2mx^2+m^2$

Khi đó phương trình trở thành: $x^4+2mx^2+m^2=(10+2m)x^2+x+m^2-20$

Ta có $\Delta_{VP}=1-4(m^2-20)(10+2m)=0 \Leftrightarrow m=-\frac{9}{2}$. Ta viết lại phương trình thành:

$$x^4-9x^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2=x^2+x+\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x^2-\frac{9}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-5)(x^2+x-4)=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \text{ . và } x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}.$$

b) $x^4-22x^2-8x+77=0 \Leftrightarrow x^4=22x^2+8x-77$

Ta thêm vào 2 vế phương trình một lượng: $2mx^2+m^2$

Khi đó phương trình trở thành: $x^4+2mx^2+m^2=(22+2m)x^2+8x+m^2-77$.

Ta có $\Delta_{VP}=1-4(22+2m)(m^2-77)=0 \Leftrightarrow m=-9$.

Ta viết lại phương trình thành:

$$x^4-18x^2+81=4x^2+8x+4 \Leftrightarrow \left(x^2-9\right)^2-\left(2x+2\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x-7)(x^2-2x-11)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\pm2\sqrt{2} \\ x=1\pm2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

c) Phương trình có dạng: $x^4-6x^3+8x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x^4-6x^3=-8x^2-2x+1$

Ta tạo ra vế trái dạng: $(x^2-3x+m)^2=x^4-6x^3+(9+2m)x^2-6mx+m^2$

Tức là thêm vào hai vế một lượng là: $(9+2m)x^2-6mx+m^2$ phương trình trở thành:

$(x^2-3x+m)^2=(2m+1)x^2-(6m+2)x+m^2+1$. Ta cần

$\Delta'_{VP}=(3m+1)-(2m+1)(m^2+1)=0 \Leftrightarrow m=0$. Phương trình trở thành: $(x^2-3x)^2=(x-1)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+1)(x^2-2x-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{2} \\ x=1+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

d) Phương trình đã cho được viết lại như sau: $x^4+2x^3=5x^2-6x+3$

Ta tạo ra phương trình: $(x^2+x+m)^2=(2m+6)x^2+(2m-6)x+m^2+3$

Ta cần: $\begin{cases} 2m+6>0 \\ \Delta'_{VP}=(m-3)^2-(2m+6)(m^2+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$

Phương trình trở thành: $(x^2+x-1)^2=(2x-2)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2+3x-3)(x^2-x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

Ví dụ 2)

a) Giải phương trình: $x^4-4x^2+12x-9=0$ (1).

b) Giải phương trình: $x^4-13x^2+18x-5=0$

c) Giải phương trình: $2x^4-10x^3+11x^2+x-1=0$ (4)

Lời giải:

a) Ta có phương trình $\Leftrightarrow x^4-\left(2x-3\right)^2=0$ (1.1)

$\Leftrightarrow \left(x^2+2x-3\right)\left(x^2-2x+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-3=0 \\ x^2-2x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1; x=3$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1; x=3$

b) Phương trình $\Leftrightarrow \left(x^4 - 4x^2 + 4\right) - \left(9x^2 - 18x + 9\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2\right)^2 - \left(3x-3\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2+3x-5\right)\left(x^2-3x+1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-5=0 \\ x^2-3x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2} \\ x = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x = \dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}; x = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

c) Ta có phương trình

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - 3x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-4x+1=0 \\ x^2-3x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2} \end{array}\right..$$

2. Phương pháp đặt ẩn phụ:

Là phương pháp khá hữu hiệu đối với các bài toán đại số, trong giải phương trình bậc cao cũng vậy, người ta thường đặt ẩn phụ để chuyển phương trình bậc cao về phương trình bậc thấp hơn.

Một số dạng sau đây ta thường dùng đặt ẩn phụ.

Dạng 1: Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0\left(a \neq 0\right)$ (1)

Với dạng này ta đặt $t = x^2, t \geq 0$ ta chuyển về phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2)

Chú ý: Số nghiệm của phương trình (1) phụ thuộc vào số nghiệm không âm của (2)

Dạng 2: Phương trình đối xứng (hay phương trình hồi quy):

$ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \pm kbx + k^2a = 0\left(k > 0\right)$. Với dạng này ta chia hai vế phương trình cho $x^2\left(x \neq 0\right)$ ta được: $a\left(x^2 + \dfrac{k^2}{x^2}\right) \pm b\left(x + \dfrac{k}{x}\right) + c = 0$. Đặt $t = x + \dfrac{k}{x}$ với $|t| \geq 2\sqrt{k}$ ta có:

$x^2 + \dfrac{k^2}{x^2} = \left(x + \dfrac{k}{x}\right)^2 - 2k = t^2 - 2k$ thay vào ta được phương trình: $a\left(t^2 - 2k\right) \pm bt + c = 0$

Dạng 3: Phương trình: $\left(x+a\right)\left(x+b\right)\left(x+c\right)\left(x+d\right) = e$, trong đó a+b=c+d

Phương trình $\Leftrightarrow \left[x^2+(a+b)x+ab\right]\left[x^2+(c+d)x+cd\right]=e$.

Đặt $t=x^2+(a+b)x$, ta có: $(t+ab)(t+cd)=e$

Dạng 4: Phương trình $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=ex^2$, trong đó $ab=cd$. Với dạng này ta chia hai vế phương trình cho $x^2\,(x\neq 0)$. Phương trình tương đương:

$$\left[x^2+(a+b)x+ab\right]\left[x^2+(c+d)x+cd\right]=ex^2 \Leftrightarrow \left[x+\frac{ab}{x}+a+b\right]\left[x+\frac{cd}{x}+c+d\right]=e$$

Đặt $t=x+\frac{ab}{x}=x+\frac{cd}{x}$. Ta có phương trình: $(t+a+b)(t+c+d)=e$

Dạng 5: Phương trình $(x+a)^4+(x+b)^4=c$. Đặt $x=t-\frac{a+b}{2}$ ta đưa về phương trình trùng phương

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

1) $2x^4-5x^3+6x^2-5x+2=0$

2) $(x+1)^4+(x+3)^4=2$

3) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$

4) $(x+2)(x-3)(x+4)(x-6)+6x^2=0$

Lời giải:

1) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm phương trình nên chia hai vế pương trình cho x^2 ta được:

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$. Đặt $t=x+\frac{1}{x},(|t|\geq 2)\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$. Ta có:

$2(t^2-2)-5t+6=0 \Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$. Với $t=2 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$

2) Đặt $x=t-2$ ta được: $(t-1)^4+(t+1)^4=2 \Leftrightarrow t^4+6t^2=0 \Leftrightarrow t=0 \Leftrightarrow x=-2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Chú ý: Với bài 2 ta có thể giải bằng cách khác như sau: Trước hết ta có BĐT:

$$\frac{a^4+b^4}{2} \ge \left(\frac{a+b}{4}\right)^4 \text{ với } a+b \ge 0.$$

Áp dụng BĐT này với: $a=-x-1, b=x+3 \Rightarrow VT \ge VP$. Đẳng thức xảy ra khi $x=-2$.

3) Ta có phương trình: $\Leftrightarrow \left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)=24$. Đặt $t=x^2+3x$. Ta được:
$t\left(t+2\right)=24 \Leftrightarrow t^2+2t-24=0 \Leftrightarrow t=-6, t=4$

* $t=-6 \Leftrightarrow x^2+3x+6=0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

* $t=4 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=1; x=-4$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1; x=-4$.

4) Phương trình $\Leftrightarrow \left(x^2-2x-12\right)\left(x^2+x-12\right)+6x^2=0$

Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được:

$\left(x-\frac{12}{x}-4\right)\left(x-\frac{12}{x}+1\right)+6=0$. Đặt $t=x-\frac{12}{x}$, ta có:

$\left(t-4\right)\left(t+1\right)+6=0 \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$

* $t=1 \Leftrightarrow x-\frac{12}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$

* $t=2 \Leftrightarrow x^2-2x-12=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{13}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm: $x=-3; x=4; x=1\pm\sqrt{13}$

Ví dụ 2)

- **a)** Giải phương trình: $3\left(x^2-x+1\right)^2-2\left(x+1\right)^2=5\left(x^3+1\right)$
- **b)** Giải phương trình: $x^6+3x^5-6x^4-21x^3-6x^2+3x+1=0$
- **c)** Giải phương trình: $\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)^2\left(x+4\right)\left(x+5\right)=360$
- **d)** Giải phương trình: $\left(x^3+5x+5\right)^3+5x^3+24x+30=0$.

Lời giải:

a) Vì $x=-1$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho x^3+1 ta được:

$3\dfrac{x^2-x+1}{x+1}-2\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$. Đặt $t=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}\Rightarrow 3t-\dfrac{2}{t}=5\Leftrightarrow 3t^2-5t-2=0\Leftrightarrow t=2, t=-\dfrac{1}{3}$

* $t=2\Leftrightarrow x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

* $t=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3x^2-2x+4=0$ phương trình vô nghiệm

b) Đây là phương trình bậc 6 và ta thấy các hệ số đối xứng do đó ta có thể áp dụng cách giải mà ta đã giải đối với phương trình bậc bốn có hệ số đối xứng.

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình. Chia 2 vế của phương trình cho x^3 ta được:

$x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-21=0$. Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}, |t|\geq 2$. Ta có:

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2; x^3+\dfrac{1}{x^3}=t\left(t^2-3\right)$ nên phương trình trở thành: $t\left(t^2-3\right)+3\left(t^2-2\right)-6t-21=0$

$\Leftrightarrow t^3-3t^2-9t-27=0\Leftrightarrow (t+3)^2(t-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-3 \end{array}\right.$

* $t=3\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=3\Leftrightarrow x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

* $t=-3\Leftrightarrow x^2+3x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. Vậy phương trình có bốn nghiệm

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}; x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

c) Phương trình $\Leftrightarrow \left(x^2+6x+5\right)\left(x^2+6x+8\right)\left(x^2+6x+9\right)=360$

Đặt $t=x^2+6x$, ta có phương trình: $(y+5)(y+8)(y+9)=360$

$\Leftrightarrow y\left(y^2+22y+157\right)=0\Leftrightarrow y=0\Leftrightarrow x^2+6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-6 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x=0; x=-6$.

d) Ta có: $x^3+5x+30=5\left(x^3+5x+5\right)-x+5$ nên phương trình tương đương

$\left(x^3+5x+5\right)^3+5\left(x^3+24x+\right)x^3+24x+30=0$. Đặt $u=x^3+5x+5$. Ta được hệ:

$\begin{cases} u^3+5u+5=x \\ x^3+5x+5=u \end{cases} \Rightarrow (u-x)\left(u^2+ux+x^2+6\right)=0 \Leftrightarrow u=x$.

$\Leftrightarrow x^3+4x+5=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x+5\right)=0 \Leftrightarrow x=-1$. Vậy $x=-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Dạng 6:

a) Phương trình: $\dfrac{ax}{x^2+mx+p}+\dfrac{bx}{x^2+nx+p}=c$ với $abc \neq 0$.

Phương pháp giải: Nhận xét $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Với $x \neq 0$, ta chia cả tử số và mẫu số cho x thì thu được:

$\dfrac{a}{x+m+\dfrac{p}{x}}+\dfrac{b}{x+n+\dfrac{p}{x}}=c$. Đặt $t=x+\dfrac{k}{x} \Rightarrow t^2=x^2+\dfrac{k^2}{x^2}+2k \geq 2|k|+2k$. Thay vào phương trình để quy về phương trình bậc 2 theo t.

b) Phương trình: $x^2+\left(\dfrac{ax}{x+a}\right)^2=b$ với $a \neq 0, x \neq -a$.

Phương pháp : Dựa vào hằng đẳng thức $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$. Ta viết lại phương trình thành:

$\left(x-\dfrac{ax}{x+a}\right)^2+2a.\dfrac{x^2}{x+a}=b \Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{x+a}\right)^2+2a\dfrac{x^2}{x+a}-b=0$. Đặt $t=\dfrac{x^2}{x+a}$ quy về phương trình bậc 2.

Ví dụ 1) Giải các phương trình:

a) $x^2+\dfrac{25x^2}{(x+5)^2}=11$. (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2013).

b) $\dfrac{12x}{x^2+4x+2}-\dfrac{3x}{x^2+2x+2}=1$. (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Đại học Vinh 2010).

c) $\dfrac{x^2}{(x+2)^2}=3x^2-6x-3$ (Trích đề thi vào lớp 10 chuyên ĐHSP Hà Nội 2008).

d) $x^3+\dfrac{x^3}{(x-1)^3}+\dfrac{3x^2}{x-1}-2=0$

Giải:

a) Điều kiện $x\neq -5$

Ta viết lại phương trình thành $\left(x-\dfrac{5x}{x+5}\right)^2+\dfrac{10x^2}{x+5}-11=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2}{x+5}\right)^2+\dfrac{10x^2}{x+5}-11=0$. Đặt $t=\dfrac{x^2}{x+5}$ thì phương trình có dạng $t^2+10t-11=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-11\end{array}\right.$

Nếu $t=1$ ta có: $\dfrac{x^2}{x+5}=1\Leftrightarrow x^2-x-5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$. Nếu $t=-11\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{x+5}=-11$ $\Leftrightarrow x^2+11x+55=0$ phương trình vô nghiệm.

b) Để ý rằng nếu x là nghiệm thì $x\neq 0$ nên ta chia cả tử số và mẫu số vế trái cho x thì thu được: $\dfrac{12}{x+4+\dfrac{2}{x}}-\dfrac{3}{x+2+\dfrac{2}{x}}=1$. Đặt $t=x+\dfrac{2}{x}+2$ thì phương trình trở thành:

$\dfrac{12}{t+2}-\dfrac{3}{t}=1\Leftrightarrow 12t-3t-6=t^2+2t\Leftrightarrow t^2-7t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=6\end{array}\right.$.

Với $t=1$ ta có: $x+\dfrac{2}{x}+2=1\Leftrightarrow t^2+t+2=0$ vô nghiệm. Với $t=6$ ta có:

$x+\dfrac{2}{x}+2=6\Leftrightarrow x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{2}$.

c) $\left(\dfrac{x}{x+2}-(x+2)\right)^2-(2x-1)^2=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{x+2}+x-3\right)\left(\dfrac{x}{x+2}-3x-1\right)=0$.

Giải 2 phương trình ta thu được các nghiệm là $x=\pm\sqrt{6};x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$.

d) Sử dụng HĐT $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ ta viết lại phương trình thành:

$x^3+\dfrac{x^3}{(x-1)^3}+\dfrac{3x^2}{x-1}-2=0\Leftrightarrow\left[x+\dfrac{x}{x-1}\right]^3-3\dfrac{x^2}{x-1}\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right)+\dfrac{3x^2}{x-1}-2=0$ hay

$\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^3-3\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^2+\dfrac{3x^2}{x-1}-2=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2}{x-1}-1\right)^3=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{x-1}-1=1\Leftrightarrow x^2-2x+2=0$. Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Giải các phương trình sau:

1) $\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+x+3\right)=6$.

2) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=1$.

3) $(x-1)^4+(x+3)^4=82$.

4) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$.

5) $\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)=2x^2$.

6) $(x-2)(x-1)(x-8)(x-4)=4x^2$.

7) $3\left(x^2+2x-1\right)^2-2\left(x^2+3x-1\right)^2+5x^2=0$.

8) $3x^4-4x^3-5x^2+4x+3=0$.

9) $2x^4-21x^3+34x^2+105x+50=0$.

10) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}=0$.

11) $\dfrac{x+4}{x-1}+\dfrac{x-4}{x+1}-\dfrac{x+8}{x-2}-\dfrac{x-8}{x+2}=-\dfrac{8}{3}$.

12) $\dfrac{x+1}{x(x+2)}+\dfrac{x+6}{x^2+12x+35}=\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}+\dfrac{x+5}{x^2+10x+24}$.

13) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}+\dfrac{x^2+2x+2}{x+2}-\dfrac{x^2+3x+3}{x+3}-\dfrac{x^2+4x+4}{x+4}=0$.

14) $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$

15) $\left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2+5x+1\right)=9x^2$.

16) $\left(x^2-5x+1\right)\left(x^2-4\right)=6(x-1)^2$.

17) $x^4-9x^3+16x^2+18x+4=0$.

18) $\dfrac{x^2-12}{(x+2)^2}=3x^2-6x-3$.

19) $\dfrac{2x}{3x^2-5x+2}+\dfrac{13x}{3x^2+x+2}=6$.

20) $x^2\left(x^4-1\right)\left(x^2+2\right)+1=0$.

21) $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2+5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2-20\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1) Đặt $x^2+x+2=t$. Phương trình đã cho thành $t\left(t+1\right)=6\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-3\end{array}\right.$.

Với $t=2$ thì $x^2+x+2=2\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-1$.

Với $t=-3$ thì $x^2+x+2=-3\Leftrightarrow x^2+x+5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1;0;\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right\}$.

2) Biến đổi phương trình thành $\left(36x^2+84x+49\right)\left(36x^2+84x+48\right)=12$.

Đặt $t=36x^2+84x+48$ thì phương trình trên thành $t\left(t+1\right)=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-4\end{array}\right.$.

Với $t=3$ thì $36x^2+84x+48=3\Leftrightarrow 36x^2+84x+45=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ hoặc $x=-\dfrac{5}{6}$. Với $t=-4$ thì $36x^2+84x+48=-4\Leftrightarrow 36x^2+84x+52=0$, phương trình này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\dfrac{5}{6};-\dfrac{3}{2}\right\}$.

3) Đặt $y=x+1$ thì phương trình đã cho thành

$24y^4+48y^2+216=82\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{-2;0\right\}$.

4) Đặt $y=\dfrac{x+1+x+2+x+4+x+5}{4}=x+3$ thì phương trình trở thành:

$$\left(y^2-4\right)\left(y^2-1\right)=10 \Leftrightarrow y^4-5y^2-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{6}-3 \\ x=\sqrt{6}-3 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\sqrt{6}-3;\sqrt{6}-3\right\}$.

5) Do $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia hai vế cho x^2 ta được $\left(x+\dfrac{2}{x}+1\right)\left(x+\dfrac{2}{x}+2\right)=2$. Đặt $y=x+\dfrac{2}{x}$ thì phương trình trở thành

$$(y+1)(y+2)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{2}{x}=0 \\ x+\dfrac{2}{x}=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right..$$

6) Biến đổi phương trình thành

$$\left((x-2)(x-4)\right)\left((x-1)(x-8)\right)=4x^2 \Leftrightarrow \left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-9x+8\right)=4x^2.$$

Do $x=2$ không là nghiệm nên chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$\left(x+\dfrac{8}{x}-6\right)\left(x+\dfrac{8}{x}-9\right)=4$. Đặt $y=x+\dfrac{8}{x}$ thì phương trình trở thành

$(y-6)(y-9)=4 \Leftrightarrow y^2-15y+50=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=10 \end{array}\right.$. Với $y=5$ thì $x+\dfrac{8}{x}=5 \Leftrightarrow x^2-5x+8=0$ (vô nghiệm). Với $y=10$ thì $x+\dfrac{8}{x}=10 \Leftrightarrow x^2-10x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5-\sqrt{17} \\ x=5+\sqrt{17} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left(5-\sqrt{17};5+\sqrt{17}\right)$.

7) Do $x=0$ không là nghiệm của phương trình, chia hai vế của phương trình cho x^2 ta được $3\left(x-\dfrac{1}{x}+2\right)^2-2\left(x-\dfrac{1}{x}+3\right)^2+5=0$. Đặt $y=x-\dfrac{1}{x}$, phương trình trở thành:

$3(y+2)^2-2(y+3)^2+5=0 \Leftrightarrow y^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{1}{x}=1 \\ x-\dfrac{1}{x}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

8) Phương trình không nhận $x=0$ là nghiệm, chia hai vế cho x^2 được $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x-\frac{1}{x}\right)-5=0$. Đặt $t=x-\frac{1}{x}$ thì phương trình trở thành $3t^2-4t+1=0$

$3t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=\frac{1}{3}$.

Với $t=1$ thì $x-\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Với $t=\frac{1}{3}$ thì $x-\frac{1}{x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2-x-3=0 \Leftrightarrow x_3=\frac{1+\sqrt{37}}{2}$ hoặc $x_4=\frac{1-\sqrt{37}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{37}}{2};\frac{1-\sqrt{37}}{2}\right\}$.

9) $2x^4-21x^3+34x^2+105x+50=0$ (8).

Lời giải:

Ta thấy $k=\frac{105}{-21}=-5$ và $k^2=\frac{50}{2}=25$ nên phương trình (8) là phương trình bậc bốn có hệ số đối xứng tỉ lệ. $(8) \Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{25}{x^2}\right)-21\left(x-\frac{5}{x}\right)+34=0$. Đặt $t=x-\frac{5}{x}$ suy ra $t^2=x^2+\frac{25}{x^2}-10$.

Phương trình (9) trở thành $2t^2-21t+54=0 \Leftrightarrow t=6$ hoặc $t=\frac{9}{2}$. Với $t=6$ thì $x-\frac{5}{x}=6 \Leftrightarrow x^2-6x-5 \Leftrightarrow x^2-6x-5=0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1=3+\sqrt{14};x_2=3-\sqrt{14}$. Với $x=\frac{9}{2}$ thì $x-\frac{5}{x}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2-9x-10=0$. Phương trình có hai nghiệm $x_3=\frac{9+\sqrt{161}}{4};x_4=\frac{9-\sqrt{161}}{4}$. Vậy PT (8) có tập nghiệm $S=\left\{3+\sqrt{14};3-\sqrt{14};\frac{9+\sqrt{161}}{4};\frac{9-\sqrt{161}}{4}\right\}$.

10) Điều kiện $x\notin\{-1;-2;-3;-4;0\}$. Ta biến đổi phương trình thành

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{2(x+2)}{x^2+4x}+\frac{2(x+2)}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x+2}=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+4x}+\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{1}{2(x^2+4x+4)}=0$. Đặt $u=x^2+4x$, phương trình trở thành

$\frac{1}{u}+\frac{1}{u+3}+\frac{1}{2(u+4)}=0 \Leftrightarrow \frac{5u^2+25u+24}{2u(u+3)(u+4)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\frac{-25+\sqrt{145}}{10} \\ u=\frac{-25-\sqrt{145}}{10} \end{array}\right.$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} x^2+4x=\frac{-25+\sqrt{145}}{10} \\ x^2+4x=\frac{-25-\sqrt{145}}{10} \end{array}\right.$. Tìm được tập nghiệm của phương trình là

$S=\left\{-2-\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}};-2+\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}};-2+\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}};-2-\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}\right\}$.

11) Biến đổi phương trình thành $\frac{5}{x-1}+\frac{-5}{x+1}-\frac{10}{x+2}+\frac{10}{x+2}=-\frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{10}{x^2-1}-\frac{40}{x^2-4}=-\frac{8}{3}$.

Đặt $u=x^2\left(u\neq 1, u\neq 4; u\geq 0\right)$ dẫn đến phương trình

$4u^2-65u+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=16 \\ u=\frac{1}{4} \end{array}\right.$. bTìm được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\frac{1}{2};-4;\frac{1}{2};4\right\}$.

12)

Điều kiện $x\notin\{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$. Biến đổi phương trình thành

$\frac{x+1}{x(x+2)}+\frac{x+6}{(x+5)(x+7)}=\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}+\frac{x+5}{(x+4)(x+6)}$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{x+6}{2}\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}\right)=\frac{x+2}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{x+5}{x}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+6}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}\right)+\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}\right)=\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6x}\right)+\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)$

$$\Leftrightarrow (2x+7)\left(\frac{1}{x^2+7}+\frac{1}{x^2+7x+10}-\frac{1}{x^2+7x+6}-\frac{1}{x^2+7x+12}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{x^2+7x}+\dfrac{1}{x^2+7x+10}+\dfrac{1}{x^2+7x+6}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}=0(*) \end{array}\right.$$

Đặt $u=x^2+7x$ thì phương trình (*) có dạng

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{u+10}+\frac{1}{u+6}+\frac{1}{u+12}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+6}\right)+\left(\frac{1}{u+10}-\frac{1}{u+12}\right)=0 \Leftrightarrow u^2+18u+90=0.$$

Mặt khác $u^2+18u+90=(u+9)^2+9>0$ với mọi u. Do đó phương trình (*) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{7}{2}$.

13) .

Lời giải:

Điều kiện $x \notin \{-4;-3;-2;-1\}$. Biến đổi phương trình thành

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}-\frac{4}{x+4}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x+4}\right)+\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{3}{x^2+5x+4}+\frac{1}{x^2+5x+6}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \dfrac{3}{x^2+5x+4}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}=0(*) \end{array}\right.$$

Đặt $u=x^2+5x$ thì phương trình (*) trở thành $\dfrac{3}{u+4}+\dfrac{1}{u+6}=0 \Leftrightarrow u=-\dfrac{11}{2}$. Từ đó ta có

$$2x^2+10x+11=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{0;\dfrac{-5-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-5+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

14)

Do $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức ở vế trái của phương trình cho x, rồi đặt $y=4x+\dfrac{7}{x}$ ta được

$\frac{4}{y-8}+\frac{3}{y-10}=1$.

Phương trình trên có 2 nghiệm $y=16, y=9$.

Với $y=9$ thì $4x+\frac{7}{x}=9 \Leftrightarrow 4x^2-9x+7=0$. Phương trình này vô nghiệm.

Với $y=16$ thì $4x+\frac{7}{x}=16 \Leftrightarrow 4x^2-16x+7=0$. Phương trình này có hai nghiệm $x_1=\frac{1}{2}; x_2=\frac{7}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$.

15) Đặt $t=2x^2+x+1$, phương trình (1) thành

$(t-4x)(t+4x)=9x^2 \Leftrightarrow t^2-16x^2=9x^2 \Leftrightarrow t^2=25x^2 \Leftrightarrow t=-5x$ hoặc $t=5x$.

Với $t=-5x$ thì $2x^2+x+1=-5x \Leftrightarrow 2x^2+6x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$.

Với $t=5x$ thì $2x^2+x+1=5x \Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2};\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right\}$.

16) Lời giải:

Đặt $u=x-1$ đưa phương trình (2) về dạng tổng quát $(u^2-7u-3)(u^2-2u-3)=6u^2$.

Bạn đọc giải tiếp theo phương pháp đã nêu. Ta có thể giải bằng cách khác như sau

Viết phương trình đã cho về dạng $(x^2-4-5x+5)(x^2-4)-6(x-1)^2=0$.

Đặt $t=x^2-4$, phương trình thành

$t^2+(-5x+5)t+(-6x+6)(x-1)=0 \Leftrightarrow (t-6x+6)(t+x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6x-6 \\ t=-x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4=6x-6 \\ x^2-4=-x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+2=0 \\ x^2+x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\pm\sqrt{7} \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của PT(2) là $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2};3-\sqrt{7};\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2};3+\sqrt{7}\right\}$.

17) PTtương đương với $x^4-9x\left(x^2-2\right)+16x^2+4=0$.

Đặt $t=x^2-2$ thì $t^2=x^4-4x^2+4$, PT trên thành

$t^2-9xt+20x^2=0 \Leftrightarrow (t-4x)(t-5x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4x \\ t=5x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2=4x \\ x^2-2=5x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x-2=0 \\ x^2-5x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pm\sqrt{6} \\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{2-\sqrt{6};\dfrac{5-\sqrt{33}}{2};2+\sqrt{6};\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}\right\}$.

18) Điều kiện $x\neq -2$. Khử mẫu thức ta được phương trình tương đương:
$3x^4+6x^3-16x^2-36x-12=0 \Leftrightarrow 3x^4+6x\left(x^2-6\right)-16x^2-12=0$.
đặt $t=x^2-6$ thì $t^2=x^4-12x^2+36$, suy ra $3x^4=3t^2+36x^2-108$, PT trên thành
$3t^2+6xt+20t=0 \Leftrightarrow t(3t+6x+20)=0 \Leftrightarrow t=0$ hoặc $3t=-6x-20$. Với $t=0$ thì
$x^2-6=0$, suy ra $x=\pm\sqrt{6}$ (thỏa mãn đk). Với $3t=-6x-20$ ta có $3x^2-18=-6x-20$
hay $3x^2+6x+2=0$ suy ra $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$ (thỏa mãn đk). Vậy tập nghiệm của PT(4) là
$S=\left\{\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3};-\sqrt{6};\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3};\sqrt{6}\right\}$.

19) $\dfrac{2x}{3x^2-5x+2}+\dfrac{13x}{3x^2+x+2}=6$ (5).

Lời giải: Đặt $t=3x^2+2$ PT(5) trở thành

$\frac{2x}{t-5x}+\frac{13x}{t+x}=6$. ĐK: $t\neq 5x, t\neq -x$.
Khử mẫu thức ta được PT tương đương

$2t^2-13tx+11x^2=0 \Leftrightarrow (t-x)(2t-11x)=0$

$\Leftrightarrow t=x$ hoặc $t=\frac{11}{2}x$ (thỏa mãn ĐK)

Với $t=x$ thì $3x^2+2=x \Leftrightarrow 3x^2-x+2=0$ phương trình vô nghiệm.

Với $t=\frac{11}{2}x$ thì $3x^2+2=\frac{11}{2}x \Leftrightarrow 6x-11x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ hoặc $x=\frac{4}{3}$. Vậy tập nghiệm của PT(5) là $\left\{\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right\}$.

20) PT $\Leftrightarrow x^2(x^2+1)(x^2-1)(x^2+2)+1=0$

$\Leftrightarrow (x^4+x^2)(x^4+x^2-2)+1=0$

$\Leftrightarrow (x^4+x^2)^2-2(x^4+x^2)+1=0$

$\Leftrightarrow (x^4+x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow x^4+x^2-1=0$.

Giải phương trình trùng phương trên ta được tập nghiệm của PT là $\left\{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right\}$.

21) Lời giải:

Điều kiện $x\neq \pm 1$.

Đặt $\frac{x-2}{x+1}=y;\frac{x+2}{x-1}=z$, PT có dạng: $20y^2+5z^2-20yz=0 \Leftrightarrow 5(2y-z)^2=0 \Leftrightarrow 2y=z$

Dẫn đến $2.\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x+2}{x-1}\Leftrightarrow 2\left(x-2\right)\left(x-1\right)=\left(x+2\right)\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x+4=x^2+3x+2\Leftrightarrow x^2-9x+2=0$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{9+\sqrt{73}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{9-\sqrt{73}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy tập nghiệm của PT(2) là $\left\{\dfrac{9-\sqrt{73}}{2};\dfrac{9+\sqrt{73}}{2}\right\}$.