Chủ đề 3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Kiến thức cần nhớ

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng:
$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

+ Cặp số $(x_0;y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình nếu nó là nghiệm chung của cả hai phương trình đó.

+ Hệ có thể có nghiệm duy nhất, vô nghiệm hoặc vô số nghiệm tùy theo vị trí tương đối của hai đường thẳng biểu diễn nghiệm của hai phương trình.

+ Phương pháp giải hệ: Chúng ta thường dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số để khử bớt một ẩn, từ đó sẽ giải được hệ.

Một số ví dụ

Ví dụ 1. Xác định các hệ số a,b của hàm số $y=ax+b$ để:

1) Đồ thị của nó đi qua hai điểm $A(1;3),B(2;4)$
2) Đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải:

1) Thay tọa độ các điểm A,B vào phương trình của đường thẳng ta được:

$\begin{cases} 3=a+b \\ 4=2a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a \\ 4=2a+3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3-a=2 \end{cases}$. Vậy $a=1,b=2$.

2) Tương tự phần (1) ta có hệ: $\begin{cases} -4 = a.0 + b \\ 0 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ 2a = -b + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$

Vậy $a = 2, b = -4$.

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y-1} = 3 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y-1} = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 2 \\ 2\sqrt{2x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 1 \end{cases}$

Lời giải:

a) Đặt $u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}$. Theo đề bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ 3u - 2v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ 3u - 2(3-u) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u = 5 \\ v = 3 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra: $x = \frac{1}{u} = 1; \quad y = \frac{1}{v} = \frac{1}{2}$.

b) Đặt $u = \frac{x}{x+1}; v = \frac{y}{y-1}$. Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u - v = 3 \\ u + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 + v \\ 3 + v + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 + v \\ 4v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{y}{y-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 2 \\ y = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

c). Điều kiện $x \ge \frac{1}{2}, x - y > 0$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \\ b = \frac{1}{\sqrt{x-y}} \end{cases}$ ta có hệ phương trình mới

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = 1; y = 0$

Ví dụ 3. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y = 5 & (1) \\ mx - y = 4 & (2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m = 2$.
b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) trong đó x, y trái dấu.
c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x = |y|$.

Giải:

a) Với $m = 2$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5 \\ 2(2y+5) - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 5 \\ 3y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

b) Từ phương trình (1) ta có $x = 2y + 5$. Thay $x = 2y + 5$ vào phương trình (2) ta được: $m(2y+5) - y = 4 \Leftrightarrow (2m-1).y = 4 - 5m \quad (3)$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất. Điều này tương đương với: $2m - 1 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne \frac{1}{2}$. Từ đó ta được: $y = \frac{4-5m}{2m-1}$;

$x = 5 + 2y = \dfrac{3}{2m-1}$. Ta có: $x.y = \dfrac{3(4-5m)}{(2m-1)^2}$. Do đó

$x, y < 0 \Leftrightarrow 4-5m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{4}{5}$ (thỏa mãn điều kiện)

c)Ta có: $x = |y| \Leftrightarrow \dfrac{3}{2m-1} = \left|\dfrac{4-5m}{2m-1}\right| \quad (4)$

Từ (4) suy ra $2m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$. Với điều kiện $m > \dfrac{1}{2}$ ta có:

$(4) \Leftrightarrow |4-5m| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-5m = 3 \\ 4-5m = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{5}(l) \\ m = \dfrac{7}{5} \end{array}\right.$. Vậy $m = \dfrac{7}{5}$.

Ví dụ 4. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = m + 1 & (1) \\ mx + y = 3m - 1 & (2) \end{cases}$

a) Không giải hệ phương trình trên, cho biết với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất?
b) Giải và biện luận hệ phương trình trên theo m.
c) Tìm số nguyên m sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) mà x, y đều là số nguyên.
d) Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất (x, y) thì điểm $M(x, y)$ luôn chạy trên một đường thẳng cố định.
e) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất sao cho $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Từ phương trình (2) ta có $y = 3m - 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được: $x + m\left(3m - 1 - mx\right) = m + 1 \Leftrightarrow \left(m^2 - 1\right)x = 3m^2 - 2m - 1 \quad (3)$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất , tức là $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Ta cũng có thể lập luận theo cách khác: Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi : $\frac{1}{m} \neq \frac{m}{1} \Leftrightarrow m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

b) Từ phương trình (2) ta có $y = 3m - 1 - mx$. Thay vào phương trình (1) ta được: $x + m\left(3m - 1 - mx\right) = m + 1 \Leftrightarrow \left(m^2 - 1\right).x = 3m^2 - 2m - 1 \quad (3)$

Trường hợp 1: $m \neq \pm 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{3m^2 - 2m - 1}{m^2 - 1} = \dfrac{(m-1)(3m+1)}{(m-1).(m+1)} = \dfrac{3m+1}{m+1} \\ y = 3m - 1 - m.\dfrac{3m+1}{m+1} = \dfrac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

Trường hợp 2: $m = 1$. Khi đó phương trình (3) thành: $0.x = 0$.

Vậy hệ có vô số nghiệm dạng $\left(x; 2 - x\right), x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 3: $m = -1$ khi đó phương trình (3) thành: $0.x = 4$

(3) vô nghiệm, do đó hệ vô nghiệm.

c) Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq \pm 1$.

Ta có: $\begin{cases} x = \dfrac{3m+1}{m+1} = 3 - \dfrac{2}{m+1} \\ y = \dfrac{m-1}{m+1} = 1 - \dfrac{2}{m+1} \end{cases}$. Vậy x, y nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{2}{m+1}$ nguyên. Do đó $m+1$ chỉ có thể là $-2;-1;1;2$. Vậy $m=-3;-2;0$ (thỏa mãn) hoặc $m=1$ (loại)

Vậy m nhận các giá trị là $-3;-2;0$.

d) Khi hệ có nghiệm duy nhất (x,y) ta có: $x-y = 3 - \dfrac{2}{m+1} - \left(1 - \dfrac{2}{m+1}\right) = 2$

Vậy điểm $M(x;y)$ luôn chạy trên đường thẳng cố định có phương trình $y = x-2$.

e) Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ theo (d) ta có: $y = x-2$. Do đó:

$xy = x.(x-2) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1 \geq -1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$x = 1 \Leftrightarrow 3 - \dfrac{2}{m+1} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{m+1} = 2 \Leftrightarrow m+1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy với $m=0$ thì $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Chú ý: Ta cũng có thể tìm quan hệ $x-y=2$ theo cách khác: Khi hệ phương trình $\begin{cases} x + my = m+1 & (1) \\ mx + y = 3m-1 & (2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(\mathrm{m} \neq \pm 1)$ lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1) của hệ ta thu được:

$(m-1)x - (m-1)y = 2(m-1) \Rightarrow x - y = 2$

Ví dụ 5. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm. Gọi $(x_0; y_0)$ là một cặp nghiệm của phương trình: Chứng minh: $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán - ĐHSP Hà Nội 2015).

Lời giải:

Từ phương trình (2) của hệ phương trình ta có $y = 3m + 1 - mx$ thay vào phương trình (1) của hệ ta có: $(m^2 + 1)x = 3m^2 - 3m + 2$. Do $m^2 + 1 \neq 0$ với mọi m nên phương trình này luôn có nghiệm duy nhất x_0. Suy ra hệ luôn có nghiệm với mọi m.

Gọi $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ: Từ hệ phương trình ta có:

$\begin{cases} x_0 - 2 = m(y_0 - 4) \\ y_0 - 1 = m(3 - x_0) \end{cases}$.Nhân cả hai vế phương trình thứ nhất với $(3 - x_0)$, phương trình thứ hai với $(y_0 - 4)$ rồi trừ hai phương trình cho nhau ta được:

$(3 - x_0)(x_0 - 2) - (y_0 - 4)(y_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$.

Ngoài ra ta cũng có thể giải theo cách khác như sau:

$(d): x - my + 4m - 2 = 0, (d'): mx + y - 3m - 1 = 0$. Ta dễ dàng chứng minh được đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định: $A(2;4)$ và đường thẳng (d') luôn đi qua điểm cố định : $B(3;1)$. Mặt khác ta cũng dễ chứng minh đường thẳng (d) và đường thẳng (d') vuông góc với nhau nên hai đường thẳng này luôn cắt nhau. Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng thì tam giác MAB vuông tại M. Gọi I là trung điểm của AB thì

$I\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$, $AB=\sqrt{10}$ suy ra

$$IM=\frac{1}{2}AB \Leftrightarrow 4IM^2=AB^2 \Leftrightarrow 4\left[\left(x_0-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y_0-\frac{5}{2}\right)^2\right]=10.$$

$$\Leftrightarrow {x_0}^2+{y_0}^2-5\left(x_0+y_0\right)+10=0.$$

Ví dụ 6. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=3 & (1) \\ mx+y=2m+1 & (2) \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất (x,y), hãy tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau đây:

a) $P=x^2+3y^2$ (1).

b) $Q=x^4+y^4$ (2).

Lời giải:

Từ phương trình (2) ta suy ra: $y=2m+1-mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x+m\left(2m+1-mx\right)=3 \Leftrightarrow \left(m^2-1\right).x=2m^2+m-3 \quad (3).$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, điều đó xảy ra khi và chỉ khi: $m^2-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 1$.

Khi đó $\begin{cases} x=\dfrac{2m^2+m-3}{m^2-1}=\dfrac{(m-1)(2m+3)}{(m-1).(m+1)}=\dfrac{2m+3}{m+1}=2+\dfrac{1}{m+1} \\ y=2m+1-m.\dfrac{2m+3}{m+1}=\dfrac{1}{m+1} \end{cases}$.

a) Ta có: $P=x^2+3(x-2)^2=4x^2-12x+12=(2x-3)^2+3\geq 3$

$P=3$ khi $x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{2m+3}{m+1}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 4m+6=3m+3\Leftrightarrow m=-3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3.

b) Ta có: $Q=x^4+y^4=x^4+(x-2)^4$

đặt $t=x-1$.

Khi đó

$Q=(t+1)^4+(t-1)^4=t^4+4t^3+6t^2+4t+1+t^4-4t^3+6t^2-4t+1=2t^4+12t^2+2\geq 2$

$Q=2\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow x=1\Leftrightarrow\frac{2m+3}{m+1}=1\Leftrightarrow 2m+3=m+1\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng 2.

Ví dụ 7): Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx+(m+1)y=1 \\ (m+1)x-my=8m+3 \end{cases}$. Chứng minh hệ luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ và tìm GTLN của biểu thức $P=\left|x^2+y^2+\left(4+2\sqrt{3}\right)y\right|$.

Lời giải:

Xét hai đường thẳng

$(d_1): mx+(m+1)y-1=0; (d_2): (m+1)x-my-8m+3=0$.

+ Nếu $m=0$ thì $(d_1): y-1=0$ và $(d_2): x-5=0$ suy ra (d_1) luôn vuông góc với (d_2).

+ Nếu $m=-1$ thì $(d_1): x+1=0$ và $(d_2): y+11=0$ suy ra (d_1) luôn vuông góc với (d_2).

+ Nếu $m\neq\{0;1\}$ thì đường thẳng $(d_1),(d_2)$ lần lượt có hệ số góc là:

$a_1=-\frac{m}{m+1}, a_2=\frac{m+1}{m}$ suy ra $a_1.a_2=-1$ do đó $(d_1)\perp(d_2)$.

Tóm lại với mọi m thì hai đường thẳng (d_1) luôn vuông góc với (d_2). Nên hai đường thẳng luôn vuông góc với nhau.

Xét hai đường thẳng

$(d_1): mx+(m+1)y-1=0; (d_2):(m+1)x-my-8m+3=0$ luôn vuông góc với nhau nên nó cắt nhau, suy ra hệ có nghiệm duy nhất. Gọi giao điểm là $I(x;y)$, đường thẳng (d_1) đi qua $A(-1;1)$ cố định, đường thẳng (d_2) luôn đi qua $B(3;-5)$ cố định suy ra I thuộc đường tròn đường kính AB. Gọi $M(1;-2)$ là trung điểm AB thì $MI=\frac{AB}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=13$ (*).

$P=\left|(x-1)^2+(y+2)^2+2x+2\sqrt{3}y-5\right|=\left|8+2\left(x+\sqrt{3}y\right)\right|=$

$\left|8+2\left[x-1+\sqrt{3}(y+2)+1-2\sqrt{3}\right]\right|$ hay $P=\left|10-4\sqrt{3}+2\left[x-1+\sqrt{3}(y+2)\right]\right|$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$\left[x-1+\sqrt{3}(y+2)\right]^2 \le (1+3)\left[(x-1)^2+(y+2)^2\right]=52 \Rightarrow x-1+\sqrt{3}(y+2) \le$

$\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ Vậy $P \le 10-2\sqrt{3}+2\sqrt{13}$.

.