CHƯƠNG 2: ĐƯỜNG TRÒN

CHỦ ĐỀ 1: SỰ XÁC ĐỊNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Định nghĩa: Đường tròn tâm O bán kính $R > 0$ là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng R kí hiệu là $(O;R)$ hay (O)

+ Đường tròn đi qua các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$

+ Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là đường tròn nội tiếp đa giác đó.

Những tính chất đặc biệt cần nhớ:

+ Trong tam giác vuông trung điểm cạnh huyền là tâm vòng tròn ngoại tiếp

+ Trong tam giác đều , tâm vòng tròn ngoại tiếp là trọng tâm tam giác đó.

+ Trong tam giác thường:

Tâm vòng tròn ngoại tiếp là giao điểm của 3 đường trung trực của 3 cạnh tam giác đó

Tâm vòng tròn nội tiếp là giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác đó

PHƯƠNG PHÁP: Để chứng minh các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ cùng thuộc một đường tròn ta chứng minh các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ cách đều điểm O cho trước.

Ví dụ 1) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Chứng minh 4 điểm B, P, N, C cùng thuộc một đường tròn.

Tính bán kính đường tròn đó.

Giải:

Vì tam giác ABC đều nên các trung tuyến đồng thời cũng là đường cao. Suy ra AM, BN, CP lần lượt vuông góc với BC, AC, AB.

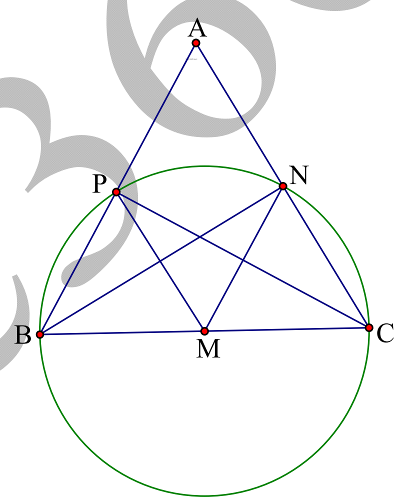
Từ đó ta có các tam giác BPC, BNC là tam giác vuông

Với BC là cạnh huyền, suy ra $MP = MN = MB = MC$

Hay: Các điểm B, P, N, C cùng thuộc đường tròn

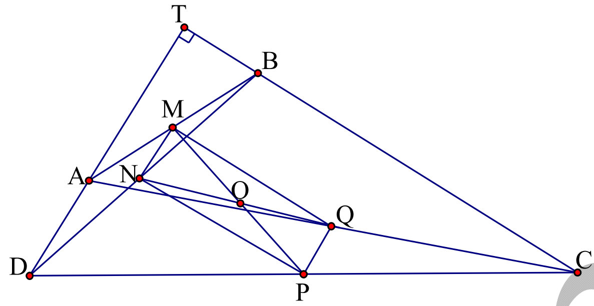
Đường kính $BC = a$, tâm đường tròn là

Trung điểm M của BC



Ví dụ 2) Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^0$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA. Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn. Tìm tâm đường tròn đó.

Giải:



Kéo dài AD, CB cắt nhau tại điểm T thì tam giác TCD vuông tại T.

+ Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên $NM // AD$

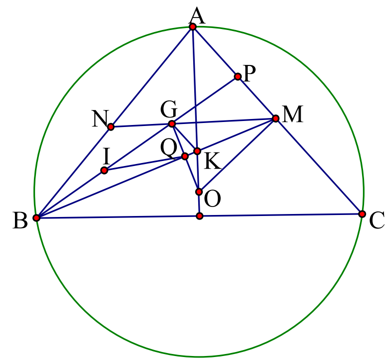
+ MQ là đường trung bình của tam giác ABC nên $MQ // BC$. Mặt khác $AD \perp BC \Rightarrow MN \perp MQ$. Chứng minh tương tự ta cũng có: $MN \perp NP, NP \perp PQ$. Suy ra $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Hay các điểm M, N, P, Q thuộc một đường tròn có tâm là giao điểm O của hai đường chéo NQ, MP

Ví dụ 3) Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của AC

G là trọng tâm của tam giác ABM. Gọi Q là giao điểm của BM và GO. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BGQ.

Giải:



Vì tam giác ABC cân tại A nên tâm O của vòng tròn ngoại tiếp tam giác nằm trên đường trung trực của BC.Gọi K là giao điểm của AO và BM

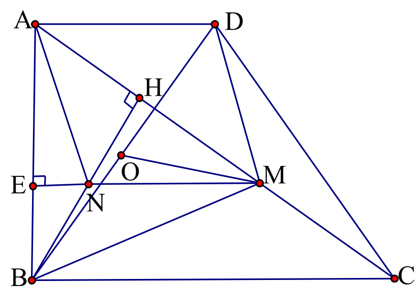
Dựng các đường trung tuyến MN, BP của tam giác ABM cắt nhau tại trọng tâm G.Do $MN//BC \Rightarrow MN \perp AO$. Gọi K là giao điểm của BM và AO thì K là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $GK//AC$.

Mặt khác ta có $OM \perp AC$ suy ra $GK \perp OM$ hay K là trực tâm của tam giác $OMG \Rightarrow MK \perp OG$. Như vậy tam giác BQG vuông tại Q. Do đó tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác GQB là trung điểm I của BG.

Ví dụ 4). Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$. $BC = 2AD = 2a$, Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC

M là trung điểm của HC. Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM

Giải:



Gọi N là trung điểm của BH thì MN là đường trung bình của tam giác HBC suy ra $MN \perp AB$, mặt khác $BH \perp AM \Rightarrow N$ là trực tâm của tam giác ABM suy ra $AN \perp BM$.

Do $MN // = \frac{1}{2}BC \Rightarrow MN // = AD$ nên $ADMN$ là hình bình hành suy ra $AN // DM$. Từ đó ta có: $DM \perp BM$ hay tam giác DBM vuông tại M nên tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác DBM là trung điểm O của BD.

Ta có $R = MO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

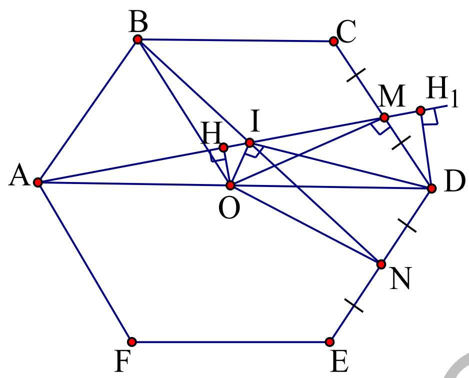
Bài toán tương tự cho học sinh thử sức.

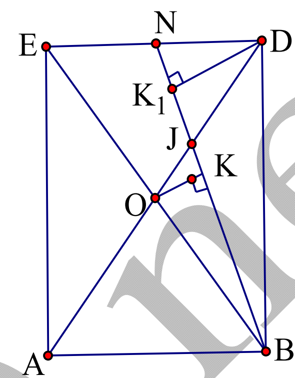
Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ BH vuông góc với AC. Trên AC, CD ta lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AH} = \frac{DN}{DC}$. Chứng minh 4 điểm M, B, C, N nằm trên một đường tròn.

Gợi ý: $\widehat{BCN} = 90^0$, hãy chứng minh $\widehat{BMN} = 90^0$

Ví dụ 5). Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Gọi M, N là trung điểm của CD, DE. AM cắt BN tại I. Chứng minh rằng các điểm M, I, O, N, D nằm trên một đường tròn.

Giải:





Do $ABCDEF$ là lục giác đều nên $OM \perp CD, ON \perp DE \Rightarrow M, N, C, D$ nằm trên đường tròn đường kính OD. Vì tam giác $\Delta OBN = \Delta OAM$ nên điểm O cách đều AM, BN suy ra OI là phân giác trong của góc $\widehat{AIN}$.

Kẻ $\begin{cases} OH \perp AM \\ DH_1 \perp AM \end{cases} \Rightarrow DH_1 = 2OH$ (Do OH là đường trung bình của tam giác DAH_1

Kẻ $\begin{cases} OK \perp BN \\ DK_1 \perp BN \end{cases} \Rightarrow DK_1 = 2OK$ (Do $\dfrac{OK}{DK_1} = \dfrac{JO}{JD} = \dfrac{1}{2}$ với $J = AD \cap NB$)

Do $OK = OH \Leftrightarrow DH_1 = DK_1$ suy ra D cách đều AM, BN hay ID là phân giác ngoài của $\widehat{AIN} \Rightarrow \widehat{OID} = 90^0$. Vậy 5 điểm M, I, O, N, D cùng nằm trên một đường tròn đường kính OD.

Ví dụ 6) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm BC, N là điểm thuộc đường chéo AC sao cho $AN = \dfrac{1}{4}AC$. Chứng minh 4 điểm M, N, C, D

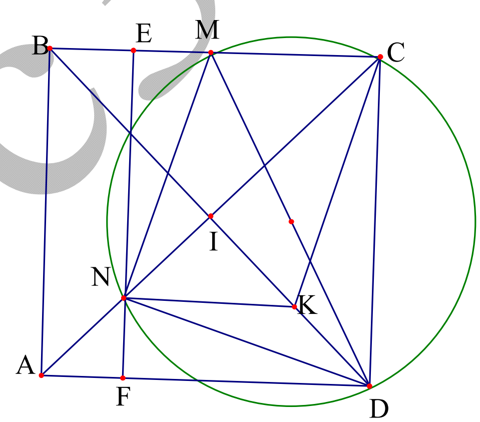
nằm trên cùng một đường tròn.

Giải:

Ta thấy tứ giác $MCDN$ có $\widehat{MCD}=90^0$ nên để chứng minh 4 điểm M,N,C,D cùng nằm trên một đường tròn ta sẽ chứng minh $\widehat{MND}=90^0$

Cách 1: Kẻ đường thẳng qua N song song với AB cắt BC,AD tại E,F. Xét hai tam giác vuông NEM và DFN $EM=NF=\frac{1}{4}AB, EN=DF=\frac{1}{4}AB$ từ đó suy ra $\Delta NEM=\Delta DFN$ do đó $\widehat{NME}=\widehat{DNF}, \widehat{MNE}=\widehat{NDF}\Rightarrow \widehat{MNE}+\widehat{DNF}=90^0$ Hay tam giác MND vuông tại N. Suy ra 4 điểm M,N,C,D cùng nằm trên đường tròn đường kính MD

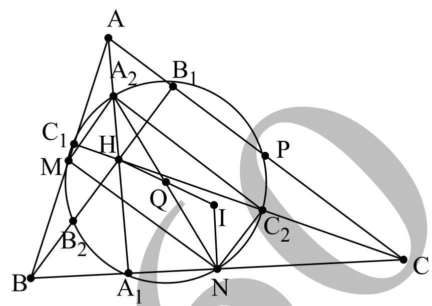
Cách 2: Gọi K là trung điểm của ID với I là giao điểm của hai đường chéo. Dễ thấy $MCKN$ là hình bình hành nên suy ra $CK//MN$. Mặt khác do $NK\perp CD, DK\perp CN\Rightarrow K$ là trực tâm của tam giác $CDN\Rightarrow CK\perp ND\Leftrightarrow MN\perp ND$.



Ví dụ 7) Trong tam giác ABC gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của

AB, BC, CA. A_1, B_1, C_1 lần lượt là các chân đường cao hạ từ đỉnh A, B, C đến các cạnh đối diện. A_2, B_2, C_2 là trung điểm của HA, HB, HC. Khi đó 9 điểm $M, N, P, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ cùng nằm trên một đường tròn gọi là đường tròn Ơ le của tam giác

Giải:

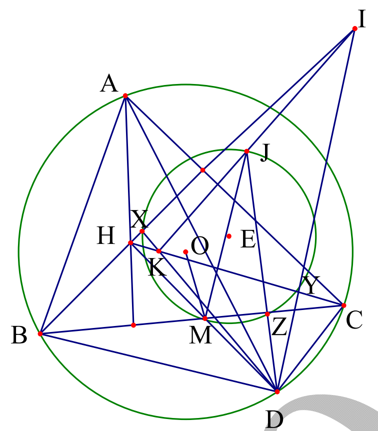


a). Thật vậy ta có $MN \parallel = A_2C_2 \parallel = \frac{1}{2}AC$, $MA_2 \parallel = NC_2 \parallel = \frac{1}{2}BH$ mà $BH \perp AC$ suy ra MNC_2B_2 là hình chữ nhật, tương tự ta có MPB_2C_2, NPA_2B_2 là hình chữ

nhật nên 9 điểm $M, N, P, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm của các đường chéo của 3 hình chữ nhật trên. Từ đó ta suy ra tâm đường tròn Ơ le là trung điểm Q của HI

Ví dụ 8) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) AD là đường kính của (O). M là trung điểm của BC, H là trực tâm của tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên HB, HC, BC. Chứng minh 4 điểm X, Y, Z, M cùng thuộc một đường tròn

Giải:



<u>Phân tích:</u> M là trung điểm $BC \Rightarrow M$ cũng là trung điểm của HD (Bài toán quen thuộc). X,Y,Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên HB,HC,BC kết hợp tính chất điểm M làm ta liên tưởng đến đường tròn Ơ le của một tam giác: Từ những cơ sở đó ta có lời giải như sau:

+ Giả sử HB cắt DY tại I,HC cắt DX tại K, J là trung điểm của IK.

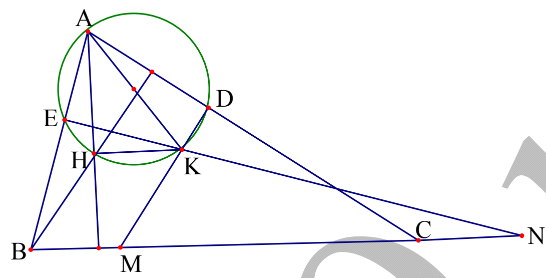
Ta dễ chứng minh được $BHCD$ là hình bình hành suy ra hai đường chéo HD,BC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Vì $DX \perp HI$, $DI \perp HC$ suy ra K là trực tâm của tam giác IHD nên $\widehat{KDI} = \widehat{KHI} = \widehat{HCD}$ (chú ý $HI//CD$) và $\widehat{CHD} = \widehat{KID}$ (cùng phụ với góc $\widehat{HDI}$). Từ đó suy ra $\Delta KID \sim \Delta CHD$

+ Mặt khác CM,DJ là hai trung tuyến tương ứng của tam giác CHD và KID, như vậy ta có $\Delta DIJ \sim \Delta CHM \Rightarrow \widehat{JDI} = \widehat{HCM}$. Từ đó suy ra $DJ \perp BC$ tại Z hay Z thuộc đường tròn đường kính MJ. Theo bài toán ở ví dụ 6, đường tròn đường kính MJ là đường tròn Ơ le của tam giác IHD. Từ đó ta có: X,Y,Z,M đều cùng nằm trên đường tròn đường kính MJ. Đó là điều phải chứng minh.

Ví dụ 9) Cho tam giác ABC có trực tâm H. Lấy điểm M,N thuộc tia BC

sao cho $MN = BC$ và M nằm giữa B, C. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên AC, AB. Chứng minh cácđiểm A, D, E, H cùng thuộc một đường tròn.

Giải:



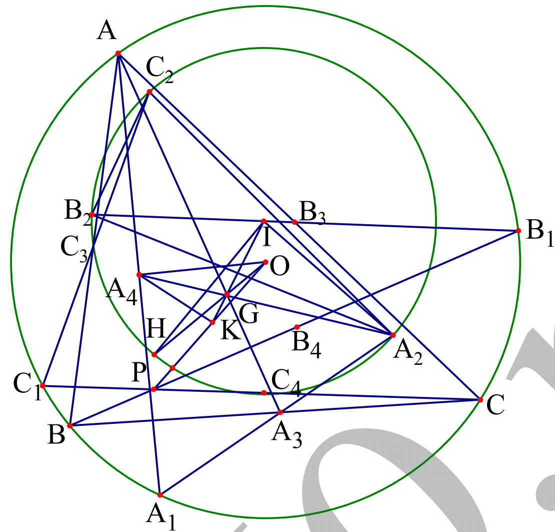
Giả sử MD cắt NE tại K. Ta có $HB // MK$ do cùng vuông góc với AC suy ra $\widehat{HBC} = \widehat{KMN}$ (góc đồng vị) .

Tương tự ta cũng có $\widehat{HCB} = \widehat{KNM}$ kết hợp với giả thiết $BC = MN$

$\Rightarrow \Delta BHC = \Delta KMN \Leftrightarrow S_{\Delta BHC} = S_{\Delta KMN} \Rightarrow HK // BC$. Mặt khác ta có $BC \perp HA$ nên $HK \perp HA$ hay H thuộc đường tròn đường tròn đường kính AK. Dễ thấy $E, D \in (AK)$ nên cácđiểm A, D, E, H cùng thuộc một đường tròn.

Ví dụ 10) Cho tam giác ABC. P là điểm bất kỳ PA, PB, PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 là các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng: A_2, B_2, C_2 và trực tâm H của tam giác ABC cùng thuộc một đường tròn.

Giải:



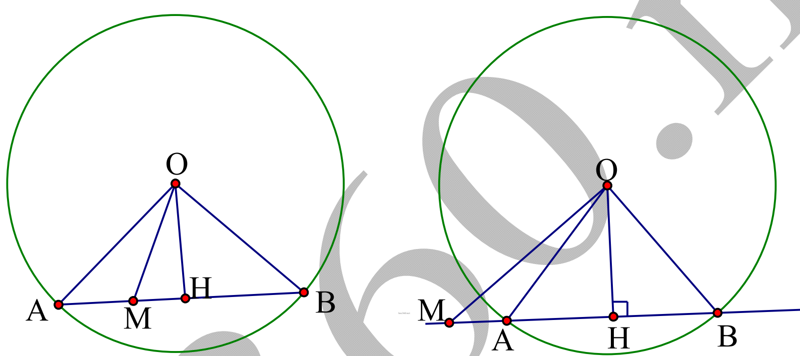
+ Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, theo bài toán quen thuộc về đường tròn Ơ le thì G thuộc đoạn OH và $OG=\frac{1}{3}OH$. Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Theo giả thiết A_3 là trung điểm của A_1A_2, vậy G là trọng tâm của tam giác ABC và AA_1A_2. Gọi A_4, B_4, C_4 lần lượt là trung điểm của AA_1, BB_1, CC_1. Vì G là trọng tâm của tam giác AA_1A_2 nên $\frac{GA_4}{GA_2}=\frac{1}{3}$. Gọi K là trung điểm của OP vì AA_1 là dây cung của $(O) \Rightarrow OA_4 \perp AA_1 \Rightarrow A_4$ thuộc đường tròn tâm K đường kính OP hay $KA_4=\frac{OP}{2}$ (2)

+ Gọi I là điểm thuộc tia đối GK sao cho $\frac{GK}{GI}=\frac{1}{3}$ (3). Từ (1) và (3) suy ra $IH//KO$ và $IH=2KO=OP$. Từ (2) và (3) ta dễ thấy $IA_2//KA_4$ và $IA_2=2KA_4=OP$. Từ đó suy ra $IA_2=IH$ hay $A_2 \in (I;IH)$. Tương tự ta có

$B_2, C_2 \in (I; IH)$. Hay A_2, B_2, C_2, H thuộc đường tròn tâm I bán kính $IH = OP$ ta có điều phải chứng minh.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1.Khi một đường thẳng có hai điểm chung A, B với đường tròn (O) ta nói đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt. Khi đó ta có những kết quả quan trọng sau:



+ $OH \perp AB \Rightarrow OH < R, HA = HB = \sqrt{R^2 - OH^2}$ **.** Theo định lý Pitago ta có: $OH^2 = MO^2 - MH^2$ Mặt khác ta cũng có: $OH^2 = R^2 - AH^2$ nên suy ra $MO^2 - MH^2 = R^2 - AH^2 \Leftrightarrow MH^2 - AH^2 = MO^2 - R^2$

$\Leftrightarrow (MH - AH)(MH + AH) = MO^2 - R^2$

+ Nếu M nằm ngoài đoạn AB thì $MA.MB = MO^2 - R^2$

+ Nếu M nằm trong đoạn AB thì $MA.MB = R^2 - MO^2$

Mối liên hệ khoảng cách và dây cung: $R^2 = OH^2 + \frac{AB^2}{4}$

2. Khi một đường thẳng Δ chỉ có một điểm chung H với đường tròn (O), ta nói đường thẳng tiếp xúc với đường tròn, hay Δ là tiếp tuyến của đường tròn (O). Điểm H gọi là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (O)

Như vậy nếu Δ là tiếp tuyến của (O) thì Δ vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm

Ta có $OH = R$

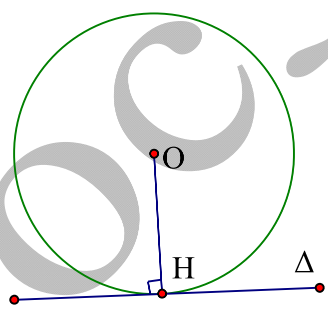
Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì

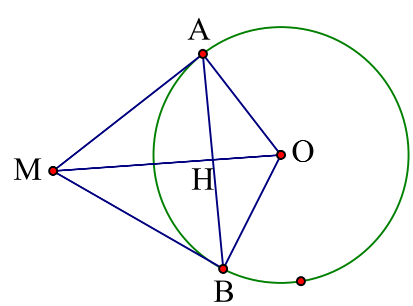
+ Điểm đó cách đều hai tiếp điểm

+ Tia kẻ từ điểm đó đến tâm O là tia phân giác góc tạo bởi 2 tiếp tuyến

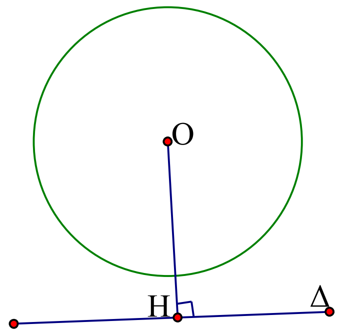
+Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm

+ Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó thì vuông góc với đoạn thẳng nối hai tiếp điểm tại trung điểm của đoạn thẳng đó.





3. Khi một đường thẳng Δ và đường tròn (O) không có điểm chung ta nói đường thẳng Δ và đường tròn (O) không giao nhau. Khi đó $OH > R$



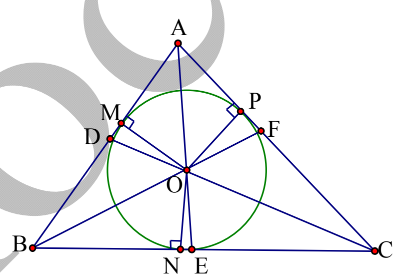
4. Đường tròn tiếp xúc với 3 cạnh tam giác là đường tròn nội tiếp tam giác

Đường tròn nội tiếp có tâm là giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác

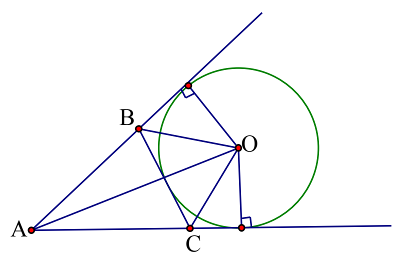
5. Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và phần kéo dài hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác

Tâm đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác ngoài góc B và góc C

Mỗi tam giác có 3 đường tròn bàng tiếp.



Đường tròn nội tiếp ΔABC

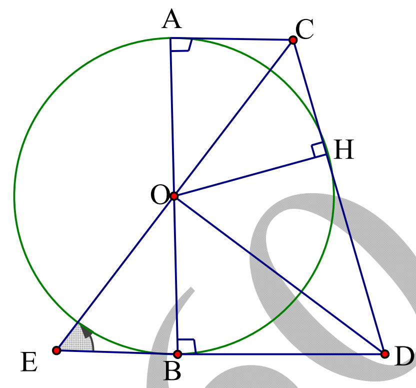


Đường tròn bàng tiếp trong góc A

CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Ví dụ 1) Cho hình thang vuông $ABCD$ $(\widehat{A}=\widehat{B}=90^0)$ có O là trung điểm của AB và góc $\widehat{COD}=90^0$. Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.

Giải:

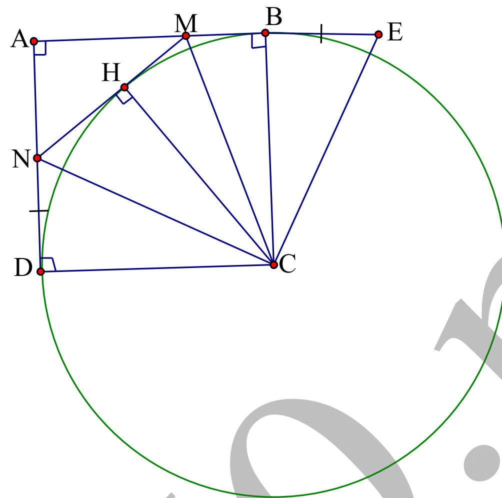


Kéo dài OC cắt BD tại E vì $\widehat{COD}=90^0$ suy ra $\widehat{EOD}=90^0$. Xét tam giác COD và ΔEOD ta có OD chung

$\frac{OC}{OD}=\frac{OA}{OB}=1 \Rightarrow OC=OD \Rightarrow \Delta COD=\Delta\Delta EOD$. Suy ra $DC=DE$ hay tam giác ECD cân tại D. Kẻ $OH \perp CD$ thì $\Delta OBD=\Delta OHD \Rightarrow OH=OB$ mà $OB=OA \Rightarrow OH=OB=OA$ hay A,H,B thuộc đường tròn (O). Do đó CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.

Ví dụ 2) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M,N là hai điểm trên các cạnh AB,AD sao cho chu vi tam giác AMN bằng $2a$. Chứng minh đường thẳng MN luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.

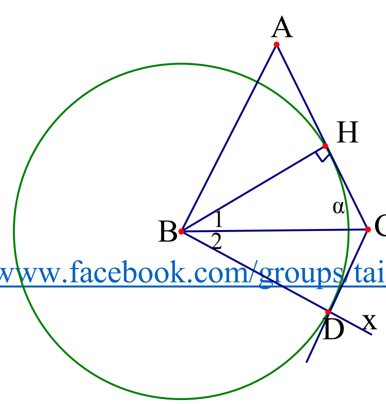
Giải:



Trên tia đối của BA ta lấy điểm E sao cho $BE = ND$. Ta có $\Delta BCE = \Delta DCN \Rightarrow CN = CE$. Theo giả thiết ta có: $MN + AM + AN = AB + AD =$ $AM + MB + AN + DN = AM + AN + MB + BE$. Suy ra $MN = MB + BE = ME$. Từ đó ta suy ra $\Delta MNC = \Delta MEC \Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{CMB}$. Kẻ $CH \perp MN \Rightarrow$ $CH = CB = CD = a$. Vậy D, H, B thuộc đường tròn tâm C bán kính $CB = a$ suy ra MN luôn tiếp xúc với đường tròn tâm C bán kính bằng a.

Ví dụ 3) Cho tam giác ABC cân tại A đường cao BH. Trên nửa mặt phẳng chứa C bờ AB vẽ $Bx \perp BA$ cắt đường tròn tâm B bán kính BH tại D. Chứng minh CD là tiếp tuyến của (B)

Giải:

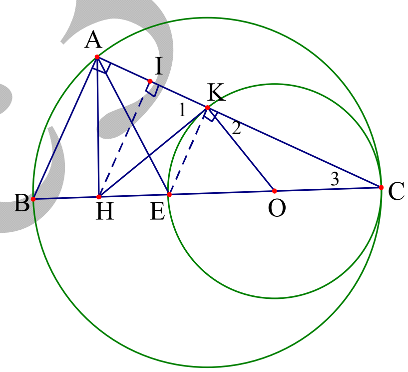


Vì tam giác ABC cân tại A nên ta có: $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$. Vì $Bx \perp BA \Rightarrow \widehat{B_2} + \alpha = 90^0$. Mặt khác ta cũng có $\widehat{B_1} + \alpha = 90^0 \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$. Hai tam giác BHC và ΔBDC có BC chung, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$, $BH = BD = R$ suy ra $\Delta BHC = \Delta BDC(c.g.c)$ suy ra $\widehat{BHC} = \Delta\widehat{BDC} = 90^0$. Nói cách khác CD là tiếp tuyến của đường tròn (B)

Ví dụ 4) Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$

đường cao AH. Gọi E là điểm đối xứng với B qua H. Đường tròn tâm O đường kính EC cắt AC tại K. Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Giải:

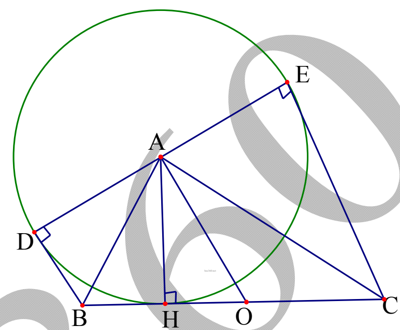


Vì tam giác EKC có một cạnh EC là đường kính của (O) nên $\widehat{EKC} = 90^0$. Kẻ $HI \perp AC \Rightarrow BA//HI//EK$ suy ra $AI = IK$ từ đó ta có tam giác AHK cân tại H. Do đó $\widehat{K_1} = \hat{B}$ (cùng phụ với góc hai góc bằng nhau là $\widehat{BAH}, \widehat{IHK}$).

Mặt khác ta cũng có: $\widehat{K_2} = \widehat{C_3}$ (do tam giác KOC cân tại O). Mà $\hat{B} + \widehat{C_3} = 90^0 \Rightarrow \widehat{K_1} + \widehat{K_2} = 90^0$ suy ra $\widehat{HKO} = 90^0$ hay HK là tiếp tuyến của (O).

Ví dụ 5) Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) (D, E là các tiếp điểm khác H). Chứng minh DE tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

Giải:



Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $\widehat{DAB} = \widehat{HAB}, \widehat{CAH} = \widehat{CAE}$.

Suy ra $\widehat{DAB} + \widehat{CAE} = \widehat{HAB} + \widehat{CAH} = \widehat{BAC} = 90^0$ hay $\widehat{DAB} + \widehat{CAE} + \widehat{HAB} + \widehat{CAH} = 180^0 \Rightarrow D, A, E$ thẳng hàng. Gọi O là trung điểm của BC thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mặt khác $AD = AE$ nên OA là đường trung bình của hình thang vuông $BDEC$ suy ra $OA \perp DE$ tại A. Nói cách khác DE là tiếp tuyến của đường tròn (O). Đường kính BC

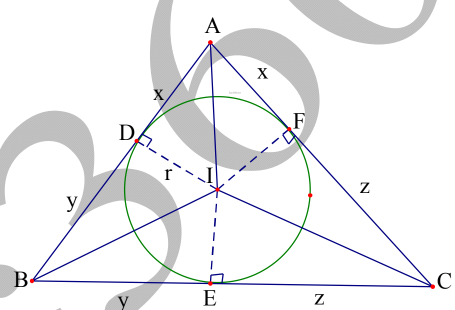
Ví dụ 6) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. Giả sử $(I;r)$ tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CE lần lượt tại D, E, F. Đặt $AB = c, BC = a, AC = b, AD = x, BE = y, CF = z$.

a) Hãy tính x, y, z theo a, b, c

b) Chứng minh $S = p.r$ (trong đó S là diện tích tam giác p là nửa chu vi tam giác, r là bán kính vòng tròn ngoại tiếp tam giác.

c) Chứng minh: $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ trong đó $(h_a; h_b; h_c)$ lần lượt là đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác A, B, C.

Giải:



a). Từ giả thiết ta có $AF = AD = x, BD = BE = y, CE = CF = z$. Từ đó suy ra $\begin{cases} x+y=c \\ y+z=a \\ z+x=b \\ x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2} \end{cases}$. Lần lượt trừ từng vế phương trình (4) của hệ cho các phương trình ta thu được: $\begin{cases} z=\dfrac{a+b-c}{2}=p-c \\ y=\dfrac{a+c-b}{2}=p-b \\ x=\dfrac{b+c-a}{2}=p-a \end{cases}$

b). Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta IAB} + S_{\Delta IAC} + S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2}(r.AB + r.AC + r.BC) = \frac{1}{2}r.2p = p.r$

c). Ta có

$S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S} \Leftrightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2S}(a+b+c) = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$

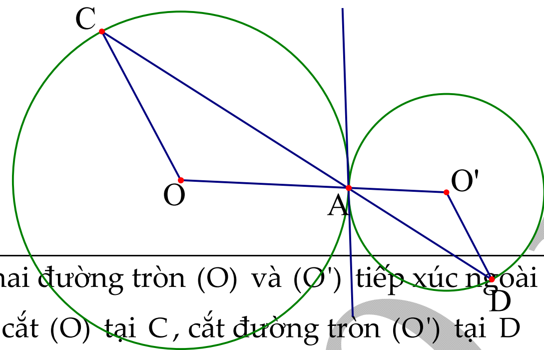
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN.

Xét hai đường tròn $(O;R),(O';R')$

A). Hai đường tròn tiếp xúc nhau:

Khi hai đường tròn tiếp xúc nhau, thì có thể xảy ra 2 khả năng.
Trường hợp 1: Hai đường tròn tiếp xúc ngoài:

+ Điều kiện $R + R' = OO'$. Tiếp điểm nằm trên đường nối tâm của hai đường tròn. Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.



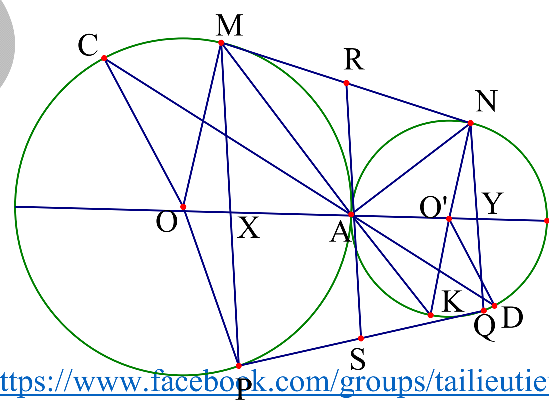
Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (O) tại C, cắt đường tròn (O') tại D

a) Chứng minh $OC//O'D$

b) Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN, gọi P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với M,N qua OO'. Chứng minh $MNQP$ là hình thang cân và $MN + PQ = MP + NQ$

c) Tính góc $\widehat{MAN}$. Gọi K là giao điểm của AM với (O'). Chứng minh N,O',K thẳng hàng.

Giải:



a). Do hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A nên A nằm trên OO'. Ta có $\widehat{CAO} = \widehat{DAO'}$. Lại có $\widehat{OCA} = \widehat{OAD}, \widehat{O'AD} = \widehat{O'DA}$ vì các tam giác $\Delta COA, \Delta DO'A$ là tam giác cân. Từ đó suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{O'DA} \Leftrightarrow OC // O'D$

b). + Vì $MP \perp OO', NQ \perp OO' \Rightarrow MP // OO' \Rightarrow MNQP$ là hình thang. Vì M đối xứng với P qua OO', N đối xứng với Q qua OO' và O luôn đối xứng với O qua OO' nên $\widehat{OPM} = \widehat{OMP} = 90^0$. Mặt khác $\widehat{MPQ}, \widehat{PMN}$ cùng phụ với các góc $\widehat{OPM} = \widehat{OMP}$ nên $\widehat{MPQ} = \widehat{PMN}$ suy ra $MNQP$ là hình thang cân.

(Chú ý: Từ đây ta cũng suy ra PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn)

+ Kẻ tiếp tuyến chung qua A của hai đường tròn cắt MN, PQ tại R, S thì ta có: $RM = RA = RN, SA = SP = SQ$ suy ra $MN + PQ = 2RS$. Mặt khác RS cũng là đường trung bình của hình thang nên $MP + NQ = 2RS$ hay $MP + NQ = MN + PQ$

c). Từ câu b ta có $AR = RM = RN$ nên tam giác MAN vuông tại A, từ đó suy ra $\widehat{NAK} = 90^0 \Rightarrow KN$ là đường kính của (O'), hay N, O', K thẳng hàng.

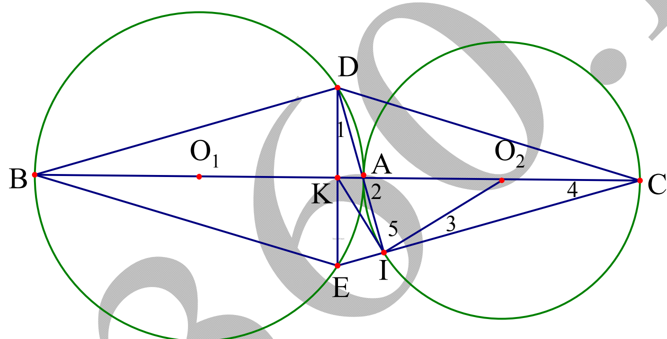
Ví dụ 2: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A với $(R > R')$. Đường nối tâm OO' cắt $(O),(O')$ lần lượt tại B,C. Dây DE của (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC

a) Chứng minh $BDCE$ là hình thoi

b) Gọi I là giao điểm của EC và (O'). Chứng minh D,A,I thẳng hàng

c) Chứng minh KI là tiếp tuyến của (O').

Giải:



Vì BC vuông góc với đường thẳng DE nên $DK = KE, BK = KC$ (theo giả thiết) do đó tứ giác $BDCE$ là hình bình hành, lại có $BC \perp DE$ nên là hình thoi.

b) Vì tam giác BDA nội tiếp đường tròn (O_1) có BA là đường kính nên ΔBDA vuông tại D. Gọi I' là giao điểm của DA với CE thì $\widehat{AI'C} = 90^0$ (1) (vì so le trong với $\widehat{BDA}$). Lại có ΔAIC nội tiếp đường tròn (O_2) có AC là đường kính nên tam giác AIC vuông tại I, hay $\widehat{AIC} = 90^0$ (2).

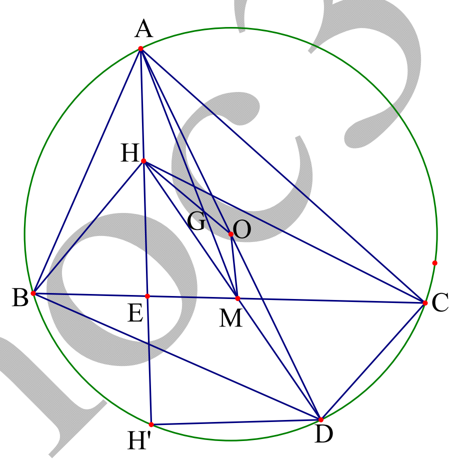
Từ (1) và (2) suy ra $I \equiv I'$. Vậy D,A,I thẳng hàng.

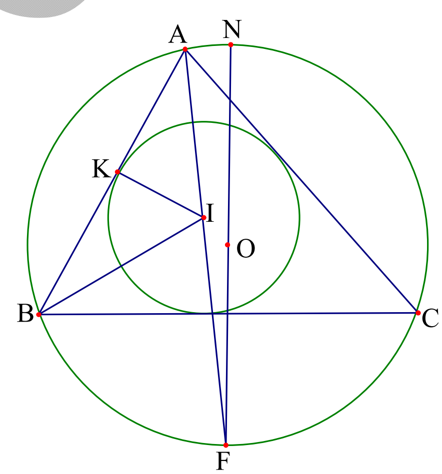
c) Vì tam giác DIE vuông tại I có IK là trung tuyến ứng với cạnh huyền DE nên $KD = KI = KE \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{I_2}$ (1). Lại có $\widehat{D_1} = \widehat{C_4}$ (2) do cùng phụ với $\widehat{DEC}$ và $\widehat{C_4} = \widehat{C_3}$ (3), vì $O_2C = O_2I$ là bán kính của đường tròn (O_2).

Từ (1),(2),(3) suy ra $\widehat{I_2} = \widehat{I_3} \Rightarrow \widehat{I_2} + \widehat{I_5} = \widehat{I_5} + \widehat{I_3} = 90^0$ hay $\widehat{KIO_2} = 90^0$ do đó KI vuông góc với bán kính O_2I của đường tròn (O_2). Vậy KI là tiếp tuyến của đường tròn (O_2).

Ví dụ 3) Chứng minh rằng: Trong một tam giác tâm vòng tròn ngoại tiếp O trọng tâm G trực tâm H nằm trên một đường thẳng và $HG = 2GO$ (Đường thẳng Ơ le) . Gọi R, r, d lần lượt là bán kính vòng tròn ngoại tiếp nội tiếp và khoảng cách giữa hai tâm chứng minh $d^2 = R^2 - r^2$ (Hệ thức Ơ le)

Giải:



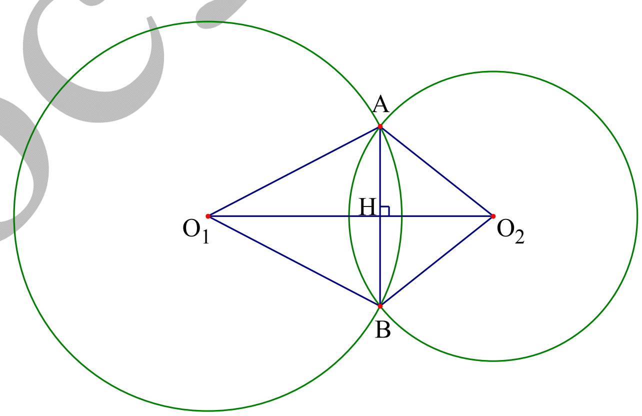


+ Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) thì $\widehat{ACD} = 90^0 \Leftrightarrow DC \perp AC$ mặt khác $BH \perp AC \Rightarrow BH//DC$, tương tự ta có: $CH//BD \Rightarrow BHCD$ là hình bình hành do đó hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Suy ra OM là đường trung bình của tam giác AHD. Giả sử $HO \cap AM = G$ thì $\frac{GM}{GA} = \frac{OM}{HA} = \frac{1}{2} \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC và $HG = 2GO$

Nhận xét: Nếu kéo dài đường cao AH cắt (O) tại H' ta sẽ có H, H' đối xứng nhau qua BC. Suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đối xứng với tâm đường tròn ngoại tiếp HBC qua BC.

+ Ta có : $IA.IF = R^2 - d^2$ (Xem phần tính chất tiếp tuyến, cát tuyến). Mặt khác AF là phân giác trong góc $A \Rightarrow FB = FC = FI$. Kẻ đường kính $FN \Rightarrow FCN = 90^0 \Rightarrow \widehat{FNC} = \widehat{FAC} = \frac{1}{2}\widehat{A}$. Tam giác IAK, FNC là hai tam giác vuông có góc nhọn bằng nhau nên đồng dạng với nhau. Từ đó suy ra $\frac{IA}{FN} = \frac{IK}{FC} \Leftrightarrow IA.FC = FN.IK \Rightarrow IA.FC = 2Rr$. Hay $d^2 = R^2 - r^2$

B. Hai đường tròn cắt nhau:



Khi hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau theo dây AB thì $O_1O_2 \perp AB$ tại trung điểm H của AB. Hay AB là đường trung trực của O_1O_2

Khi giải toán liên quan dây cung của đường tròn, hoặc cát tuyến ta cần chú ý kẻ thêm đường phụ là đường vuông góc từ tâm đến các dây cung.

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn $(O_1;R),(O_2;R)$ cắt nhau tại A,B (O_1,O_2 nằm khác phía so với đường thẳng AB). Một cát tuyến PAQ xoay quanh A $\left(P\in(O_1),Q\in(O_2)\right)$ sao cho A nằm giữa P và Q. Hãy xác đinh vị trí của cát tuyến PAQ trong mỗi trường hợp.

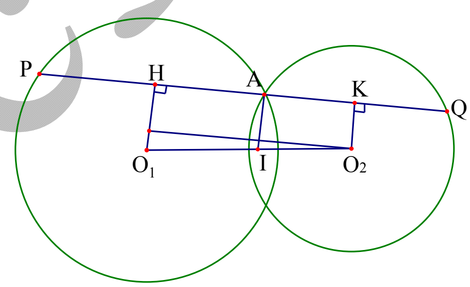
a) A là trung điểm của PQ

b) PQ có độ dài lớn nhất

c) Chu vi tam giác BPQ lớn nhất

d) $S_{\Delta BPQ}$ lớn nhất.

Lời giải:



a) Giả sử đã xác định được vị trí của cát tuyến PAQ sao cho $PA = AQ$.

Kẻ O_1H vuông góc với dây PA thì $PH = HA = \frac{1}{2}PA$.

Kẻ O_2K vuông góc với dây AQ thì $AK = KQ = \frac{1}{2}AQ$.

Nên $AH = AK$.

Kẻ $Ax//O,H//O_2K$ cắt O, O_2 tại I thì $O_1I = IO_2$ và $Ax \perp PQ$. Từ đó suy ra cách xác định vị trí của cát tuyến PAQ đó là cát tuyến PAQ vuông góc với IA tại A với I là trung điểm của đoạn nối tâm O_1O_2.

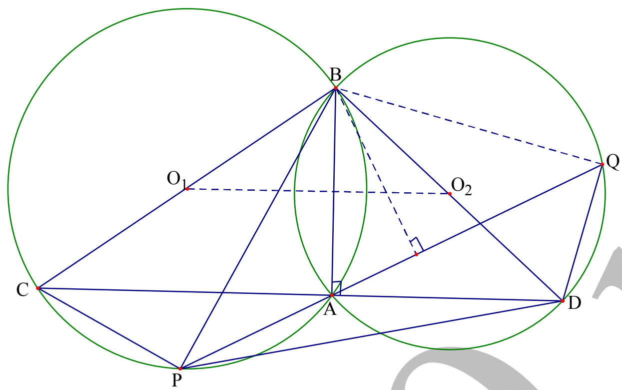
b) Trên hình, ta thấy $PA = HK$.

Kẻ $O_2M \perp O_1H$ thì tứ giác $MHKO_2$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật do đó $HK = MO_2$. Lúc đó O_2M là đường vuông góc kẻ từ O_2 đến đường thẳng O_1H, O_2O_1 là đường xiên kẻ từ O_2 đến đường thẳng O_1H.
Nên $O_2M \le O_1O_2$ hay $PQ = 2HK = 2O_2M \le 2O_1O_2$ (không đổi). dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv O$ hay $PQ//O_1O_2$. Vậy ở vị trí cát tuyến $PAQ//O_1O_2$ thì PQ có độ dài lớn nhất.

c) Qua A kẻ cát tuyến CAD vuông góc với BA.

Thì tam giác ABC và ABD vuông tại A lần lượt nội tiếp các đường tròn (O_1), (O_2) nên O_1 là trung điểm của BC và O_2 là trung điểm của BD.
Lúc đó O_1O_2 là đường trung bình của tam giác BCD nên $O_1O_2//CD$ suy ra $PQ \le 2O_1O_2$ (1) (theo câu b).
Lại có $BQ \le BD$ (2), $BP \le BC$ (3). Từ (1),(2),(3) suy ra chu vi tam giác $BPQ, C = PQ + BQ + BP \le 2(O_1O_2 + R_1 + R_2)$ (không đổi). Dấu bằng có khi $P \equiv C, Q \equiv D$.

Vậy chu vi tam giác BPQ đạt giá trị lớn nhất khi cát tuyến PAQ vuông góc với dây BA tại A.



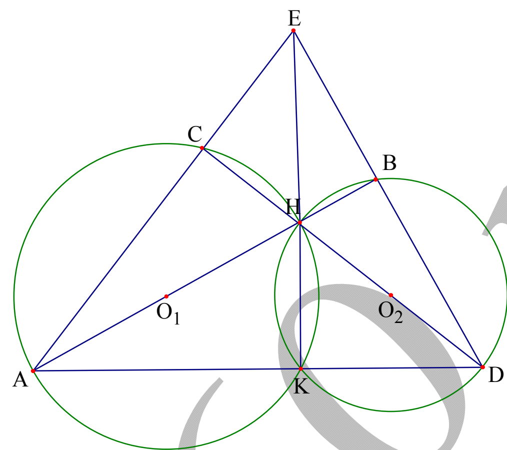
d) Kẻ $BN \perp PQ$ thì $BN \le BA$.

Lúc đó $S_{BPQ} = \frac{1}{2}BN.PQ \le \frac{1}{2}BA.CD$ không đổi.

Vậy S_{BPQ} đạt giá trị lớn nhất khi cát tuyến PAQ vuông góc với dây chung BA tại A.

Ví dụ 2. . Cho hai đường tròn $(O_1;R),(O_2;R)$ cắt nhau tại đường thẳng O_1H cắt (O_1) tại K, cắt (O_2) tại B, O_2H cắt (O_1) tại C, cắt (O_2) tại D. Chứng minh ba đường thẳng BC, BD, HK đồng quy tại một điểm.

Lời giải:



Gọi giao điểm của AC với BD là E. Các tam giác ACH, AKH nội tiếp đường tròn (O_1) có cạnh HA là đường kính nên tam giác ACH vuông tại C, tam giác AKH vuông tại K suy ra $DC \perp AE$ (1), $HK \perp AK$ (2).

Lại có tam giác HKD, HBD nối tiếp dường tròn (O_2) có cạnh HD là đường kính nên tam giác HKD vuông tại K, tam giác HBD vuông tại B suy ra:

$HK \perp KD$ (3), $AB \perp DE$ (4).

Từ (2) và (3) suy ra A, K, D thẳng hàng nên $HK \perp AD$ (5).

Từ (1) và (4)suy ra H là trực tâm của tam giác AED, do đó $EH \perp AD$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $H \in EK$ (vì qua H ở ngoài đường thẳng AD chỉ kẻ được một đường thẳng vuông góc với AD).

Vậy AC, BD, HK đồng quy tại E là giao điểm của AC và BD.