Chủ đề 1: BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ

Chương 1: Căn thức

1.1 CĂN THỨC BẬC 2

Kiến thức cần nhớ:

- Căn bậc hai của số thực a là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- Cho số thực a không âm. Căn bậc hai số học của a kí hiệu là $\sqrt{a}$ là một số thực không âm x mà bình phương của nó bằng a:
  $\begin{cases} a \ge 0 \\ \sqrt{a} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = a \end{cases}$
- Với hai số thực không âm a,b ta có: $\sqrt{a} \le \sqrt{b} \Leftrightarrow a \le b$.
- Khi biến đổi các biểu thức liên quan đến căn thức bậc 2 ta cần lưu ý:

  + $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \ge 0 \\ -A & A < 0 \end{cases}$

  + $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = A\sqrt{B}$ với $A,B \ge 0$; $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = -A\sqrt{B}$ với $A < 0; B \ge 0$

  + $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \sqrt{\dfrac{A.B}{B^2}} = \dfrac{\sqrt{A.B}}{|B|}$ với $AB \ge 0, B \ne 0$

  + $\dfrac{M}{\sqrt{A}} = \dfrac{M.\sqrt{A}}{A}$ với $A > 0$;(Đây gọi là phép khử căn thức ở mẫu)

  + $\dfrac{M}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \dfrac{M\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right)}{A - B}$ với $A,B \ge 0, A \ne B$ (Đây gọi là phép trục căn thức ở mẫu)

1.2 CĂN THỨC BẬC 3, CĂN BẬC n.

1.2.1 CĂN THỨC BẬC 3.

Kiến thức cần nhớ:

- Căn bậc 3 của một số a kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$ là số x sao cho $x^3 = a$
- Cho $a \in R; \sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$
- Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc 3.
- Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$.
- Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$.
- $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ với mọi $b \neq 0$.
- $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$ với mọi a, b.
- $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.
- $A\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3B}$.
- $\sqrt[3]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[3]{AB^2}}{B}$ với $B \neq 0$
- $\dfrac{\sqrt[3]{A}}{B} = \sqrt[3]{\dfrac{A}{B^3}}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}} = \dfrac{\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}{A \pm B}$ với $A \neq \pm B$.

1.2.2 CĂN THỨC BẬC n.

Cho số $a \in R, n \in N; n \geq 2$. Căn bậc n của một số a là một số mà lũy thừa bậc n của nó bằng a.

- Trường hợp n là số lẻ: $n = 2k+1, k \in N$

  Mọi số thực a đều có một căn bậc lẻ duy nhất:

  $\sqrt[2k+1]{a} = x \Leftrightarrow x^{2k+1} = a$, nếu $a > 0$ thì $\sqrt[2k+1]{a} > 0$, nếu $a < 0$ thì $\sqrt[2k+1]{a} < 0$, nếu $a = 0$ thì $\sqrt[2k+1]{a} = 0$
- Trường hợp n là số chẵn: $n = 2k, k \in N$.

Mọi số thực $a>0$ đều có hai căn bậc chẵn đối nhau. Căn bậc chẵn dương kí hiệu là $\sqrt[2k]{a}$ (gọi là căn bậc $2k$ số học của a). Căn bậc chẵn âm kí hiệu là $-\sqrt[2k]{a}$, $\sqrt[2k]{a}=x \Leftrightarrow x\ge 0$ và $x^{2k}=a$;
$-\sqrt[2k]{a}=x \Leftrightarrow x\le 0$ và $x^{2k}=a$.
Mọi số thực $a<0$ đều không có căn bậc chẵn.

Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Phân tích các biểu thức sau thành tích:

a) $P=x^4-4$
b) $P=8x^3+3\sqrt{3}$
c) $P=x^4+x^2+1$

Lời giải:

a) $P=\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2+2\right)$.

b) $P=(2x)^3+\left(\sqrt{3}\right)^3=\left(2x+\sqrt{3}\right)\left(4x^2-2\sqrt{3}x+3\right)$.

c) $P=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$.

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức:

a) $A=\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{x}+\frac{1}{4}}$ khi $x\ge 0$.

b) $B=\sqrt{4x-2\sqrt{4x-1}}+\sqrt{4x+2\sqrt{4x-1}}$ khi $x\ge \frac{1}{4}$.

c) $C=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{8+10\sqrt{7-4\sqrt{3}}}}}$

Lời giải:

a) $A=\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{x}+\frac{1}{4}}=\sqrt{x}-\sqrt{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{x}-\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|$

+ Nếu $\sqrt{x}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{4}$ thì $\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{1}{2}$.

+ Nếu $\sqrt{x}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\le x<\frac{1}{4}$ thì $\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right|=-\sqrt{x}+\frac{1}{2}\Rightarrow A=2\sqrt{x}-\frac{1}{2}$

b)

$B=\sqrt{4x-2\sqrt{4x-1}}+\sqrt{4x+2\sqrt{4x-1}}=\sqrt{4x-1-2\sqrt{4x-1}+1}+\sqrt{4x-1+2\sqrt{4x-1}+1}$

Hay $B=\sqrt{\left(\sqrt{4x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{4x-1}+1\right)^2}=\left|\sqrt{4x-1}-1\right|+\left|\sqrt{4x-1}+1\right|$

$=\left|\sqrt{4x-1}-1\right|+\sqrt{4x-1}+1$

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1\ge 0\Leftrightarrow 4x-1\ge 1\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}$ thì $\left|\sqrt{4x-1}-1\right|=\sqrt{4x-1}-1$ suy ra $B=2\sqrt{4x-1}$.

+ Nếu $\sqrt{4x-1}-1<0\Leftrightarrow 4x-1<1\Leftrightarrow \frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}$ thì $\left|\sqrt{4x-1}-1\right|=-\sqrt{4x-1}+1$ suy ra $B=2$.

c) Để ý rằng: $7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

Suy ra

$C=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{8+10(2-\sqrt{3})}}}=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}}$

$=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)^2}}}$ .Hay

$C=\sqrt{9-\sqrt{5\sqrt{3}+5(5-\sqrt{3})}}=\sqrt{9-\sqrt{25}}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$

Ví dụ 3) Chứng minh:

a) $A=\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}$ là số nguyên.

b) $B=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$ là một số nguyên (Trích đề TS vào lớp 10 chuyên Trường THPT chuyên ĐHQG Hà Nội 2006).

c) Chứng minh rằng: $x=\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$ với $a\geq\frac{1}{8}$ là số tự nhiên.

d) Tính $x+y$ biết $\left(x+\sqrt{x^2+2015}\right)\left(y+\sqrt{y^2+2015}\right)=2015$.

Lời giải:

a) Dễ thấy $A<0$,

Tacó

$$A^2=\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2=7-2\sqrt{6}+7+2\sqrt{6}-2\sqrt{7-2\sqrt{6}}.\sqrt{7+2\sqrt{6}}$$

$=14-2.5=4$

Suy ra $A=-2$.

b) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$. Ta có:

$$B^3=\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)^3=1+\frac{\sqrt{84}}{9}+1-\frac{\sqrt{84}}{9}+3\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}.\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)$$

$$\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)$$. Hay

$B^3 = 2+3\sqrt[3]{\left(1+\frac{\sqrt{84}}{9}\right)\left(1-\frac{\sqrt{84}}{9}\right)}.B \Leftrightarrow B^3 = 2+3\sqrt[3]{1-\frac{84}{81}}B \Leftrightarrow B^3 = 2-B \Leftrightarrow B^3+B-2$

$\Leftrightarrow (B-1)\left(B^2+B+2\right)=0$ mà $B^2+B+2=\left(B+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ suy ra $B=1$.

Vậy B là số nguyên.

c) Áp dụng hằng đẳng thức: $(u+v)^3 = u^3+v^3+3uv(u+v)$

Ta có

$x^3 = 2a+(1-2a)x \Leftrightarrow x^3+(2a-1)x-2a=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2a\right)=0$

Xét đa thức bậc hai x^2+x+2a với $\Delta = 1-8a \geq 0$

+ Khi $a=\frac{1}{8}$ ta có $x=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=1$.

+ Khi $a>\frac{1}{8}$, ta có $\Delta = 1-8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm duy nhất $x=1$

Vậy với mọi $a \geq \frac{1}{8}$ ta có: $x=\sqrt[3]{a+\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}=1$ là số tự nhiên.

d) Nhận xét:

$$\left(\sqrt{x^2+2015}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2015}-x\right)=x^2+2015-x^2=2015.$$

Kết hợp với giả thiết ta suy ra $\sqrt{x^2+2015}-x=\sqrt{y^2+2015}+y$

$\Rightarrow \sqrt{y^2+2015}+y+\sqrt{x^2+2015}+x=\sqrt{x^2+2015}-x+\sqrt{y^2+2015}-y \Leftrightarrow x+y=0$

Ví dụ 4)

a) Cho $x=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Tính giá trị biểu thức:

$P=\dfrac{x^4-4x^3+x^2+6x+12}{x^2-2x+12}$.

b) Cho $x=1+\sqrt[3]{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$B=x^4-2x^4+x^3-3x^2+1942$.(Trích đề thi vào lớp 10 Trường PTC Ngoại Ngữ - ĐHQG Hà Nội năm 2015-2016).

c) Cho $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức:

$P=x^5-4x^4+x^3-x^2-2x+2015$

Giải:

a) Ta có:

$$x^2=\left(\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2=8+2\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$\Leftrightarrow x^2=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}=8+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=8+2\left(\sqrt{5}-1\right)=6+2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}+1\right)^2$$

$\Rightarrow x=\sqrt{5}+1$. Từ đó ta suy ra $(x-1)^2=5\Leftrightarrow x^2-2x=4$.

Ta biến đổi: $P=\dfrac{\left(x^2-2x\right)^2-2\left(x^2-2x\right)+12}{x^2-2x+12}=\dfrac{4^2-3.4+12}{4+12}=1$.

b) Ta có $x=1+\sqrt[3]{2}\Rightarrow(x-1)^3=2\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-3=0$. Ta biến đổi biểu thức P thành:

$$P=x^2(x^3-3x^2+3x-3)+x\left(x^3-3x^2+3x-3\right)+\left(x^3-3x^2+3x-3\right)+1945=1945$$

c) Để ý rằng: $x=\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1$ ta nhân thêm 2 vế với $\sqrt[3]{2}-1$ để tận dụng hằng đẳng thức: $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$. Khi đó ta có:

$$\left(\sqrt[3]{2}-1\right)x=\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{2}-1\right)x=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{2}x=x+1\Leftrightarrow 2x^3=\left(x+1\right)^3\Leftrightarrow x^3-3x^2-3x-1=0.$$

Ta biến đổi:
$$P=x^5-4x^4+x^3-x^2-2x+2015=\left(x^2-x+1\right)\left(x^3-3x^2-3x-1\right)+2016=2016$$

Ví dụ 5) Cho $x,y,z>0$ và $xy+yz+zx=1$.

a) Tính giá trị biểu thức:
$$P=x\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}{1+x^2}}+y\sqrt{\frac{\left(1+z^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+y^2}}+z\sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}{1+z^2}}$$

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}-\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{2xy}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}}$

Lời giải:

a) Để ý rằng: $1+x^2=x^2+xy+yz+zx=(x+y)(x+z)$

Tương tự đối với $1+y^2;1+z^2$ ta có:
$$x\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}{1+x^2}}=x\sqrt{\frac{\left(y+x\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\left(z+y\right)}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}}=x\left(y+z\right)$$

Suy ra $P=x\left(y+z\right)+y\left(z+x\right)+z\left(x+y\right)=2\left(xy+yz+zx\right)=2$.

b) Tương tự như câu a)

Ta có:
$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}-\frac{z}{1+z^2}=\frac{x}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}+\frac{y}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}-\frac{z}{\left(z+y\right)\left(z+x\right)}$$
$$=\frac{x\left(y+z\right)+y\left(z+x\right)-z\left(x+y\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}=\frac{2xy}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}=\frac{2xy}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}}$$

Ví dụ 6)

a) Tìm $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn:

$$\sqrt{x_1^2 - 1^2} + 2\sqrt{x_2^2 - 2^2} + .. + n\sqrt{x_n^2 - n^2} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)$$

b) Cho $f(n) = \dfrac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ với n nguyên dương. Tính $f(1) + f(2) + .. + f(40)$.

Lời giải:

a) Đẳng thức tương đương với:

$$\left(\sqrt{x_1^2 - 1^2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x_2^2 - 2^2} - 2\right)^2 + ... + \left(\sqrt{x_n^2 - n^2} - n\right)^2 = 0$$

Hay $x_1 = 2, x_2 = 2.2^2, ..., x_n = 2.n^2$

b) Đặt $x = \sqrt{2n+1}, y = \sqrt{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4n \\ xy = \sqrt{4n^2 - 1} \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$.

Suy ra

$$f(n) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}\left(x^3 - y^3\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(2n+1)^3} - \sqrt{(2n-1)^3}\right).$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$f(1) + f(2) + .. + f(40) = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}\right) + \left(\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}\right) + .. + \left(\sqrt{81^3} - \sqrt{79^3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{81^3} - \sqrt{1^3}\right) = 364$$

Ví dụ 7)

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$. ***Đề thi chuyên ĐHSP 2011***

b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{1\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}>2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

c) Chứng minh: $2\sqrt{n}-2<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$ với mọi số nguyên dương $n\geq 2$.

Lời giải:

a) Xét $A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$,

$B=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+..+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Dễ thấy $A>B$.

Ta có $A+B=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Mặt khác ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

Suy ra $A+B=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+...+\left(\sqrt{81}-\sqrt{80}\right)=\sqrt{81}-1=8$. Do $A>B$ suy ra $2A>A+B=8\Leftrightarrow A>4$.

b) Để ý rằng: $\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}<\frac{1}{2k\sqrt{k+1}}$ với mọi k nguyên dương.