BÀI TẬP RÈN LUYỆN TỔNG HỢP

1) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Gọi E là giao điểm của AB, CD. F là giao điểm của AC và BD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác FDC tại điểm K khác D. Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại M.

a) Chứng minh tứ giác $BKCM$ nội tiếp

b) Chứng minh E, M, F thẳng hàng.

2) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến tại A của (O) lấy điểm C. Vẽ cát tuyến CDE (tia CD nằm giữa 2 tia CA, CO, $D, E \in (O)$, D nằm giữa C, E). Gọi M là giao điểm của CO và BD, F là giao điểm của AM và (O), $F \neq A$)

a) Vẽ tiếp tuyến CN của (O). Chứng minh $CNMD$ là tứ giác nội tiếp

b) Vẽ $AH \perp OC$ tại H. Chứng minh $ADMH$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh E, O, F thẳng hàng.

3) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) $(AD < BC)$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Vẽ đường kính CM, DN. Gọi K là giao điểm của AN, BM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác NOC tại điểm J khác C.

a) Chứng minh $KBNJ$ là tứ giác nội tiếp

d) Chứng minh I, K, O thẳng hàng.

4) Cho tam giác nhọn ABC $(AB > AC)$. Đường tròn (I) đường kính BC cắt AB, AC tại F, E. BE cắt CF tại H. AH cắt BC tại D. Chứng minh các tứ giác $BFHD, IFED$ nội tiếp.

5) Cho tam giác nhọn ABC các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Vẽ $HI \perp EF$ tại $I, HK \perp DE$ tại K, $IK \cap AD = M, FM \cap DE = N$. Gọi S là điểm đối xứng của B qua D. Chứng minh tứ giác $FIMH, HMNK$ nội tiếp và $\widehat{MAN} = \widehat{DAS}$

Group: https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/

6) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB,AC B,C là hai tiếp điểm) và một cát tuyến ADE đến (O) sao cho (ADE nằm giữa 2 tia AO,AB, $D,E\in\left(O\right)$,Đường thẳng qua D song song với BE cắt BC,AB lần lượt tại P,Q. Gọi K là điểm đối xứng với B qua E. Gọi H,I là giao điểm của BC với OA,DE

a) Chứng minh $OEDH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ba điểm A,P,K thẳng hàng.

7) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB,AC (B,C là hai tiếp điểm). Từ điểm K nằm trên cung BC (K,A nằm cùng phía BC) dựng tiếp tuyến cắt AB,AC tại M,N. BC cắt OM,ON tại P,Q. Gọi I là giao điểm của MQ,NP. Chứng minh $MBOQ,NCOP$ là các tứ giác nội tiếp.

8) Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB,AC tại E,D. BD cắt CE tại H , các tiếp tuyến của (O) tại B,D cắt nhau tại $K, AK\cap BC=M, MH\cap BK=N$. Vẽ tiếp tuyến AS của (O) với (S thuộc cung nhỏ CD) , $KD\cap AH=I$, $MH\cap OA=L$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt AK tại T.

a) Chứng minh các tứ giác $TKDB, BELO$ nội tiếp

b) Ba điểm N,E,I thẳng hàng.

c) Ba điểm M,E,D thẳng hàng.

d) Ba điểm M,S,H thẳng hàng.

9) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có hai đường cao BE,CD cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Giả sử (O) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AED tại N.

a) Chứng minh N,H,M thẳng hàng.

b) Giả sử AN cắt BC tại K. Chứng minh K,E,D thẳng hàng.

10) Cho tam giác ABC ngoại tiếp (O). Gọi Q,R là tiếp điểm của (O) với AB,AC. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC,CA. Đường thẳng BO cắt MN tại P.

a) Chứng minh $ORPC$ là tứ giác nội tiếp

b) Ba điểm P,Q,R thẳng hàng.

11) Cho tam giác ABC có ba đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Từ A ta dựng các tiếp tuyến AM,AN đến đường tròn đường kính BC.

a) Chứng minh các tứ giác $AMDN, MNDO$ nội tiếp

b) Chứng minh ba điểm H,M,N thẳng hàng.

12) Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại điểm H. Gọi M,N là trung điểm của AH,BC. Các phân giác của góc $\widehat{ABH},\widehat{ACH}$ cắt nhau tại P.

a) Chứng minh 5 điểm B,C,E,P,F nằm trên một đường tròn. Điểm P là trung điểm cung nhỏ EF.

b) Ba điểm M,N,P thẳng hàng.

13) Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại điểm H.Đường thẳng EF cắt nhau tại điểm M. Gọi O là trung điểm BC. Giả sử các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBF,OCE cắt nhau tại giao điểm thứ 2 là P.

a) Chứng minh các tứ giác $EFPH$, $BCHP, MEPB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh ΔOPM là tam giác vuông.

14) Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm là điểm H. Gọi M,N là chân các đường cao hạ từ B,C của tam giác ABC.Gọi D là điểm trên cạnh BC. Gọi (w_1) là đường tròn đi qua các điểm B,N,D gọi (w_2) là đường tròn đi qua các điểm C,D,M. DP,DQ lần lượt là đường kính của $(w_1),(w_2)$. Chứng minh P,Q,H thẳng hàng. $(IMO-2013)$

15) Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc lớn nhất. Các điểm P,Q thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{QAB}=\widehat{BCA},\widehat{CAP}=\widehat{ABC}$. Gọi M,N lần lượt là các điểm đối xứng của A qua P,Q. Chứng minh rằng: BN,CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. ($IMO-2014$)

16) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy một điểm P trên cung BC không chứa điểm A của (O). Gọi (K) là đường tròn đi qua A,P tiếp xúc với AC. (K) cắt PC tại S khác P. Gọi (L) là đường tròn qua A,P đồng thời tiếp xúc với AB. (L) cắt PB tại T khác P.Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC.

a) Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DPC.

b) Ba điểm S,D,T thẳng hàng.

17) Cho tam giác ABC , trên hai cạnh AB,AC lần lượt lấy hai điểm E,D sao cho $\widehat{ABD}=\widehat{ACE}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt tia CE tại M,N.Gọi H là giao điểm của BD,CE. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC cắt tia BD tại I,K

a) Chứng minh 4 điểm M,I,N,K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi F là giao điểm thứ 2 của các đường tròn $(ABD),(AEC)$. Chứng minh A,H,F thẳng hàng.

c) Chứng minh : Tam giác AMN cân tại A.

18) Cho tam giác ABC có $(O),(I),(I_a)$ theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác. Gọi D là tiếp điểm của (I) với $BC;P$ điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$ của (O), PI_a cắt (O) tại điểm K. Gọi M là giao điểm của PO và BC

a) Chứng minh: IBI_aC là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP

c) Chứng minh: $\widehat{DAI} = \widehat{KAI_a}$.

19) Cho đường tròn tâm (O) bán kính R và một dây cung BC cố định có độ dài $BC = R\sqrt{3}$. Điểm A thay đổi trên cung lớn BC. Gọi E, F là điểm đối xứng của B, C lần lượt qua AC, AB. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE, ACF cắt nhau tại giao điểm thứ 2 là K.

a) Chứng minh điểm K luôn thuộc một đường tròn cố định

b) Xác định vị trí điểm K để tam giác KBC có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó theo R

c) Gọi H là giao điểm của BE, CF. Chứng minh tam giác $ABH\# \Delta AKC$ và đường thẳng AK luôn đi qua điểm cố định.

20) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC B, C là hai tiếp điểm) và một cát tuyến ADE đến (O) sao cho (ADE nằm giữa 2 tia AO, AB, $D, E \in (O)$, Gọi F là điểm đối xứng của D qua AO, H là giao điểm của EF, BC. Chứng minh: A, O, H thẳng hàng.

21) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC B, C là hai tiếp điểm) và một cát tuyến AEF đến (O) sao cho (AEF nằm giữa 2 tia AO, AB, $F, E \in (O)$ và $\widehat{BAF} < \widehat{FAC}$) Vẽ đường thẳng qua E vuông góc với OB cắt BC tại M cắt BF tại N. Vẽ $OK \perp EF$.

a) Chứng minh: $EMKC$ nội tiếp

b) Chứng minh đường thẳng FM đi qua trung điểm của AB

22) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O).Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại G. $GD \cap EF = S$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Giả sử $EF \cap BC = T, AT \cap (O) = K$

a) Chứng minh 5 điểm A, K, F, E, H cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh M, S, H thẳng hàng.

hoc360.net

23) Cho (O) và (d) không giao nhau. Vẽ $OH \perp (d)$ lấy hai điểm A, B thuộc (d) sao cho $HA = HB$. Lấy điểm M thuộc đường tròn (O). Dựng các cát tuyến qua H, A, B và điểm M cắt đường tròn (O) lần lượt tại C, D, E, $DE \cap \left(d\right) = S$. Dựng đường thẳng qua $O \perp CE$ cắt tiếp tuyến tại E của (O) ở K .Dựng $ON \perp DE$ tại N.

a) Chứng minh tứ giác $HNCS$ là tứ giác nội tiếp

b) Ba điểm S, C, K thẳng hàng

24) Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp là (O) tiếp xúc với ba cạnh BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F. Trên đoạn OD lấy điểm I và dựng đường tròn tâm I bán kính ID. Dựng BG, CH là các tiếp tuyến của (I) tại G, H. Gọi $M = BG \cap CH$, $N = EF \cap BC$

a) Chứng minh $EHGF$ nội tiếp

b) Ba điểm N, G, H thẳng hàng.

25) Cho 3 đường tròn $(O), (O_1), (O_2)$ biết $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm I và $(O_1), (O_2)$ lần lượt tiếp xúc trong với (O) tại M_1, M_2. Tiếp tuyến của (O_1) tại I cắt (O) lần lượt tại A, A'. Đường thẳng AM_1 cắt (O_1) tại điểm N_1, đường thẳng AM_2 cắt (O_2) tại điểm N_2.

a) Chứng minh tứ giác $M_1N_1N_2M_2$ nội tiếp và $OA \perp N_2N_1$

b) Kẻ đường kính PQ của (O) sao cho $PQ \perp AI$ (Điểm P nằm trên cung AM_1 không chứa điểm M_2). Chứng minh rằng nếu PM_1, PM_2 không song song thì các đường thẳng AI, PM_1, QM_2 đồng quy.

26) Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Đường thẳng NP cắt BO, CO lần lượt tại E, F

a) Chứng minh các góc $\widehat{OEN}, \widehat{OCA}$ bằng nhau hoặc bù nhau.

hoc360.net

b) Chứng minh 4 điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.Chứng minh O, M, K thẳng hàng. Biết K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF.

27) . Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Kẻ $AH \perp BC\left(H \in BC\right)$ và BE vuông góc với đường kiính $AD\left(E \in AD\right)$.

a) Chứng minh $HE//DC$.

b) Qua trung điểm K của đoạn thẳng AB kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại M. Chứng minh ΔMHE cân.

28) Cho tam giác nhọn $ABC\left(AB < AC\right)$. Vẽ đường cao AD và đường phân giác trong AO của tam giác ABC (D, O thuộc BC). Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh các điểm M, N, O, D, A cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\widehat{BDM} = \widehat{CDN}$.

c) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt MN tại I. Đường thẳng AI cắt BC tại K. Chứng minh K là trung điểm cạnh BC.

29) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và C, D là hai điểm di động trên nửa đường tròn sao cho C thuộc cung AD và $\widehat{COD} = 60^0$ (C khác A và D khác B). Gọi M là giao điểm của tia AC và BD, N là giao điểm của dây AD và BC.

a) Chứng minh tứ giác $CMDN$ nội tiếp đường tròn và tính khoảng cách từ A, B đến đường thẳng CD.

b) Gọi H và I lần lượt là trung điểm CD và MN. Chứng minh H, I, O thẳng hàng và $DI = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MCD theo R.

30) Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Giả sử M là điểm chuyển động trên nửa đường tròn này, kẻ MH vuông góc với AB tại H. Từ O kẻ đường thẳng song song với MA cắt tiếp tuyến tại B với nửa đường tròn (O) ở K.

a) Chứng minh bốn điểm O, B, K, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Giả sử C, D là hình chiếu của H trên đường thẳng MA và MB. Chứng minh ba đường thẳng CD, MH, AK đồng quy.

c) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH và BH. Xác định vị trí M để diện tích tứ giác $CDFE$ đạt giá trị lớn nhất.

31) Cho hình vuông $ABCD$, trên đường chéo BD lấy điểm I sao cho $BI = BA$. Đường thẳng đi qua I vuông góc với BD cắt AD tại E, AI cắt BE tại H.

a) Chứng minh rằng $AE = ID$.

b) Đường tròn tâm E bán kính EA cắt AD tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng: $DF.DA = EH.EB$.

32) Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Đường tròn đường kính OM cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm E, F.

hoc360.net

a) Chứng minh giao điểm I của đoạn thẳng OM với đường tròn $(O;R)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác MEF.

b) Cho A là một điểm bất kỳ thuộc cung EF chứa điểm M của đường tròn đường kính OM (A khác E và F). Đoạn thẳng OA cắt đoạn thẳng EF tại B. Chứng minh $OA.OB = R^2$.

c) Cho biết $OM = 2R$ và N là điểm bất kỳ thuộc cung EF chứa điểm I của đường tròn $(O;R)$ (N khác E và F). Gọi d là đường thẳng qua F và vuông góc với đường thẳng EN tại điểm P, d cắt đường tròn đường kính OM tại điểm K (K khác F). Hai đường thẳng FN và KE cắt nhau tại điểm Q. Chứng minh rằng:
$PN.PK + QN.QK \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2$.

33) Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Hai đường thẳng AP và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ABP} = \widehat{AMB}$.

b) $MA.MP = BA.BM$.

34) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại I và J $(R' > R)$. Kẻ các tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó chúng cắt nhau ở A. Gọi B và C là các tiếp điểm của hai tiếp tuyến trên với $(O';R')$, D là tiếp điểm của tiếp tuyến AB với $(O;R)$ (điểm I và điểm B ở cùng nửa mặt phẳng bờ là $O'A$). Đường thẳng AI cắt $(O';R')$ tại M (điểm M khác điểm I).

a) Gọi K là giao điểm của đường thẳng IJ với BD. Chứng minh $KB^2 = KI.KJ$, từ đó suy ra $KB = KD$.

b) AO' cắt BC tại H. Chứng minh bốn điểm I, H, O', M nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh đường thẳng AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle IBD$.

35) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, trên nửa đường tròn lấy điểm C (cung BC nhỏ hơn cung AB), qua C dựng tiếp tuyến với đường tròn tâm O cắt AB tại D. Kẻ CH vuông góc với AB $\left(H \in AB\right)$, kẻ BK vuông góc với $CD\left(K \in CD\right)$; CH cắt BK tại E.

a) Chứng minh CB là phân giác của $\widehat{DCE}$.

b) Chứng minh $BK + BD < EC$.

c) Chứng minh $BH.AD = AH.BD$.

36) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Cho P là điểm bất kỳ trên đoạn BC sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác OBP cắt đoạn AB tại N khác B và đường tròn ngoại tiếp tam giác OCP cắt đoạn AC tại M khác C.

a) Chứng minh rằng $\widehat{OPM} = \widehat{OAC}$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{MPN} = \widehat{BAC}$ và $\widehat{OBC} + \widehat{BAC} = 90^0$.

c) Chứng minh rằng O là trực tâm tam giác PMN.

37) Trên nửa đường tròn $\left(O\right)$ đường kính $AB = 2R$ (R là độ dài cho trước) lấy hai điểm M, N (M, N khác A, B) sao cho M thuộc

$\overset{\frown}{AN}$ và tổng các khoảng cách từ A, B đến đường thẳng MN bằng $R\sqrt{3}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng MN theo R.

b) Gọi I là giao điểm của AN và BM, K là giao điểm của AM và BN. Chứng minh bốn điểm M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó theo R.

c) Tìm GTLN của diện tích tam giác KAB theo R khi M, N thay đổi trên nửa đường tròn (O) nhưng vẫn thỏa mãn giả thiết bài toán.

38) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Vẽ đường thẳng (d) qua A cắt (O) tại C và cắt (O') tại D sao cho A nằm giữa C và D. Tiếp tuyến của (O) tại C và tiếp tuyến của (O') tại D cắt nhau tại E.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BDEC$ nội tiếp

b) Chứng minh rằng $BE.DC = CB.ED + BD.CE$.

39) Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi sao cho CD không vuông góc cũng không trùng với AB. Gọi d là tiếp tuyến tại A của $(O;R)$. Các đường thẳng BC và BD cắt d tương ứng tại E và F.

a) Chứng minh rằng $CDEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi M là trung điểm của EF, chứng minh rằng $BM \perp CD$.

c) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDEF$. Chứng minh rằng $MK = R$.

Group: https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/

d) Gọi H là trực tâm của tam giác DEF, chứng minh rằng H luôn chạy trên một đường tròn cố định.

40) Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính AH, đường tròn này cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác $BDEC$ là tứ giác nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh ba điểm D, O, E thẳng hàng.

c) Cho biết $AB = 3cm, BC = 5cm$. Tính diện tích tứ giác $BDEC$.

41) Cho tam giác ABC không là tam giác cân, biết tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn $\left(I\right)$. Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn $\left(I\right)$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC, biết AD cắt đường tròn $\left(I\right)$ tại điểm N (N không trùng với D), gọi K là giao điểm của AI và EF.

a) Chứng minh rằng các điểm I, D, N, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn $\left(I\right)$.

42) Từ một điểm P nằm ngoài đường tròn $\left(O\right)$ kẻ hai tiếp tuyến PM, PN tới đường tròn $\left(O\right)$, (M, N là hai tiếp điểm). Gọi I là một điểm thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$ của đường tròn $\left(O\right)$, (I khác điểm chính giữa của $\overset{\frown}{MN}$). Kéo dài PI cắt MN tại điểm K, cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai là J. Qua điểm O kẻ đường thẳng vuông góc với PJ tại điểm F và cắt đường thẳng MN tại điểm Q. Gọi E là giao điểm của PO và MN.

Truy cập Website: hoc360.net – Tải tài liệu học tập miễn phí

a) Chứng minh rằng $PI.PJ = PK.PF$.

b) Chứng minh năm điểm $Q < I, E, O, J$ cùng thuộc một đường tròn.

43) Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định, M là một điểm thuộc (O) (M khác A, B). Các tiếp tuyến của (O) tại A và M cắt nhau ở C. Đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với đường thẳng AC tại C. CD là đường kính của (I). Chứng minh rằng:

a) Ba điểm O, M, D thẳng hàng.

b) Tam giác COD là tam giác cân.

c) Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường tròn (O).

44) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, đường cao BE và CF. Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S, BC và OS cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng $AB.MB = AE.BS$.

b) Hai tam giác AEM và ABS đồng dạng.

c) Gọi AM cắt EF tại N, AS cắt BC tại P. Chứng minh rằng $NP \perp BC$.

45) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC; BO cắt EF tại I. M là điểm di chuyển trên đoạn CE.

a) Tính $\widehat{BIF}$.

Group: https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/

b) Gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng nếu $AM = AB$ thì tứ giác $ABHI$ nội tiếp.

c) Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của điểm M để PQ lớn nhất.

46) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Giả sử M là điểm thuộc đoạn thẳng AB (M không trùng A, B), N là điểm thuộc tia CA (N nằm trên đường thẳng CA sao cho C nằm giữa A và N) sao cho khi MN cắt BC tại I thì I là trung điểm của MN. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt (O) tại điểm P khác A.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $BMIP$ và $CNPI$ nội tiếp.

b) Giả sử $PB = PC$, chứng minh rằng tam giác ABC cân.

47) Cho ΔABC có $\widehat{A} = 60^0$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng ID cắt EF tại K, đường thẳng qua K và song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại M, N.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $IFMK$ và $IMAN$ nội tiếp.

b) Gọi J là trung điểm cạnh BC. Chứng minh ba điểm A, K, J thẳng hàng.

c) Gọi r là bán kính của đường tròn (I) và S là diện tích tứ giác $IEAF$. Tính S theo r. Chứng minh $S_{IMN} \geq \frac{S}{4}$ (S_{IMN} là diện tích ΔIMN).

hoc360.net

48) Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$. Trên cung nhỏ AD lấy điểm E (E không trùng với A và D). Tia EB cắt các đường thẳng AD, AC lần lượt tại I và K. Tia EC cắt các đường thẳng DA, DB lần lượt tại M, N. Hai đường thẳng AN, DK cắt nhau tại P.

a) Chứng minh rằng tứ giác $EPND$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $\widehat{EKM} = \widehat{DKM}$.

c) Khi điểm M ở vị trí trung điểm của AD. Hãy xác định độ dài đoạn AE theo R.

49) Cho tam giác ABC. Trên phân giác AD có hai điểm M, N sao cho $\widehat{ABN} = \widehat{CBM}$. Chứng minh rằng $\widehat{ACN} = \widehat{BCM}$.

50) Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^0$. Một đường thẳng Δ thay đổi qua C cắt AB, AD lần lượt tại N, M. Gọi P là giao điểm của BM và DN. Chứng minh rằng P thuộc một đường tròn cố định.

51) Cho tam giác ABC vuông tại A. $AB < AC$. Gọi D là một điểm trên cạnh BC, E là một điểm trên cạnh BA kéo dài về phía A sao cho $BD = BE = CA$. Gọi C là một điểm trên AC sao cho E, B, D, P thuộc cùng một đường tròn, Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $AQ + CQ = BP$.

52) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$ nội tiếp trong đường tròn $\left(O\right)$, ngoại tiếp đường tròn $\left(I\right)$. Cung nhỏ BC có M là điểm chính giữa. N là trung điểm cạnh BC. Điểm E đối xứng với

I qua N. Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Q. Lấy điểm K thuộc BQ sao cho $QK = QA$. Chứng minh rằng:

a) Điểm Q thuộc cung nhỏ AC của đường tròn (O).

b) Tứ giác $AIKB$ nội tiếp và $BQ = AQ + CQ$.

53) Cho O là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của A, B, C qua O. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $A'B'C', A'BC, B'CA, C'AB$ có điểm chung.

54) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai phân giác BM và CN của góc B và C. Tia MN cắt (O) tại P. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của P xuống BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) $PY = PX + PZ$.

b) $\frac{1}{PB} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PC}$.

55) Cho tam giác nhọn $ABC\,(AB \neq AC)$. Đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại M, N. Gọi O là trung điểm của BC. Đường phân giác của $\widehat{BAC}$ và $\widehat{MON}$ cắt nhau tại R. Chứng minh rằng đường tròn ngoai tiếp tam giác BMR và CNR cùng đi qua một điểm nằm trên cạnh BC.

56) Cho tứ giác $ABCD$ có đường chéo BD không là phân giác của các góc ABC và CDA. Một điểm P nằm trong tứ giác sao cho: $\widehat{PBC} = \widehat{DBA}; \widehat{PDC} = \widehat{BDA}$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $AP = CP$.

Truy cập Website: hoc360.net – Tải tài liệu học tập miễn phí

57) Ba tia Ix, Iy, Iz chung gốc I. Lấy cặp điểm A, A' trên Ix, lấy cặp điểm B, B' trên Iy, lấy cặp điểm C, C' trên Iz theo thứ tự đó kể từ I sao cho $IA.IA' = IB.IB' = IC.IC'$. Chứng minh rằng tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ABC, A'B'C'$ và I thẳng hàng.

58) Cho BC là một dây cung khác đường kính của đường tròn (O). Điểm A thay đổi trên cung lớn BC. Đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P.

a) Tìm vị trí của A để chu vi tam giác MNP đạt giá trị lớn nhất.

b) Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

59) Cho hai đường tròn $(O_1; r_1)$ và $(O_2; r_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau. Một đường tròn (O) thay đổi tiếp xúc ngoài với (O_1) và (O_2). Giả sử AB là một đường kính của (O) sao cho AO_1O_2B là một hình thang $(AB // O_1O_2)$. Gọi I là giao điểm của AO_2 với BO_1. Chứng minh rằng I thuộc một đường thẳng cố định.

60) Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm G. Giả sử rằng $\widehat{OIA} = 90^0$. Chứng minh rằng IG và BC song song.

61) Cho hình chữ nhật $ABCD$ và bốn đường tròn $(A; R_1), (B; R_2), (C; R_3), (D; R_4)$ sao cho $R_1 + R_3 = R_2 + R_4 < AC$. Gọi Δ_1, Δ_3 là hai tiếp tuyến chung ngoài của $(A; R_1)$ và $(C; R_3)$; Δ_1, Δ_3 là hai tiếp tuyến chung ngoài của $(B; R_2)$ và $(D; R_4)$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với cả bốn đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.

Group: https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/

hoc360.net

62) Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại S. Gọi M,N,P,Q lần lượt đối xứng với S qua AB,BC,CD,DA. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SPQ cắt tại AP tại S. Chứng minh rằng bốn điểm M,E,F,Q cùng thuộc một đường tròn.

63) Cho tam giác ABC cân tại A, trên cạnh BC lấy D sao cho $BD:DC=2:1$ và trên đoạn AD lấy P sao cho $\widehat{BAC}=\widehat{BPD}$. Chứng minh rằng $\widehat{DPC}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

64) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi P,Q,R lần lượt là các chân đường vuông góc của D xuống BC,CA,AB. Chứng tỏ rằng $PQ=QR$ khi và chỉ khi phân giác các góc ABC và ADC cắt nhau trên AC.

65) Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau ở hai điểm A và B. Các tiếp tuyến tại A và B của (O_1) cắt nhau ở điểm K. Giả sử M là một điểm nằm trên (O_1) nhưng không trùng vào A và B. Đường thẳng AM cắt (O_2) ở điểm thứ hai P, đường thẳng KM cắt (O_1) ở điểm thứ hai C và đường thẳng AC cắt (O_2) ở điểm thứ hai Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ nằm trên đường thẳng MC.

66) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') nằm trong (O) tiếp xúc với (O) tại T thuộc cung AC (cung không chứa B). Kẻ các tiếp tuyến AA',BB',CC' tới (O'). Chứng minh rằng $BB'.AC=AA'.BC+CC'.AB$.

67) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cùng tiếp xúc với đường tròn (O). Tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) cắt (O) tại bốn điểm. Gọi B,C là hai trong bốn điểm đó sao cho B,C nằm về cùng một phía đối với O_1O_2. Chứng minh rằng BC song song với một tiếp tuyến chung ngoài của $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$.

68) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Chứng minh rằng $\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{BC.CD+AB.BD}{BC.BA+DC.DA}$.

69) Cho tam giác ABC cân ở A. Kí hiệu x,y,z lần lượt là khoảng cách MA',MB',MC' từ một điểm M nằm trong tam giác tới các đường thẳng BC,CA,AB. Giả sử $x^2=yz$, chứng minh rằng M thuộc một đường tròn cố định.

70) Cho tam giác nhọn ABC. Điểm O thay đổi trên BC. Đường tròn tâm O bán kính OA cắt AB,AC lần lượt tại các điểm thứ hai M,N. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác AMN thuộc một đường thẳng cố định.

71) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H_1,H_2,H_3,H_4 lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD,CDA,DAB,ABC. Chứng minh bốn điểm H_1,H_2,H_3,H_4 cùng nằm trên một đường tròn.

72) Điểm I nằm trong tam giác ABC và thỏa mãn $\widehat{AIB}=\widehat{BIC}=\widehat{CIA}=120^0$. Chứng minh rằng ba đường thẳng Ơ-le của các tam giác ABI,BCI và CAI đồng quy.

73) Gọi O,I và H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng: Nếu đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH đi qua một trong các đỉnh của tam giác ABC thì phải đi qua một đỉnh khác của tam giác ABC.

hoc360.net

74) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O, trực tâm H, đường cao AK $(K \in BC)$. Giả sử một đường thẳng qua K vuông góc với OK cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Các tia MH, NH cắt AC, AB thứ tự tại P, Q. Chứng minh rằng tứ giác $APHQ$ nội tiếp.

75) Tam giác ABC có trực tâm H, đường cao BE. Điểm P trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vẽ các hình bình hành $PAQB$ và $PARC$. Giao điểm AQ và HR là X. Chứng minh rằng EX song song với AP.

76) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Một đường tròn (O_1) qua B và C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Đường tròn (O_2) qua ba điểm A, D, E cắt (O) tại $K(K \neq A)$. Chứng minh rằng $\widehat{AKO_1} = 90^0$.

77) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Giả sử CD, EF là hai tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này $\left(C, E \in (O); D, F \in (O')\right)$, điểm A gần CD hơn B). Gọi Δ_1 là đường thẳng qua A tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và Δ_2 là đường thẳng qua B tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh rằng các đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, CD, EF$ đồng quy.

78) Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong tại M ((O') chứa trong (O)). Giả sử P và N là hai điểm bất kỳ thuộc (O'). Qua P và N kẻ các tiếp tuyến với (O') cắt (O) tại A, C và B, D. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACD, BCD nằm trên NP.

hoc360.net

79) Cho hai đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại I và cùng tiếp xúc trong với $\left(O\right)$. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài với $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ cắt $\left(O\right)$ tại B, C. Qua I kẻ tiếp tuyến chung với $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ cắt $\left(O\right)$ tại A (A thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ BC với $\left(O_1\right), \left(O_2\right)$. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

80) Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{BMC} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{A}$. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại X, Y. Vẽ MZ, MT lần lượt song song với AB, AC. Gọi N là giao điểm của XZ và YT. Chứng minh rằng tứ giác $ABNC$ là tứ giác nội tiếp.

81) Cho tam giác nhọn ABC $\left(AB < AC\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O; R\right)$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $AE.AC = AF.AB$.

b) Chứng minh rằng các tứ giác $BFHD, ABDE$ nội tiếp đường tròn.

c) Vẽ tia Ax là tia tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$, tia Ax nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C. Chứng minh rằng $Ax\,//\,EF$. Từ đó suy ra $OA \perp EF$.

d) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Đường thẳng đi qua F song song với AC cắt AK, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng $MF = NF$.

82) Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy C thuộc $\left(O\right)$ (C không trùng với A, B), M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Các đường thẳng AM và BC cắt nhau tại I, các đường thẳng AC, BM cắt nhau tại K.

a) Chứng minh $\widehat{ABM} = \widehat{IBM}$ và ΔABI cân.

hoc360.net

b) Chứng minh tứ giác $MICK$ nội tiếp.

c) Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở N. Chứng minh đường thẳng NI là tiếp tuyến của (B, BA) và $NI \perp MO$.

d) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK cắt đường tròn (B, BA) tại D (D không trùng với I). Chứng minh A, C, D thẳng hàng.

83) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) tâm O, đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Gọi H là hình chiếu của I lên AD và M là trung điểm của ID. Đường tròn (HMD) cắt (O) tại N (N khác D). Gọi P là giao điểm của BC và HM.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCMH$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng ba điểm P, D, N thẳng hàng.

84) Cho đường tròn (O) cố định. Từ một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C (B nằm giữa A và C). Gọi I là trung điểm của dây BC.

a) Chứng minh rằng $AMON$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh rằng $AK.AI = AB.AC$.

c) Khi cát tuyến ABC thay đổi thì điểm I chuyển động trên cung tròn nào? Vì sao?Xác định vị trí của cát tuyến ABC để $IM = 2IN$.

85) Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB cắt AC tại N. Gọi E là điểm đối

hoc360.net

xứng của H qua AC, EN cắt AB tại M và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D.

a) Chứng minh $AD = AE$.

b) Chứng minh HA là phân giác của $\widehat{MHN}$.

c) Chứng minh rằng điểm A, E, C, H, M cùng thuộc một đường tròn tâm O_1. Và ba đường thẳng CM, BN, AH đồng quy tại một điểm.

d) DH cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai Q. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của DQ và BC. Chứng minh rằng I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AHK.

86) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính $AC, AC = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD, tam giác ABD đều.

a) Tính BC và CN theo a.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác CMN; MH cắt CN tại E, MN cắt AC tại K. Chứng minh năm điểm B, M, K, E, C cùng thuộc một đường tròn (T).

c) Đường tròn (T) cắt BD tại $F(F \neq B)$, tính DF theo a.

d) KF cắt ME tại I. Chứng minh KM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MIF. Tính $\widehat{IND}$.

87) Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD (A, B, C, D thuộc đường tròn (O)), tia MC nằm giữa hai tia MO và MB. Gọi H là giao điểm của MO và AB.

a) Chứng minh rằng $MA^2 = MC.MD$.

b) Chứng minh tứ giác $CHOD$ nội tiếp, $\Delta MHC \sim \Delta DHO$.

c) Chứng minh rằng $\widehat{ADH} = \widehat{CDB}$.

d) MO cắt đường tròn (O) tại E, F (E nằm giữa M, O). Chứng minh rằng các đường thẳng DE, CF cắt nhau tại một điểm trên đường thẳng AB.

88) Cho A ở ngoài đường tròn $(O;R)$. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC với (O). S là điểm trên tia đối của tia $OA, OS < R$. Đường thẳng vuông góc với (OA tại S cắt AB, AC lần lượt tại D, E; cắt đường tròn (O) tại F, T (F nằm giữa D, T). AF cắt (O) tại M. G là điểm đối xứng của F qua D, L là điểm đối xứng của F qua T. Chứng minh rằng hai đường tròn (O) và (MGL) tiếp xúc nhau.