

CHỦ ĐỀ 1:

**HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG, TỶ SỐ LƯỢNG
GIÁC GÓC NHỌN**

Câu 1. Cho M là một điểm bất kỳ thuộc miền trong của hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh rằng $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{D} + \widehat{C} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Lấy D thuộc cạnh AC , điểm E thuộc tia đối của tia HA sao cho $\frac{AD}{AC} = \frac{HE}{HA} = \frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng $\widehat{BED} = 90^\circ$.

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$. Qua A vẽ một cát tuyến bất kỳ cắt các cạnh BC và CD (hoặc đường thẳng chứa các cạnh đó) tại các điểm E và

F . Chứng minh rằng: $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AD^2}$ **Câu 5.** Cho hình thoi $ABCD$

với $\widehat{A} = 120^\circ$. Tia Ax tạo với tia AB góc \widehat{BAx} bằng 15° và cắt cạnh BC tại M , cắt đường thẳng CD tại N . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{4}{3AB^2}.$$

Câu 6. Cho tam

giác cân ABC , $\widehat{A} = 20^\circ$, $AB = AC$, $AC = b$, $BC = a$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 = 3ab^2.$$

Câu 7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Câu 8. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

rằng: $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$. **Câu 9.** Cho góc vuông xOy và điểm A cố định

thuộc tia Oy , điểm $B \in Ox$ sao cho $OA = OB$. Điểm M chạy trên tia Bx .

Đường vuông góc với OB tại B cắt AM ở I . Chứng minh tổng

$$\frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AM^2} \text{ không đổi.}$$

Câu 10. Cho hình thang vuông $ABCD$ có

$A = D = 90^\circ, AB = 9cm, CD = 16cm, BC = 25cm$. Điểm E thuộc cạnh

BC sao cho $BE = AB$

a) Chứng minh: $\widehat{AED} = 90^\circ$

b) Tính AE, DE

CHỦ ĐỀ 2: SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN, QUAN HỆ HAI ĐƯỜNG TRÒN, GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Câu 11. Cho đường tròn $(O; R)$, $R = 4cm$. vẽ dây cung $AB = 5cm$, C là

điểm trên dây cung AB sao cho $AC = 2cm$. Vẽ CD vuông góc với OA

tại D . Tính độ dài đoạn thẳng AD .

Câu 12. Cho đường tròn $(O; R)$, AC và BD là hai đường kính. Xác định

vị trí của hai đường kính AC và BD để diện tích tứ giác $ABCD$ lớn

nhất.

Câu 13. Cho đường tròn $(O; R)$ từ điểm M bên ngoài đường tròn ta kẻ hai

đường thẳng lần lượt cắt đường tròn tại các điểm A, B và C, D biết

$AB = CD$. Chứng minh rằng $MA = MC$.

Câu 14. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB, CD là dây cung của (O) , $\widehat{COD} = 90^\circ$, CD cắt AB tại M (D nằm giữa C và M) và $OM = 2R$. Tính độ dài các đoạn thẳng MD, MC theo R .

Câu 15. Cho điểm C nằm giữa hai điểm A và B . Gọi (O) là đường tròn bất kỳ đi qua A và B . Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với OA , cắt đường tròn (O) ở D và E . Chứng minh rằng các độ dài AD, AE không đổi.

Câu 16. Cho đường tròn $(O; R)$, hai bán kính OA và OB vuông góc tại O . C và D là các điểm trên cung AB sao cho $AC = BD$ và hai dây AC, BD cắt nhau tại M . Chứng minh rằng $OM \perp AB$.

Câu 17. Cho điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$. Vẽ cát tuyến ABC và tiếp tuyến AM với đường tròn (O) . M là tiếp điểm. Chứng minh rằng $AB + AC \geq 2AM$.

Câu 18. Cho đoạn thẳng AB , đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với AB tại A và B . M là trung điểm của AB . Lấy C, D lần lượt trên d, d' sao cho $\widehat{CMD} = 90^\circ$. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB .

Câu 19. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ hai tiếp tuyến PA và PB tới đường tròn $(O; R)$ với A và B là các tiếp điểm. Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ A đến đường kính BC của đường tròn. Chứng minh rằng PC cắt AH tại trung điểm I của AH .

Câu 20. Một đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D, E . Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AD ; CM cắt DE tại I .

Chứng minh rằng $\frac{IM}{IC} = \frac{DM}{CE}$.

Câu 21. Cho đường tròn $(O; r)$ nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D . Vẽ đường kính DE ; AE cắt BC tại M . Chứng minh rằng $BD = CM$.

Câu 22. Cho tam giác ABC . Một đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với BC tại D . Đường tròn tâm I là đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC và tiếp xúc với BC tại F . Vẽ đường kính DE của đường tròn (O) . Chứng minh rằng A, E, F thẳng hàng.

Câu 23. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AB, AC lần lượt ở D, E, F . Đường thẳng qua E song song với BC cắt AD, DF lần lượt ở M, N . Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng EN .

Câu 24. Cho tam giác nhọn ABC . Gọi O là trung điểm của BC . Dựng đường tròn tâm O đường kính BC . Vẽ đường cao AD của tam giác ABC và các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Gọi E là giao điểm của MN với AD . Hãy chứng minh rằng $AE \cdot AD = AM^2$.

Câu 25. Cho tứ giác $ABCD$ có đường tròn đường kính AD tiếp xúc với BC và đường tròn đường kính BC tiếp xúc với AD . Chứng minh rằng $AB \parallel CD$.

Câu 26. Cho tam giác đều ABC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính BC , D là điểm trên nửa đường

tròn sao cho $s\widehat{CD} = 60^\circ$. Gọi M là giao điểm của AD với BC . Chứng minh rằng $BM = 2MC$.

Câu 27. Cho đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc trong tại A ($R > R'$). Tiếp tuyến tại điểm M bất kỳ của $(O'; R')$ cắt $(O; R)$ tại B và C . Chứng minh rằng $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$.

Câu 27. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, AH là đường cao ($H \in BC$). Chứng minh rằng: $AB \cdot AC = 2R \cdot AH$.

Câu 28. Cho tam giác ABC có \hat{A} nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng: $BC = 2R \sin \widehat{BAC}$.

Câu 29. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Qua A vẽ hai cát tuyến CAD và EAF (C và E nằm trên đường tròn (O) , D và F nằm trên đường tròn (O')) sao cho $\widehat{CAB} = \widehat{BAF}$. Chứng minh rằng $CD = EF$.

Câu 30. Cho đường tròn (O) đường kính AB . C là điểm trên cung AB (C khác A và B). Vẽ $CH \perp AB$ ($H \in AB$). Vẽ đường tròn $(C; CH)$ cắt đường tròn (O) tại D và E . DE cắt CH tại M . Chứng minh rằng $MH = MC$.

Câu 31. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC . Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$.

Câu 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt đường thẳng AC tại E . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tiếp xúc với BD .

Câu 33. Cho đoạn thẳng AB . M là điểm di động trên đoạn thẳng AB (M khác A và B). Vẽ đường thẳng xMy vuông góc với AB tại M . Trên tia Mx lần lượt lấy C và D sao cho $MC = MA, MD = MB$. Đường tròn đường kính AC cắt đường tròn đường kính BD tại N (N khác A). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 34. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có đỉnh A cố định, đỉnh B, C di động. Dựng hình bình hành $ABDC$. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác BDC là điểm cố định.

Câu 35. Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ đường tròn (O) đường kính BC . Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC , các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). MN cắt AD tại E . Chứng minh rằng E là trực tâm của tam giác ABC .

Câu 36. Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Từ A vẽ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) đường kính BC (M, N là các tiếp điểm). Chứng minh rằng M, H, N thẳng hàng.

Câu 37. Cho tam giác ABC cân đỉnh A , đường trung trực của AB cắt BC tại D . Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD .

Câu 38. Cho tam giác ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) và $AB < AC$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AB cắt BC tại D , cắt AC tại E . Chứng minh rằng $DB \cdot CB = EB^2$.

Câu 39. Cho tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn

$(O; R)$ ($AB < AC, \hat{A} = 90^\circ$). Đường tròn (I) qua B, C tiếp xúc với AB tại B , cắt đường thẳng AC tại D . Chứng minh rằng $OA \perp BD$.

Câu 40. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$ có trung điểm là O . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn (O) đường kính AB và nửa đường tròn (O') đường kính AO . Trên (O') lấy điểm M (khác A và O), tia OM cắt (O) tại C , gọi D là giao điểm thứ hai của CA với (O') .

a) Chứng minh tam giác ADM cân.

b) Tiếp tuyến tại C của (O) cắt tia OD tại E , xác định vị trí tương đối của đường thẳng EA đối với (O) và (O') .

Câu 41. Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi M là điểm di động trên đường tròn (O) . Điểm M khác A, B ; dựng đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại H . Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến AC và BD với đường tròn tâm M vừa dựng.

a) Chứng minh BM, AM lần lượt là các tia phân giác của các góc \widehat{ABD} và \widehat{BAC} .

b) Chứng minh ba điểm C, M, D nằm trên tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại điểm M .

c) Chứng minh $AC + BD$ không đổi, từ đó tính tích $AC \cdot BD$ theo CD .

d) Giả sử ngoài A, B trên nửa đường tròn đường kính AB không chứa M có một điểm N cố định. gọi I là trung điểm của MN , kẻ IP vuông góc với MB . Khi M chuyển động thì P chuyển động trên đường cố định nào.

Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Câu 42. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , điểm C thuộc nửa đường tròn. Gọi I là điểm chính giữa \widehat{AC} , E là giao điểm của AI và BC . Gọi K là giao điểm của AC và BI .

a) Chứng minh rằng $EK \perp AB$.

b) Gọi F là điểm đối xứng với K qua I . Chứng minh AF là tiếp tuyến của (O) .

c) Chứng minh rằng $AK.AC + BK.BI = AB^2$.

d) Nếu $\sin \widehat{BAC} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Gọi H là giao điểm của EK và AB . Chứng minh $KH(KH + 2HE) = 2HE.KE$.

Câu 43. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2A$, điểm C thuộc đường tròn ($C \neq A, C \neq B$). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C , kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O) . Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AC . Tia BC cắt Ax tại Q , tia AM cắt BC tại N .

a) Chứng minh các tam giác BAN và MCN cân.

b) Khi $MB = MQ$, tính BC theo R .

Câu 44. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AC . Trên đoạn thẳng OC lấy điểm B và vẽ đường tròn (O') có đường kính BC . Gọi M là trung điểm của AB , qua M kẻ dây cung vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại D và E . Nối CD cắt đường tròn (O') tại I .

a) Chứng minh rằng tứ giác $MCED$ nội tiếp và CD vuông góc với AB .

b) Gọi H là giao điểm của CD và AB . Chứng minh rằng $BE \cdot BC = BH \cdot BA$.

c) Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại M và E của đường tròn (O) cắt nhau tại một điểm I thuộc CD .

d) Cho $\widehat{BAM} = 45^\circ, \widehat{BAE} = 30^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC theo R .

Câu 48. Cho tam giác ABC đều, gọi O là trung điểm của cạnh BC . Các điểm D, E lần lượt di động trên các cạnh AB, AC sao cho \widehat{DOE} bằng 60° .

a) Chứng minh $BD \cdot CE$ không đổi,

b) Chứng minh rằng tia DO là tia phân giác của \widehat{BDE} .

c) Dựng đường tròn tâm O tiếp xúc với AB . Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE và AC .

d) Gọi P, Q lần lượt là tiếp điểm của (O) với AB, AC . I và N lần lượt là giao điểm của PQ với OD và OE . Chứng minh rằng $DE = 2IN$.

Câu 49. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm AB .

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn này.

b) Chứng minh rằng $AM \cdot AO = AB \cdot AI$.

- c) Gọi G là trọng tâm tam giác ACM . Chứng minh $MG \parallel BC$.
- d) Chứng minh IG vuông góc với CM .

Câu 50) Cho đường tròn $(O; R)$ nội tiếp $\triangle ABC$, tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt ở D và E

- a) Gọi O' là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ADE$, tính OO' theo R .
- b) Các đường phân giác trong của \widehat{B} và \widehat{C} cắt đường thẳng DE lần lượt tại M và N . Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp được đường tròn.
- c) Chứng minh $\frac{MN}{BC} = \frac{DM}{AC} = \frac{EN}{AB}$.