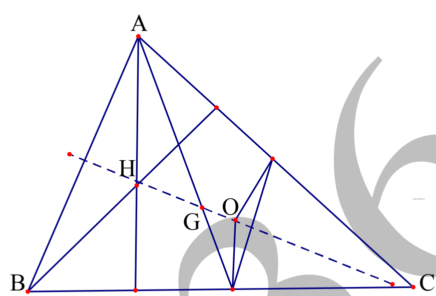
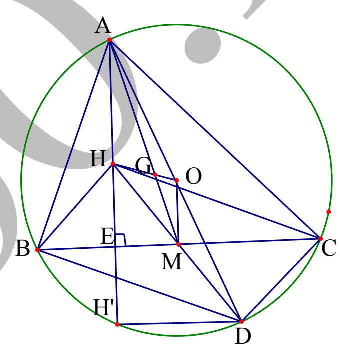
NHỮNG ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC NỔI TIẾNG

1. Đường thẳng Euler

1.(Đường thẳng Euler). Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O cùng nằm trên một đường thẳng. Hơn nữa $\frac{GH}{GO} = 2$. Đường thẳng nối H, G, O gọi là đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Chứng minh:





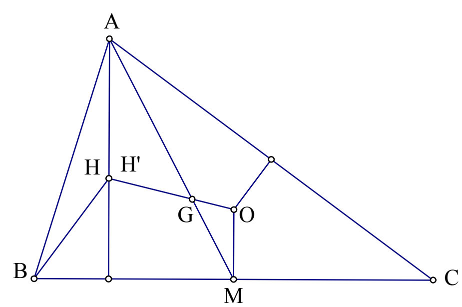
Cách 1: Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC. Ta có EF là đường trung bình của tam giác ABC nên $EF//AB$. Ta lại có $OF//BH$ (cùng vuông góc với AC). Do đó $\widehat{OFE} = \widehat{ABH}$ (góc có cạnh tương ứng song song). Chứng minh tương tự $\widehat{OEF} = \widehat{BAH}$.

Từ đó có $\Delta ABH \sim \Delta EFO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{OE} = \frac{AB}{EF} = 2$ (do EF là đường trung bình của tam giác ABC). Mặt khác G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\frac{AG}{GE} = 2$. Do đó $\frac{AG}{FG} = \frac{AH}{OE} = 2$, lại có $\widehat{HAG} = \widehat{OEG}$ (so le trong, $OE//AH$)$\Rightarrow \Delta HAG \sim \Delta EOG$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{HGA} = \widehat{EGO}$. Do $\widehat{EGO} + \widehat{AGO} = 180^0$ nên $\widehat{HGA} + \widehat{AGO} = 180^0$ hay $\widehat{HGO} = 180^0$.

Vậy H,G,O thẳng hàng.

Cách 2: Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) ta có $BH \perp AC$ (Tính chất trực tâm) $\mathrm{AC} \perp \mathrm{CD}$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra $BH//CD$. Tương tự ta cũng có $CH//BD$ nên tứ giác $BHCD$ là hình bình hành, do đó HD cắt BC tại trung điểm của mỗi đường. Từ đó cũng suy ra $OM// = \frac{1}{2}AH$ (Tính chất đường trung bình tam giác ADH). Nối AM cắt HO tại G thì $\frac{GO}{GH} = \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2}$ nên G là trọng tâm của tam giác ABC .

Cách 3: sử dụng định lý Thales :Trên tia đối GO lấy H' sao cho $GH' = 2GO$. Gọi M là trung điểm BC. Theo tính chất trọng tâm thì G thuộc AM và $GA = 2GM$.



Áp dụng định lý Thales vào tam giác GOM dễ suy ra $AH'//OM$ (1).Mặt khác do O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điểm BC nên $OM \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH' \perp BC$, tương tự $BH' \perp CA$. Vậy $H' \equiv H$ là trực tâm tam giác ABC. Theo cách dựng H' ta có ngay kết luận bài toán.

Chú ý rằng: Nếu ta kéo dài AH cắt đường tròn tại H' thì $\widehat{AH'D} = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên EM là đường trung bình của tam giác $HH'D$ suy ra H đối xứng với H' qua BC. Nếu gọi O' là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác HBC thì ta có O' đối xứng với O qua BC.

Đường thẳng đi qua H,G,O được gọi là đường thẳng Euler của tam giác ABC. Ngoài ra ta còn có $OH = 3OG$.

*Đường thẳng Euler có thể coi là một trong những định lý quen thuộc nhất của hình học phẳng. Khái niệm đường thẳng Euler trước hết liên quan đến tam giác, sau đó được mở rộng và ứng dụng cho tứ giác nội tiếp và cả n - giác nội tiếp, trong chuyên đề ta quan tâm đến một số vấn đề có liên quan đến khái niệm này trong tam giác.

1.1. (Mở rộng đường thẳng Euler) Cho tam giác ABC. P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Gọi A',B',C' lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. G là trọng tâm tam giác ABC.

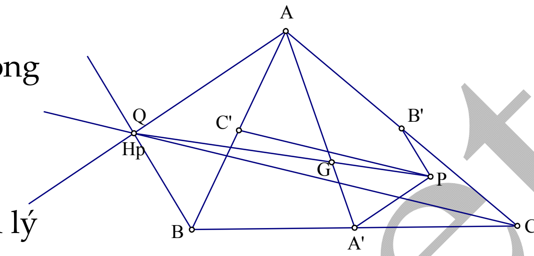
a) Chứng minh rằng các đường thẳng qua A,B,C lần lượt song song với PA',PB',PC' đồng quy tại một điểm H_P, hơn nữa H_P,G,P thẳng hàng và $\frac{GH_P}{GP} = 2$.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng qua A',B',C' lần lượt song song với PA,PB,PC đồng quy tại một điểm O_P, hơn nữa O_P,G,P thẳng hàng và $\frac{GO_P}{GP} = \frac{1}{2}$.

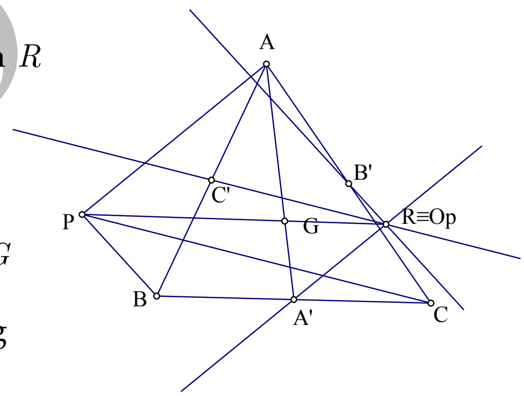
Giải:

a) Ta thấy rằng kết luận của bài toán khá rắc rối, tuy nhiên ý tưởng của lời giải câu 1 giúp ta tìm đến một lời giải rất ngắn gọn như sau:

Lấy điểm Q trên tia đối tia GP sao cho $GQ = 2GP$. Theo tính chất trọng tâm ta thấy ngay G thuộc AA' và $GA = 2GA'$. Vậy áp dụng định lý Thales vào tam giác GPA' dễ suy ra $AQ // PA'$. Chứng minh tương tự $BQ // PB', CQ // PC'$. Như vậy các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với PA', PB', PC' đồng quy tại $Q \equiv H_P$. Hơn nữa theo cách dựng Q thì H_P, G, O thẳng hàng và $\frac{GH_P}{GO} = 2$. Ta có ngay các kết luận bài toán.



b) Ta có một lời giải tương tự. Lấy điểm R trên tia đối tia GP sao cho $GR = \frac{1}{2}GP$. Theo tính chất trọng tâm ta thấy ngay G thuộc AA' và $GA = 2GA'$. Vậy áp dụng định lý Thales vào tam giác GPA dễ suy ra $AR // PA$. Chứng minh tương tự $BR // PB, CR // PC$. Như vậy các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại $R \equiv O_P$. Hơn nữa theo cách dựng R thì O_P, G, P thẳng hàng và $\frac{GP}{GO_P} = 2$. Ta có ngay các kết luận bài toán.



Nhận xét: Bài toán trên thực sự là mở rộng của đường thẳng Euler.

Phần a) Khi $P \equiv O$ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC ta có ngay $H_P = H$ là trực tâm của tam giác ABC. Ta thu được nội dung của bài toán đường thẳng Euler.

Phần b) Khi $P \equiv H$ trực tâm của tam giác ABC thì $O_P \equiv O$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

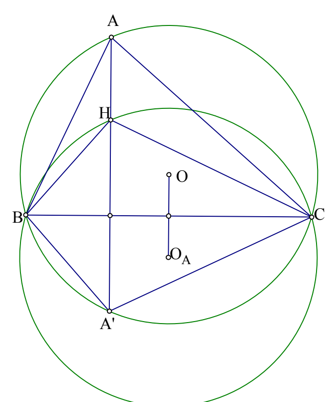
1.2. Cho tam giác ABC trực tâm H. Khi đó đường thẳng Euler của các tam giác HBC, BC HCA, HAB đồng quy tại một điểm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Giải:

Để giải bài toán này chúng ta cần hai bổ đề quen thuộc sau:

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC trực tâm H. Thì $(HBC),(HCA),(HAB)$ lần lượt đối xứng với (ABC) qua BC,CA,AB.

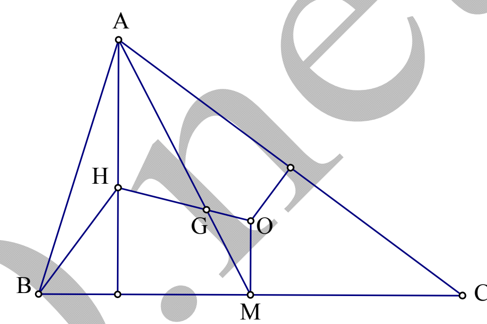
Chứng minh: Gọi giao điểm khác A của HA với (ABC) là A'. Theo tính chất trực tâm và góc nội tiếp dễ thấy $\widehat{HBC} = \widehat{HAC} = \widehat{A'BC}$. Do đó tam giác HBA' cân tại B hay H và A' đối xứng nhau qua BC do đó (HBC) đối xứng (ABC).



Tương tự cho $(HCA),(HAB)$, ta có điều phải chứng minh.

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp O, M là trung điểm thì $HA = 2OM$.

Chứng minh:



Gọi N là trung điểm của CA dễ thấy

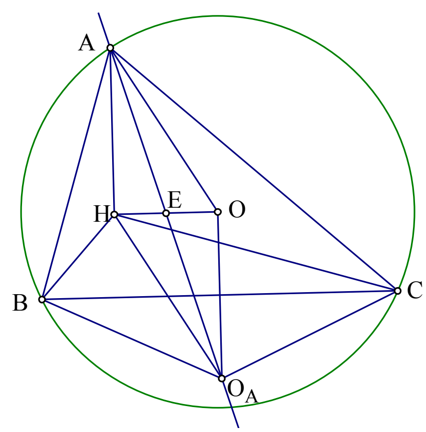
$OM//HA$ do cùng vuông góc với BC

và $OM//HB$ do cùng vuông góc với

CA nên ta có tam giác $\Delta HAB \sim \Delta OMN$

tỷ số $\dfrac{AB}{MN} = 2$. Do đó $HA = 2OM$,

đó là điều phải chứng minh.



<u>Trở lại bài toán.</u> Gọi O_A là tâm (HBC)

theo bổ đề 5.1 thì O_A đối xứng với O

qua BC, kết hợp với bổ đề 2 suy ra

OO_A song song và bằng OH

nên tứ giác AHO_AA là hình bình hành

nên AO_A đi qua trung điểm E của OH.

Tuy nhiên dễ thấy A là trực tâm tam giác HBC do đó đường thẳng Euler của tam giác HBC là AO_A đi qua E. Tương tự thì đường thẳng Euler của các tam giác HCA, HAB cũngđi qua E nằm trên OH là đường thẳng Euler của tam giác ABC. Đó là điều phải chứng minh.

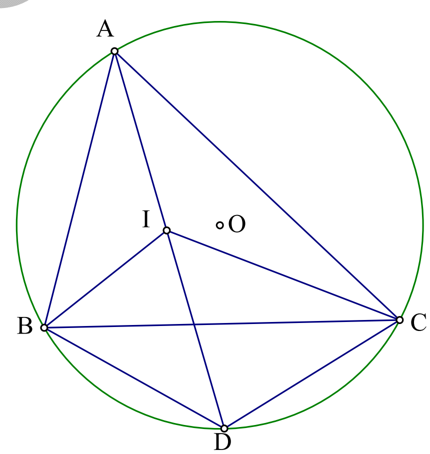
Nhận xét: Điểm đồng quy E là trung điểm OH cũng chính là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC

1.3. Cho tam giác ABC tâm đường tròn nội tiếp I. Khi đó đường thẳng Euler của các tam giác IBC, ICA, IAB đồng quy tại một điểm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải:

Ta sử dụng các bổ đề sau:

Bổ đề 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm đường tròn nội tiếp I. IA cắt (O) tại điểm D khác A thì D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.



Giải:

Sử dụng tính chất góc nội tiếp và góc ngoài tam giác ta có:

$\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD} =$

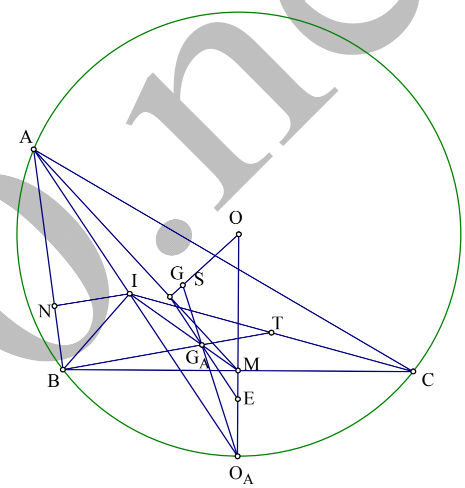
$\widehat{IBA} + \widehat{IAC} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = \widehat{BID}$

Vậy tam giác IDB cân tại D.

Tương tự tam giác ICD cân tại D do đó $DI = DB = DC$. Vậy D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác . (Xem thêm phần góc với đường tròn)

Bổ đề 4. (Định lý Menelaus). Cho tam giác ABC một đường thẳng cắt ba cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A', B', C' thì

$$\frac{A'B}{AB}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1.$$



Định lý đã được chứng minh chi tiết trong (Các định lý hình học nổi tiếng)

Trở lại bài toán. Gọi O là tâm (ABC), IA giao (ABC) tại điểm O_A khác A.

Gọi G, G_A lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, IBC. Gọi M là trung điểm BC, GG_A cắt OO_A tại E.

Theo bổ đề 3 và các tính chất cơ bản ta thấy O_A là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O) do đó OO_A vuông góc với BC tại M.

$\frac{IG_A}{IM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$ nên $GG_A // AO_A$ suy ra $\frac{O_AE}{O_AM} = \frac{2}{3}$ (1). Hơn nữa $\frac{G_AE}{G_AG} = \frac{IO_A}{IA} = \frac{CO_A}{IA}$ (2). Gọi G_AO_A (đường thẳng Euler của tam giác IBC) cắt OG (đường thẳng Euler của tam giác ABC tại S). Ta sẽ chứng minh rằng S cố định. Gọi N là hình chiếu của I lên AB. Do

$\widehat{AIB} = \widehat{BCO_A}$ nên hai tam giác vuông IAN và O_ACM đồng dạng.

Do đó $\dfrac{IA}{O_AC} = \dfrac{IN}{MO_A} = \dfrac{r}{MO_A}$ hay $r = \dfrac{CO_A}{MO_A.IA}$ (3)

Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác GOE có S, G_A, O_A thẳng hàng, ta có: $1 = \dfrac{SG}{SO}.\dfrac{O_AO}{O_AE}.\dfrac{G_AE}{G_AG} = \dfrac{SG}{SO}.\dfrac{R}{\frac{3}{2}.O_AM}.\dfrac{CO_A}{IA} = \dfrac{SG}{SO}.\dfrac{2R}{2r}$. Vậy

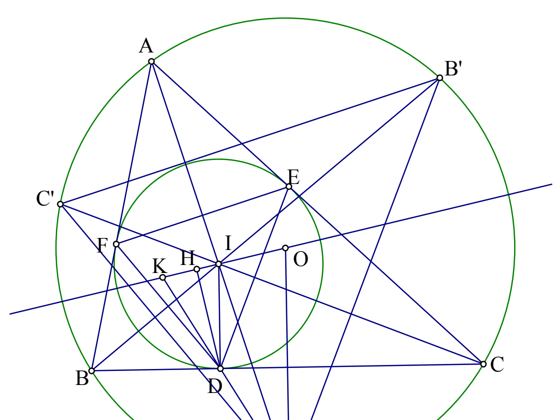
$\dfrac{SG}{SO} = \dfrac{3r}{2R}$, do đó S cố định. Tương tự, các đường thẳng Euler của tam giác ICA, IAB cũng đi qua S nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Điểm đồng quy S thường được gọi là điểm Schiffer của tam giác ABC.

1.4 Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) tiếp xúc ba cạnh tam giác tại D, E, F. Khi đó đường thẳng Euler của tam giác DEF đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải:

Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm khác A, B, C của IA, IB, IC với đường tròn ngoại tiếp (O)Khi đó A' là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O) do đó $OA' \perp BC$ suy ra $OA' // ID$. Gọi giao điểm của $A'D$ với OI là K, áp dụng định lý Thales vào tam giác KOA' ta thấy ngay $\dfrac{KD}{KA'} = \dfrac{KI}{KO} = \dfrac{ID}{OA'} = \dfrac{r}{R}$ trong đó r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác. Do đó K cố định, tương



tự $B'E, C'F$ đi qua K.Lấy điểm H thuộc đoạn KO sao cho $\frac{KH}{KI} = \frac{r}{R}$. Áp dụng định lý Thales

trong tam giác KIA' ta thấy

$\frac{KH}{KI} = \frac{KD}{KA'}$ (cùng bằng $\frac{r}{R}$)

nên $DH // IA'$. Bằng tính chất

phân giác và tam giác cân dễ

thấy $IA' \equiv AI \perp EF$ do đó

$DH \perp EF$. Chứng minh tương

tự $EH \perp DF, FH \perp ED$ hay H là trực tâm của tam giác DEF. Ta chú ý rằng I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF đi qua O. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. 1.4 là một kết quả rất hay gặp về đường thẳng Euler, nhờ đó ta có thể chứng minh được kết quả thú vị khác như sau

1.5 Cho tam giác ABC các đường cao AA', BB', CC' đồng quy tại H. Gọi D, E, F là hình chiếu của H lên $B'C', C'A', A'B'$. Khi đó đường thẳng Euler của tam giác DEF và tam giác ABC trùng nhau.

Giải:

Ta đã biết một kết quả quen thuộc đó là trực tâm H của tam giác ABC chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$. Khi đó theo **1.4**, đường thẳng Euler của tam giác DEF chính là đường thẳng nối H và N, trong đó N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$. Mặt khác tâm N đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ chính là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC do đó NH cũng chính là đường thẳng Euler của tam giác ABC. Đó là điều phải chứng minh.

Chú ý. Áp dụng kết quả **1.5** ta lại có kết quả thú vị khác

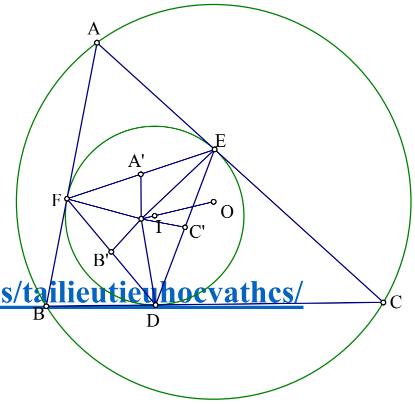
1.6. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Tâm các đường tròn bàng tiếp I_a, I_b, I_c. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác DEF và tam giác $I_aI_bI_c$ trùng nhau.

Chứng minh:

Ta áp dụng kết quả **1.5** vào tam giác $I_aI_bI_c$, ta chú ý rằng I chính là trực tâm tam giác $I_aI_bI_c$ ta có điều phải chứng minh.

1.7. Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. A', B', C' lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE. Chứng minh rằng các đường thẳng lần lượt qua A', B', C' và vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại một điểm trên đường thẳng OI trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta dễ thấy ID, IE, IF lần lượt vuông góc với BC, CA, AB nên các đường thẳng lần lượt qua A', B', C' và vuông góc với BC, CA, AB sẽ tương ứng song



song với ID, IE, IF. Ta suy ra các đường

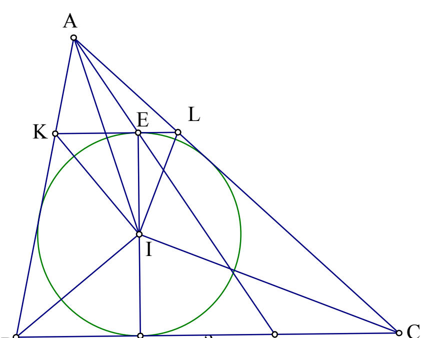
thẳng này đồng quy tại một điểm trên IG

với G là trọng tâm của tam giác DEF. Tuy nhiên IG cũng chính là đường thẳng Euler của tam giác DEF. Theo **1.5**, IG đi qua O. Như vậy điểm đồng quy nằm trên IO. Ta có điều phải chứng minh.

1.8. Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F lần lượt gọi DP, EQ, FR là đường kính của (I), chứng minh rằng AP, BQ, CR đồng quy tại một điểm nằm trên đường nối I và trọng tâm G của tam giác ABC.

Bổ đề 5. Cho tam giá ABC, đường tròn nội tiếp (I) của tam giác tiếp xúc BC tại D. Gọi DE là đường kính của I. AE cắt BC tại F thì $BD = CF$.

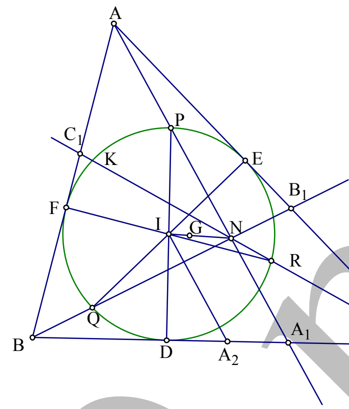
Chứng minh: Gọi giao điểm của tiếp tuyến tại E của (I) với AB, AC lần lượt là K, L. Gọi r là bán kính của (I).



Ta chú ý rằng KI, LI lần lượt là phân giác của các góc $\widehat{BKL}, \widehat{CLK}$. Từ đó ta dễ thấy $\Delta KEI \sim \Delta IDB$ (g.g) suy ra $KE.BD = ID.IE = r^2$. Tương tự $EL.DC = ID.IE = r^2$ do đó $KE.BD = EL.DC$. Suy ra $\dfrac{EL}{BD} = \dfrac{KE}{DC} = \dfrac{EL + KE}{DB + DC} = \dfrac{KL}{BC}$ (1). Dễ thấy $KL//BC$. Theo định lý Thales ta có $\dfrac{EL}{FC} = \dfrac{AL}{AC} = \dfrac{KL}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta dễ suy ra $BD = FC$, ta chứng minh được bổ đề.

Trở lại bài toán.



Gọi giao điểm của AP với BC là A_1 và trung điểm BC là A_2.

Theo bổ đề $BD = CA_1$ vậy A_2 cũng là trung điểm DA_1, I là trung điểm DP do đó suy ra $IA_2 // AA_1$. Tương tự có B_1, B_2, C_1, C_2 thì $IB_2 // BB_1, IC_2 // CC_1$.

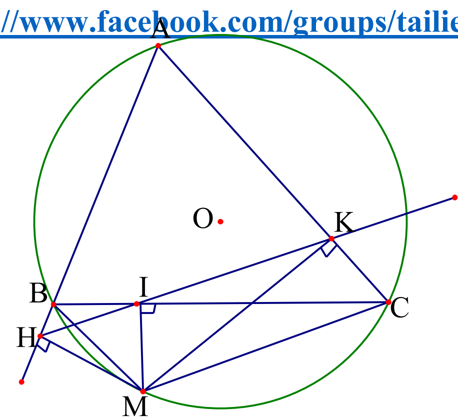
Từ đó ta áp dụng câu 2 a) với điểm I ta suy ra AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm N nằm trên đường nối I và trọng tâm G của tam giác ABC hơn nữa $GN = 2GI$. Ta có điều phải chứng minh.

Qua đường thẳng Ơ le và một số kết quả mở rộng ta thấy việc khai thác các định lý, tính chất hình học là chìa khóa quan trọng để khám phá các vẽ đẹp tiềm ẩn trong "Hình học phẳng". Hy vọng các em học sinh tiếp tục phát triển, đào sâu suy nghỉ để tìm ra các bài toán mới hay hơn, phong phú hơn.Đó là cách để học giỏi bộ môn hình học phẳng.

2. Đường thẳng Simmon

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) M là một điểm bất kỳ trên đường tròn. Kẻ MH, MI, MK lần lượt vuông góc với AB, BC, AC. Chứng minh rằng ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Chứng minh:



Tứ giác $MIBH$ có $\widehat{BHM}+\widehat{BIM}=90^0+90^0=180^0$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MIH}=\widehat{MBH}$ (cùng chắn cung HM), mà tứ giác $ABMC$ nội tiếp nên $\widehat{MBH}=\widehat{KCM}$, do đó $\widehat{MIH}=\widehat{KCM}$.

Mặt khác tứ giác $KCMI$ nội tiếp (vì $\widehat{MIC}=\widehat{MKC}=90^0$) nên $\widehat{KCM}+\widehat{MIK}=180^0 \Rightarrow \widehat{MIH}+\widehat{MIK}=180^0 \Rightarrow \widehat{HIK}=180^0$.

Vậy H, I, K thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua H, I, K được gọi là đường thẳng Simson của điểm M.

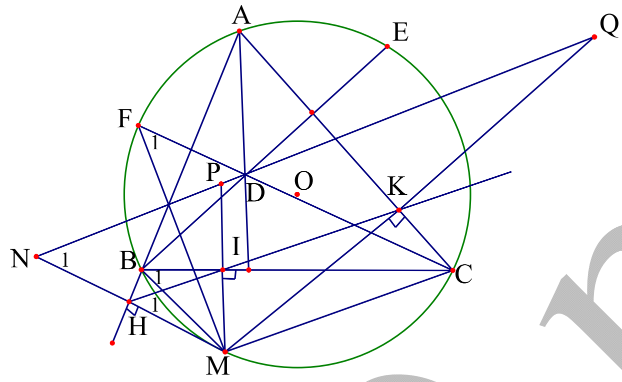
Chú ý: Ta có bài toán đảo về bài toán Simson như sau: Cho tam giác ABC và một điểm M nằm ngoài tam giác. Chứng minh rằng nếu hình chiếu của M lên ba cạnh của tam giác ABC là ba điểm thẳng hàng thì M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3. Đường thẳng Steiner

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là điểm bất kỳ thuộc đường tròn. Gọi N, P, Q theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua

AB, BC, CA. Chứng minh rằng N, P, Q thẳng hàng.

Chứng minh:



Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M lên AB, BC, AC; thế thì H, I, K thẳng hàng (đường thẳng Simson). Dễ thấy IH là đường trung bình của tam giác MNP. Tương tự $IK // PQ$. Theo tiên đề Ơ-clit và do H, I, K thẳng hàng nên suy ra N, P, Q thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua N, P, Q được gọi là đường thẳng Steiner của điểm M.

Chú ý:

a) Ta có thể chứng minh ba điểm N, P, Q thẳng hàng bằng cách dùng phép vị tự: Các điểm N, P, Q lần lượt là ảnh của H, I, K trong phép vị tự tâm M tỉ số 2, mà H, I, K thẳng hàng nên N, P, Q cũng thẳng hàng. Như vậy đường thẳng Steiner là ảnh của đường thẳng Simson trong phép vị tự tâm M tỉ số 2.

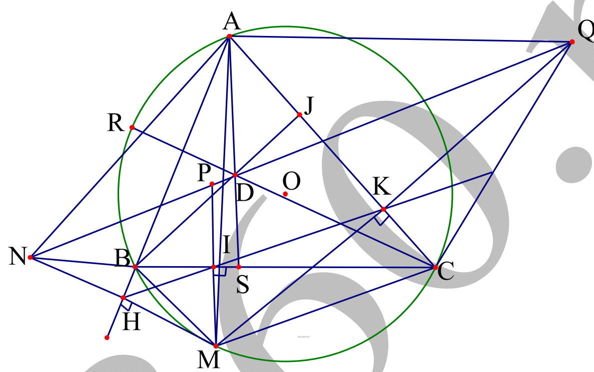
b) Đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC. Thật vậy, gọi D là trực tâm của tam giác ABC; BD, CD cắt (O) lần lượt ở E, F. Dễ dàng chứng minh được E đối xứng với D qua AC, F đối xứng với D qua AB (Xem phần chứng minh đường thẳng Ơ le cách 2). Ta có $FDMN$

là hình thang cân nên $\widehat{F_1} = \widehat{N_1}$ mà $\widehat{F_1} = \widehat{B_1} = \widehat{H_1}$ (Tính chất góc nội tiếp),

do đó $\widehat{N_1} = \widehat{H_1}$. Suy ra $ND // HK$. Tương tự $QD // HK$.

Vậy N, D, Q thẳng hàng hay đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC.

Cách khác:



Gọi AS, BJ, CR là các đường cao của tam giác ABC, D là trực tâm. Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$ (tính chất đối xứng). Lại có $\widehat{AMB} = \widehat{ADJ}$ (cùng bù với $\widehat{SDJ}$). Suy ra $\widehat{ANB} = \widehat{ADJ}$ nên $ADBN$ là tứ giác nội tiếp, do đó $\widehat{NAB} = \widehat{NDB}$. Mà $\widehat{NAB} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{NDB} = \widehat{MAB}$. Chứng minh tương tự $\widehat{CDQ} = \widehat{CAM}$. Ta có

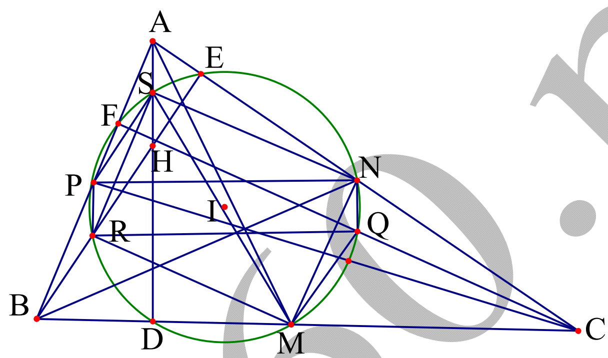
$$\widehat{NDB} + \widehat{CDQ} = \widehat{MAB} + \widehat{CAM} = \widehat{BAC}$$
$$\Rightarrow \widehat{NDQ} = \widehat{NDB} + \widehat{BDC} + \widehat{CDQ} = \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^0.$$

Vậy N, D, Q thẳng hàng hay đường thẳng Steiner đi qua trực tâm của tam giác ABC.

4. Đường tròn Euler

Cho tam giác ABC có đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB; S, R, Q lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC. Chứng minh rằng chin điểm $D, E, F, M, N, P, S, R, Q$ cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh:



Trong tam giác ABH thì PR là đường trung bình nên $PR//AH$ và $PR = \frac{1}{2}AH$. Trong tam giác ACH thì NQ là đường trung bình nên $NQ//AH$ và $NQ = \frac{1}{2}AH$. Do đó $PR//NQ$ và $PR = NQ$ nên $PNQR$ là hình bình hành. Mặt khác $PR//AH$ mà $AH \perp BC$ nên $PR \perp BC$, lại có $PN//BC$ (PN là đường trung bình của tam giác ABC). Suy ra $PN \perp PR$, do đó $PNQR$ là hình chữ nhật. Gọi I là giao điểm của PQ và RN thì $IP = IN = IR = IQ$. Chứng minh tương tự ta có $IS = IM = IN = IR$. Ta được $IP = IQ = IN = IR = IS = IM$.

Tam giác FPQ vuông tại F có I là trung điểm của PQ nên $IF = IP = IQ$. Tương tự $IE = IR = IN$; $ID = IS = IM$. Suy ra $ID = IE = IF = IM = IN = IP = IS = IR = IQ$. Vậy chin điểm

$D, E, F, M, N, P, S, R, Q$ cùng nằm trên đường tròn tâm I. Đường tròn đi qua chín điểm được gọi là đường tròn Euler của tam giác ABC.

Chú ý:

a) Tâm đường tròn Euler nằm trên đường thẳng Euler.

Thật vậy, gọi G và O theo thứ tự là trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta chứng minh được $OM = \frac{1}{2}AH = SH$, lại có $OM // SH \Rightarrow OMHS$ là hình bình hành. Mà I là trung điểm của SM nên cũng là trung điểm của OH.

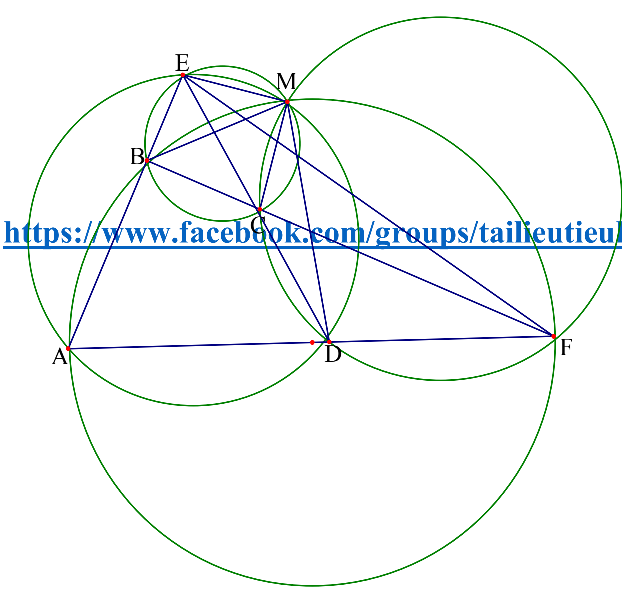
Như vậy bốn điểm H, I, O, G thẳng hàng, tứ là tâm đường tròn Euler nằm trên đường thẳng Euler.

b) Bán kính đường tròn Euler bằng $\frac{R}{2}$ (với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). Thật vậy, ta có IS là đường trung bình của ΔAHO nên $IS = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$.

5. Điểm Miquel

Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác EBC, FCD, EAD, FAB đồng quy.

Chứng minh:



Gọi M là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC và FCD.

Ta có $\widehat{EMD} = \widehat{EMC} + \widehat{CMD} = \widehat{ABF} + \widehat{AFB} = 180^0 - \widehat{EAD}$

$\Rightarrow \widehat{EAD} + \widehat{EMD} = 180^0$. Do tứ giác $EMDA$ nội tiếp hay M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác EAD. Chứng minh tương tự M cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác FAB.

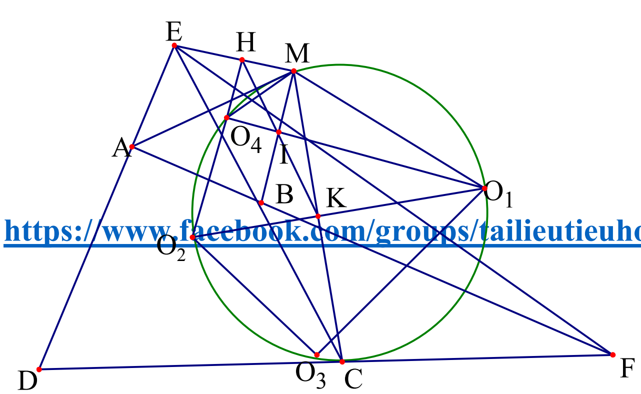
Vậy đường tròn ngoại tiếp của các tam giác EBC, FCD, EAD, FAB đồng quy tại M.

Điểm M được gọi là điểm Miquel.

6. Đường tròn Miquel

Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC. Gọi M là điểm Miquel và O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác EBC, CDF, EAD, ABF. Chứng minh rằng năm điểm M, O_1, O_2, O_3, O_4 cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh:



Gọi H, I, K theo thứ tự là trung điểm của FM, BM, CM. Các đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại M và C nên O_1O_2 là đường trung trực của MC, do đó O_1O_2 vuông góc với MK tại K. Tương tự O_1O_4 vuông góc với MI tại I, O_2O_4 vuông góc với MH tại H.

Nói cách khác H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên các cạnh O_2O_4, O_1O_4, O_1O_2 của tam giác $O_1O_2O_4$. Dễ thấy $IK // BC$ và $IH // FB$ mà F, B, C thẳng hàng nên H, I, K thẳng hàng.
Theo bài toán đảo về đường thẳng Simson (xem mục 2), ta có M, O_1, O_2, O_4 cùng nằm trên một đương tròn. Tương tự M, O_1, O_3, O_4 cùng nằm trên một đường tròn. Vậy năm điểm M, O_1, O_2, O_3, O_4 cùng nằm trên một đường tròn.

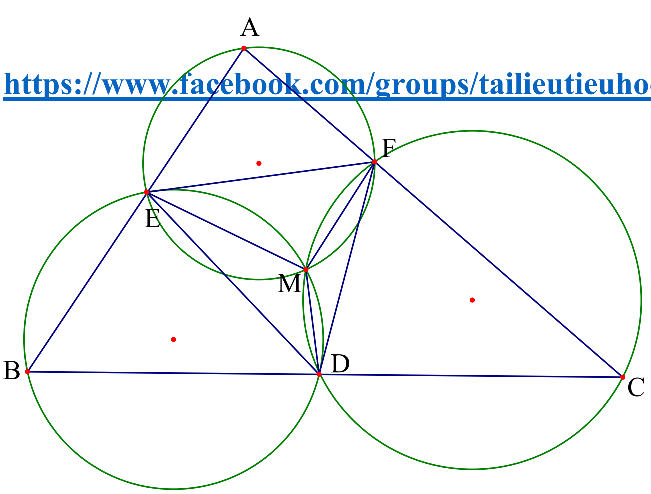
Đường tròn đi qua năm điểm M, O_1, O_2, O_3, O_4 được gọi là đường tròn Miquel.

7. Định lý Miquel

Cho tam giác ABC

các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AEF, BDF, CDE đồng quy.

Chứng minh:



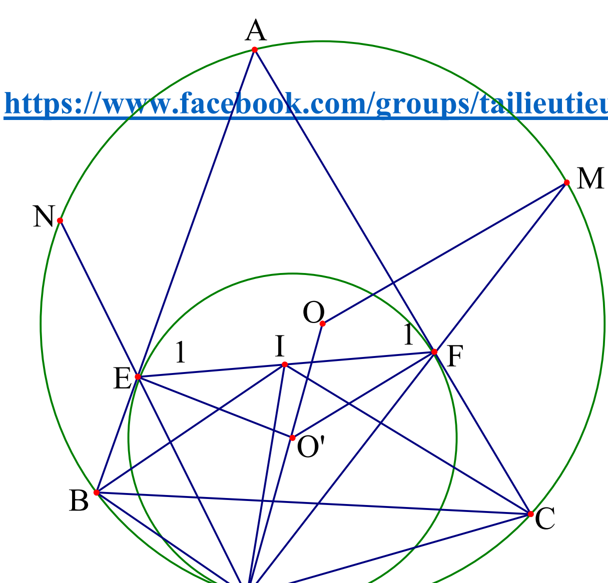
Gọi M là giao điểm khác D của đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BFD, CDE. Ta có $\widehat{AFM} = \widehat{BDM}$ và $\widehat{AEM} = \widehat{CDM}$ (do $BFMD, DMEC$ là các tứ giác nội tiếp). Do đó $\widehat{AEM} + \widehat{AFM} = \widehat{BDM} + \widehat{CDM} = 180^0$ nên tứ giác $AEMF$ nội tiếp hay M cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Vậy đường tròn ngoại tiếp của tam giác AEF, BDF, CDE đồng quy tại M (đpcm).

8. Định lý Lyness

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) tại D và tiếp xúc với AB, AC ở E, F. Chứng minh rằng EF đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh:

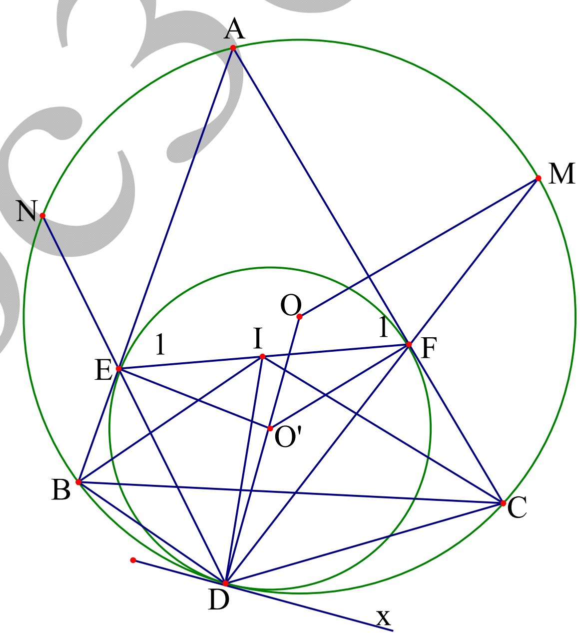


Vẽ tia phân giác của $\widehat{BDC}$ cắt EF tại I; gọi M, N là giao điểm của DF, DE với đường tròn $\left(O\right)$. Ta có $\widehat{O'FD} = \widehat{OMD}\left(= \widehat{ODM}\right)$ nên $O'F // OM$ mà $O'F \perp AC \Rightarrow OM \perp AC \Rightarrow M$ là điểm chính giữa của cung AC, do đó $\widehat{FDC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ (1). Tam giác AEF cân tại A (Do AE, AF là các tiếp tuyến của (O')) nên $\widehat{E_1} = \widehat{F_1} = \frac{180^0 - \widehat{A}}{2}$, mặt khác $\widehat{IDC} = \widehat{IDB} = \frac{\widehat{BDC}}{2} = \frac{180^0 - \widehat{A}}{2}$ (Tính chất góc nội tiếp của tứ giác $ABDC$) nên $\widehat{IDB} = \widehat{IDC} = \widehat{E_1} = \widehat{F_1}$. Mà $\widehat{EDF} = \widehat{F_1}\left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{EF}\right)$ $\Rightarrow \widehat{IDC} = \widehat{EDF} \Rightarrow \widehat{IDE} = \widehat{FDC}$ (2). Vì $\widehat{E_1} = \widehat{IDB}$ nên $IEDB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IDE} = \widehat{IBE}$ (3). Từ (1),(2) và (3) ta có $\widehat{IBE} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$, do đó IB là tia phân giác của $\widehat{ABC}$.

Do $\widehat{IDC}=\widehat{IDB}$ mà $\widehat{IDE}=\widehat{FDC}$ nên $\widehat{BDE}=\widehat{IDF}$. Tứ giác $IFCD$ nội tiếp (vì $\widehat{F_1}=\widehat{IDC}$).

$\Rightarrow \widehat{IDF}=\widehat{ICF} \Rightarrow \widehat{ICF}=\widehat{BDE}$ (4). Mặt khác, do N là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$ (chứng minh tương tự ở trên)$\Rightarrow \widehat{BDE}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$ (5). Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{ICF}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$, do đó IC là tia phân giác của $\widehat{ACB}$. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (đpcm).

Cách khác:



Vẽ tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt EF tại I, ta chứng minh IC là tia phân giác của $\widehat{ACB}$. Vẽ tiếp tuyến chung Dx của (O) và (O'). Tương tự như cách trên, gọi M là giao điểm của DF với (O) thì M là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AC}$, do đó B, I, M thẳng hàng.

Ta có $\widehat{IED} = \widehat{IBD}\left(= \widehat{xDM}\right)$ nên tứ giác $IEDB$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{E_1} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2}$, mà $\widehat{BDC} = 180^0 - \widehat{A}$, do đó

$\widehat{IDC} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2} = \widehat{F_1} \Rightarrow$ tứ giác $IDCF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{IDF}$. Ta lại có $\widehat{IDF} = \widehat{IDC} - \widehat{FDC} = \dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2} - \dfrac{\widehat{ABC}}{2} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2} \Rightarrow \widehat{ICF} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$,

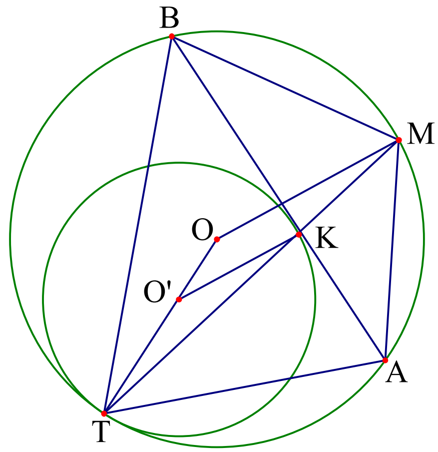
do đó IC là tia phân giác của $\widehat{ACB}$ (đpcm).

9. Định lý Lyness mở rộng (bổ đề Sawayama)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) M là một điểm bất kỳ trên cạnh AC. Đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại D và tiếp xúc với MB, MC lần lượt ở E, F. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên EF.

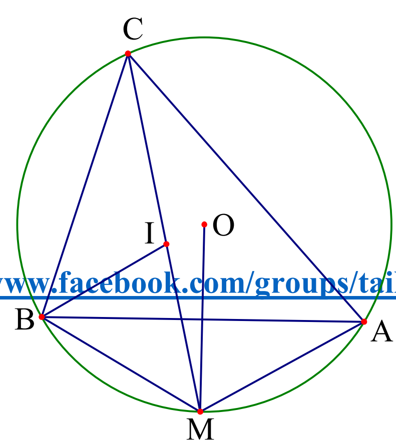
<u>Để chứng minh định lý này ta cần hai bổ đề sau:</u>

<u>Bổ đề 1:</u> Cho AB là dây của đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc với (O) tại T và tiếp xúc với AB tại K. Chứng minh rằng TK đi qua điểm chính giữa của cung AB và $MA^2 = MK.MT$ (với M là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$).



Chứng minh M là điểm chính giữa của cung AB. Ta có
$\widehat{O'KT} = \widehat{OMT}\left(= \widehat{OTM}\right)$ nên $O'K\,/\,/OM$ mà
$O'K \perp AB \Rightarrow OM \perp AB \Rightarrow M$ là điểm chính giữa của cung AC,
Bây giờ ta chứng minh $MA^2 = MK.MT$.
Thật vậy, ta có $\widehat{MTA} = \widehat{MBA} = \widehat{MAK} \Rightarrow \Delta MKA \sim \Delta MAT$ (g.g)
$\Rightarrow \dfrac{MK}{MA} = \dfrac{MA}{MT} \Rightarrow MA^2 = MK.MT$.

Bổ đề 2: Cho tam giác ABC nội tiếp nội tiếp đường tròn (O) và M là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$ không chứa C. Trên MC lấy I sao cho $MI = MB$. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Thật vậy, gọi I' là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì I' là giao điểm của đường phân giác trong góc B với MC. Ta có $\widehat{I'BM} = \widehat{I'BA} + \widehat{ABM} = \widehat{I'BC} + \widehat{BCM} = \widehat{BI'M}$ suy ra tam giác MBI cân tại M hay $MI' = MB$.

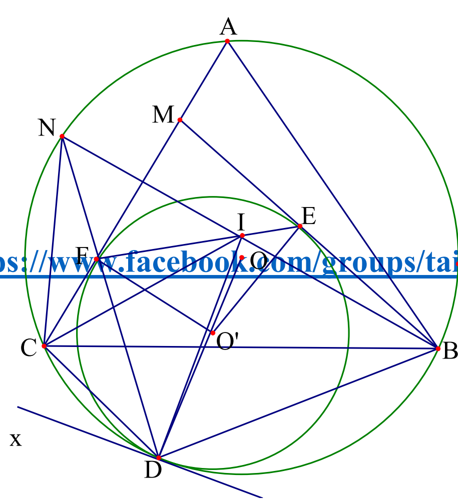
Do đó $MI = MI'$ hay $I \equiv I'$. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh:

Gọi N giao điểm của DF với (O) thì N là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AC}$ và $NC^2 = NF.ND$ (theo bổ đề 1). Gọi Dx là tiếp tuyến chung của (O) và (O') tại D, I là giao điểm của BN và EF. Ta có $\widehat{IED} = \widehat{IBD}\left(= \widehat{xDN}\right)$ nên tứ giác $IEBD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DIB} = \widehat{DEB}$. Mà $\widehat{DEB} = \widehat{DFI}$ nên $\widehat{DIB} = \widehat{DFI}$, do đó $\widehat{NID} = \widehat{NFI}$ (cùng kề bù với hai góc bằng nhau).

Từ đó chứng minh được $\Delta NFI \sim \Delta NID$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{NF}{NI} = \dfrac{NI}{ND} \Rightarrow NI^2 = NF.ND = NC^2 \Rightarrow NI = NC$. Theo bổ đề 2, ta có I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (đpcm).



10. Một hệ quả của định lý Lyness mở rộng

Cho đường tròn (O) hai điểm A và B nằm trên đường tròn

điểm C nằm trong đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O) tại R và tiếp xúc với CA, CB theo thứ tự ở P, Q. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng I nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APR.

Chứng minh:

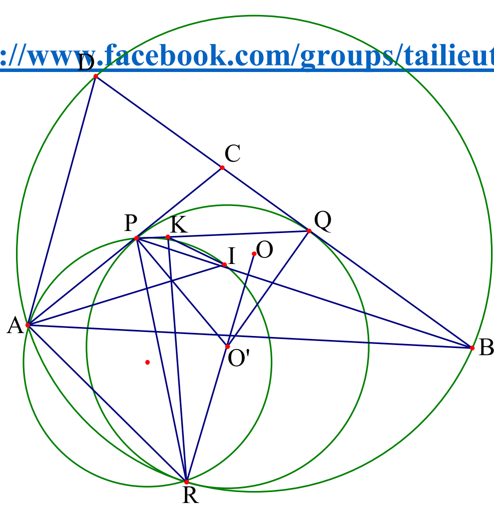
Gọi D là giao điểm của BC với (O), K là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ADB. Ta có B, I, K thẳng hàng và K nằm trên PQ (theo bổ đề Sawayama). Dễ thấy A, P, K, R cùng nằm trên một đường tròn (xem mục 8) (1). Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên

$\widehat{AIB} = 90 + \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$. Ta lại có

$$\widehat{APK} = 180^0 - \widehat{CPK} = 180^0 - \frac{180^0 - \widehat{ACB}}{2} = 90^0 + \frac{\widehat{ACB}}{2}.$$

Do đó $\widehat{AIB} = \widehat{APK}$ nên A, P, K, I cùng nằm trên một đường tròn (2)

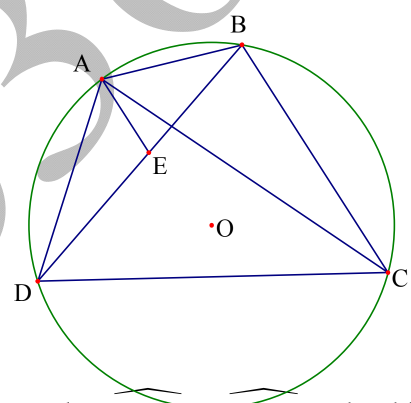
Từ (1) và (2) suy ra A, P, R, K, I cùng trên một đường tròn.
Vậy I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác APR.



11. Định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Chứng minh rằng $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

Chứng minh:



Trên AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ADE} = \widehat{BDC}$. Khi đó ta có:
$\Delta AED \sim \Delta BCD$ (g.g). Nên suy ra $AD.BC = AE.BD$ (1)

Mặt khác, ta cũng có: $\frac{AD}{DC} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{BD}{DC}$. Từ đó suy ra $\Delta ADB \sim \Delta EDC \Rightarrow AB.DC = DB.EC$ (2). Từ (1), (2) ta suy ra: $AB.DC + AD.BC = BD\left(EC + AE\right) = DB.AC$. Ta có đpcm.

Cách 2.

Từ C vẽ $CE \perp AD, CF \perp BD, CG \perp AB\left(E \in AD, F \in BD, G \in AB\right)$.

Theo định lý Simson, ta có G, F, E thẳng hàng. Ta có:

$GF + FE = GE$. Áp dụng định lý hàm số sin ta có:

$GF = BC.\sin B; EF = DC.\sin D; GE = AC.\sin A; \sin B = \frac{AD}{2R};$

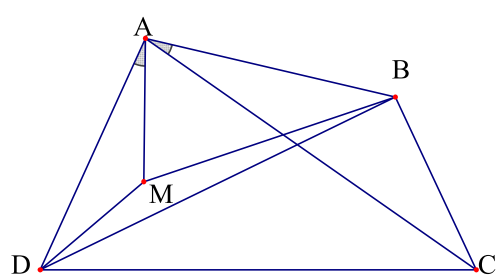
$\sin D = \frac{AB}{2R}; \sin A = \frac{BD}{2R}$. Từ trên ta suy ra:

$\frac{BC.AD}{2R} + \frac{AB.DC}{2R} = \frac{BD.AC}{2R}$.Vậy ta có: $BD.AC + AB.DC = BD.AC$ (đpcm)

12. Định lý Ptolemy cho tứ giác bất kỳ

Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$.

Chứng minh:



Bên trong tứ giác $ABCD$ lấy điểm M sao cho $\widehat{MAD} = \widehat{CAB}$ và $\widehat{MDA} = \widehat{ACB}$. Ta có $\Delta ADM \sim \Delta ACB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DM}{BC} \Rightarrow AD.BC = AC.DM$ (1). Do $\widehat{MAD} = \widehat{CAB}$ nên $\widehat{DAC} = \widehat{MAB}$.

Xét tam giác ADC và MAB, có: $\widehat{DAC} = \widehat{MAB}$ (chứng minh trên)

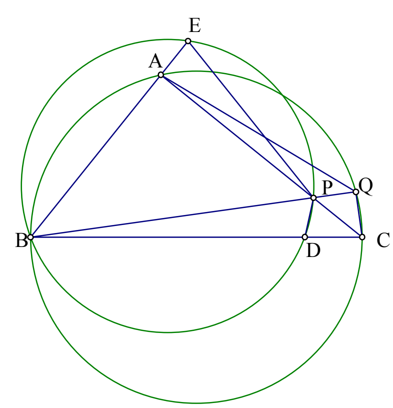
$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$ (do $\Delta AMD \sim \Delta ACB$) nên $\Delta ADC \sim \Delta AMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \dfrac{DC}{MB} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB.CD = AC.MB$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $AB.CD + AD.BC = AC\left(BM + DM\right) \geq AC.BD$.

Đẳng thức xảy ra khi M nằm trên đường chéo BD, lúc đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Ví dụ 1) Cho tam giác ABC vuông tại A. $AB < AC$. Gọi D là một điểm trên cạnh BC E là một điểm trên cạnh BA kéo dài về phía A sao cho $BD = BE = CA$. Gọi C là một điểm trên AC sao cho E, B, D, P thuộc cùng một đường tròn Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $AQ + CQ = BP$.

Giải:



Vì tứ giác $BEPD, AQCB$ nội tiếp nên $\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{DEP}$.

Mặt khác $\widehat{AQC} = 180^0 - \widehat{ABC} = \widehat{EPD}$

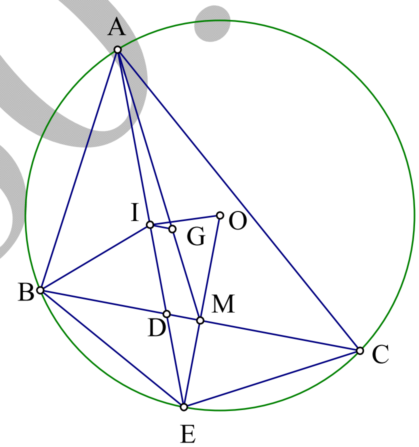
(1). Áp dụng định lý Ptô –lê- mê cho

tứ giác $BEPD$ ta có $PE.BD + PD.EB + DE.BP$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AQ.BD + QC.EB = CA.BP$. Mặt khác $BD = EB = CA$ nên $AQ + QC = BP$.

Ví dụ 2) . Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp O là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm G. Giả sử rằng $\widehat{OIA} = 90^0$. Chứng minh rằng IG và BC song song.

Giải:



Gọi E là giao điểm thứ hai khác A của AI với đường tròn (O).

Khi đó E là điểm chính giữa cung BC (cung không chứa A).

Ta có $EB = EI = EC = IA$.

Theo định lý Ptô-lê-mê ta có

$EA.BC = EC.AB + EB.AC$ do đó $2BC = AB + AC$.

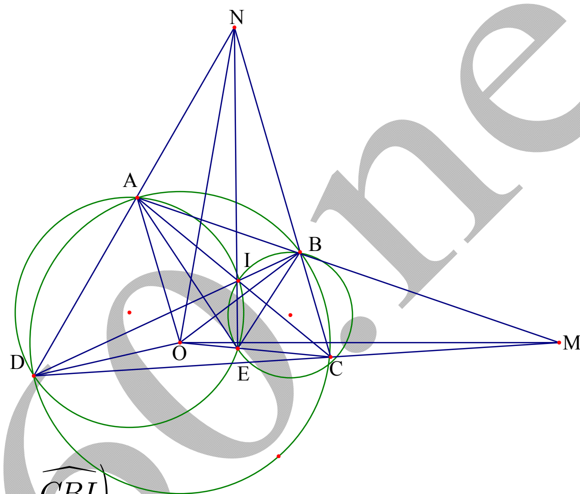
Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có:

$\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{AB + AC}{BD + DC} = \dfrac{AB + AC}{BC} = 2$. Vậy $\dfrac{AI}{AD} = 2$. Gọi M là trung điểm cạnh BC, khi đó $\dfrac{AG}{GM} = 2 = \dfrac{AI}{ID}$. Vậy $GI//BC$.

13. Định lý Brocard

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là giao điểm của AB và CD; N là giao điểm của AD và BC; I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác OMN.

Chứng minh:



Gọi E là giao điểm khác I của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AID và BIC.

Ta có $\widehat{DEC} =$

$360^0 - \left(\widehat{DEI} + \widehat{IEC}\right)$

$= 360^0 - \left(180^0 - \widehat{DAI} + 180^0 - \widehat{CBI}\right)$

$= \widehat{DAI} + \widehat{CBI} =$ sđ$\overset{\frown}{CD} = \widehat{DOC}$, do đó tứ giác DOE$C$ nội tiếp.Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{AIE} + \widehat{BEI} = \widehat{ADI} + \widehat{BCI} =$ sđ$\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB}$ nên $AOEB$ cũng là tứ giác nội tiếp. Gọi E' là giao điểm của OM là đường tròn ngoại tiếp tam giác DOC.

Thế thì $ME'.MO = MC.MD$, mà $MC.MD = MA.MB$ nên $ME'.MO = MA.MB$. Từ đó chứng minh được tứ giác $AOE'B$ nội tiếp. như vậy E' là điểm chung khác O của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB và DOC. Do đó $E \equiv E'$ hay M, E, O thẳng hàng.

Tương tự N, I, E thẳng hàng.Ta có: $\widehat{IEO} = \widehat{AEI} + \widehat{AEO} = \widehat{DAI} + \widehat{OBA}$ (1). $\widehat{IEM} = \widehat{IEB} + \widehat{BEM} = \widehat{BCI} + \widehat{OAB}$ (2). Lại có $\widehat{DAI} = \widehat{BCI}$ và

$\widehat{OBA}=\widehat{OAB}$ (3). Từ (1),(2) và (3) ta có $\widehat{IEO}=\widehat{IEM}$, mà $\widehat{IEO}+\widehat{IEM}=180^0$ nên $\widehat{IEO}=\widehat{IEM}=90^0$ hay $NI\perp OM$.

Tương tự gọi F là giao điểm khác I của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB và DIC thì N,I,F thẳng hàng và $MI\perp ON$. Vậy I là trực tâm của ΔOMN.

14. Định lý con bướm với đường tròn

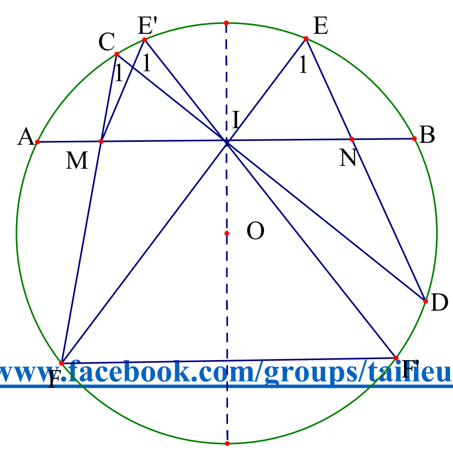
Cho đường tròn (O) dây AB. Gọi I là trung điểm của dây AB vẽ các dây CD,EF đi qua I (C và E nằm về một phía của $\overparen{AB}$). Gọi giao điểm của CF,DE với AB là M,N. Chứng minh rằng $IM=IN$.

Chứng minh:

Cách 1: Vẽ dây $E'F'$ đối xứng với tia EF qua OI. Tứ giác $CE'F'F$ nội tiếp nên $\widehat{MCE'}+\widehat{F'}=180^0$. Mà $FF'//AB$ nên $\widehat{F'}=\widehat{MIE'}$, do đó $\widehat{MIE'}+\widehat{MCE'}=180^0$

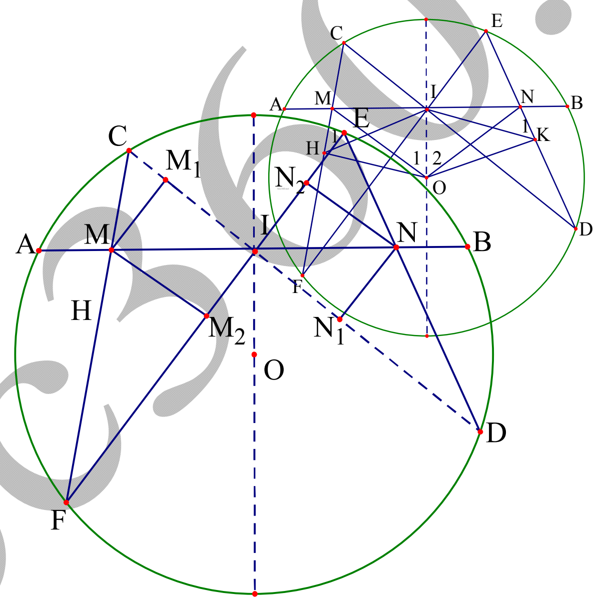
$\Rightarrow$ tứ giác $MCE'I$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{C_1}=\widehat{E_1}$. Mặt khác $\widehat{E_1}=\widehat{C_1}$ nên $\widehat{E_1}=\widehat{E_1'}$.

Ta lại có $IE=IE'$; $\widehat{MIE'}=\widehat{NIE}$ (tính chất đối xứng). Từ đó chứng minh được $\Delta MIE'=\Delta NIE$ (g.c.g) $\Rightarrow IM=IN$.



Cách 2: Kẻ $OH \perp CF, OK \perp DE$ thì H, K lần lượt là trung điểm của CF, DE. Ta có $\Delta ICF \sim \Delta IED$ (g.g) có IH, IK là các trung tuyến tương ứng nên $\dfrac{IH}{IK} = \dfrac{IC}{IE} = \dfrac{CF}{DE} = \dfrac{HC}{KE} \Rightarrow \Delta ICH \sim \Delta IEK$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{K_1}$ (1). Các tứ giác $OIMH, OINK$ nội tiếp (tổng hai góc đối) nên $\widehat{O_1} = \widehat{H_1}, \widehat{O_2} = \widehat{K_1}$ (2).Từ (1) và (2) có $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ nên tam giác MON cân tại O. Vậy $IM = IN$.

Cách 3:



Kẻ $MM_1, NN_1 \perp CF; MM_2, NN_2 \perp DE$.

Tacó $\Delta IMM_1 \sim \Delta INN_1 \Rightarrow \frac{IM}{IN} = \frac{MM_1}{NN_1}(1); \Delta IMM_2 \sim \Delta INN_2;$

$\Rightarrow \frac{IM}{IN} = \frac{MM_2}{NN_2}(2)\ \Delta CMM_1 \sim \Delta ENN_1 \Rightarrow \frac{MM_1}{NN_1} = \frac{CM}{EN}(3);$

$\Delta FMM_2 \sim \Delta DNN_1 \Rightarrow \frac{MM_2}{NN_2} = \frac{FM}{DN}(4)$ .Từ (1),(2),(3) và (4) suy ra:

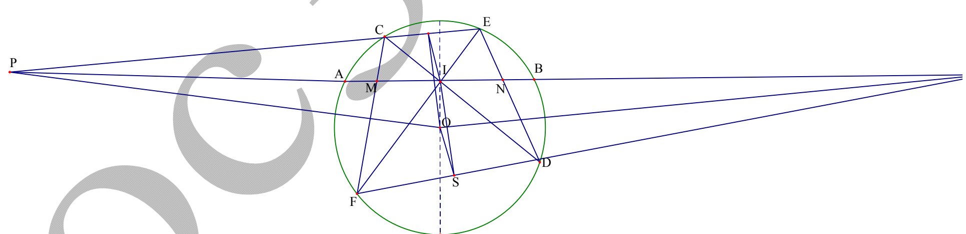
$\frac{IM^2}{IN^2} = \frac{MM_1.MM_2}{NN_1.NN_2} = \frac{CM.FM}{EN.DN} = \frac{AM.MB}{BN.AN}$. Đặt

$IM = m, IN = n, IA = IB = a$. Ta có

$\frac{m^2}{n^2} = \frac{(a-m)(a+m)}{(a-n)(a+n)} = \frac{a^2-m^2}{a^2-n^2} = \frac{m^2+a^2-m^2}{n^2+a^2-n^2} = 1$

$\Rightarrow m^2 = n^2 \Rightarrow m = n$. Vậy $IM = IN$.

Chú ý: Nếu gọi P,Q là giao điểm của CE,DF với đường thẳng AB thì ta cũng có $IP = IQ$. Thật vậy, kẻ $OS \perp DF, OJ \perp EC$ và chứng minh tương tự như cách 2.

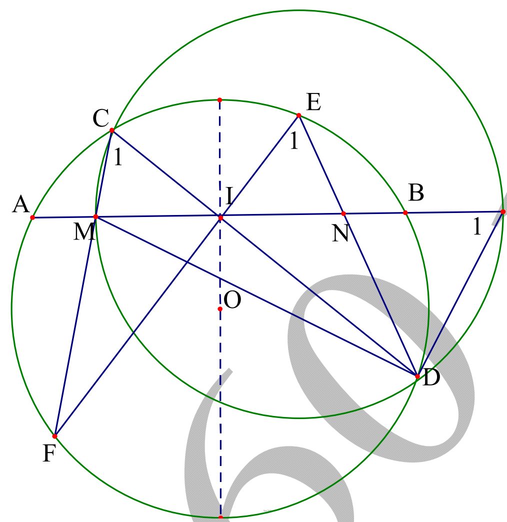


15. Định lý con bướm mở rộng với đường tròn

Cho đường tròn (O) dây AB và I là một điểm bất kỳ thuộc dây AB. Vẽ các dây CD, EF đi qua I (C và E nằm về một phía của $\overset{\frown}{AB}$). Gọi giao điểm của CF, DE với AB là M, N. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{IA}+\frac{1}{IN}=\frac{1}{IB}+\frac{1}{IM}.$$

Chứng minh:



Trước hết ta chứng minh rằng $\frac{AM.IB}{IM}=\frac{BN.IA}{IN}$ (*)

Thật vậy, vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác CMD cắt AB ở K. Theo hệ thức lượng trong đường tròn, ta có $IM.IK=IC.ID$ và $IC.ID=IA.IB$ nên $IM.IK=IA.IB$

$\Rightarrow IM\left(IB+BK\right)=\left(AM+IM\right)IB\Rightarrow IM.BK=AM.IB\Rightarrow\frac{AM.IB}{IM}=BK$

(1). Vì $\widehat{K_1}=\widehat{C_1}=\widehat{E_1}$ nên tứ giác $EIDK$ nội tiếp, tương tự như trên ta có

$IN.NK=EN.ND=AN.NB\Rightarrow IN\left(NB+BK\right)=\left(IA+IN\right)BN$

$\Rightarrow IN.BK=IA.BN\Rightarrow\frac{BN.IA}{IN}=BK$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$\frac{AM.IB}{IM}=\frac{BN.IA}{IN}$, (*) đã được chứng minh.

Đặt $IA = a, IB = b, IM = m, IN = n$, từ (*) ta có $\frac{(a-m)b}{m} = \frac{(b-n)a}{n}$

$\Rightarrow (a-m)bn = (b-n)am \Rightarrow abn - bmn = abm - amn$. Chia hai vế cho $abmn$ ta được $\frac{1}{m} - \frac{1}{a} = \frac{1}{n} - \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{n} = \frac{1}{b} + \frac{1}{m}$ hay

$\frac{1}{IA} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{IB} + \frac{1}{IM}$. Ghi chú: Bổ đề (*) được gọi là bổ đề Haruki.

16. Định lý con bướm với cặp đường thẳng

Cho tam giác ABC có I là trung điểm của cạnh BC. Qua I vẽ đường thẳng thứ nhất cắt AB, AC ở M, P; đường thẳng thứ hai cắt AB, AC ở Q, N. MN, PQ cắt BC lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng $IE = IF$.

Chứng minh:

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến IPM và NIQ, ta có:

$$\frac{IB}{IC}.\frac{PC}{PA}.\frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{PC}{PA}.\frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{PC}{PA} = \frac{MB}{MA} \quad (1)$$

$$\frac{IB}{IC}.\frac{NC}{NA}.\frac{QA}{QB} = 1 \Rightarrow \frac{NC}{NA}.\frac{QA}{QB} = 1 \Rightarrow \frac{QA}{QB} = \frac{NA}{NC} \quad (2)$$

Lại áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến MNE và PFQ, ta được:

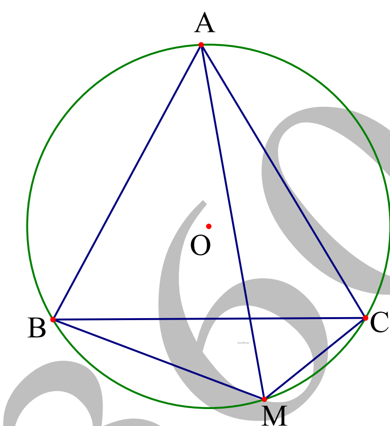
$\frac{FB}{FC}.\frac{PC}{PA}.\frac{QA}{QB} = 1(3); \frac{EC}{EB}.\frac{MA}{MB}.\frac{NA}{NC} = 1(4)$. Từ (1),(2),(3) và (4) suy ra

$\frac{FB}{FC} = \frac{EC}{EB} \Rightarrow \frac{FB}{BC} = \frac{EC}{BC} \Rightarrow FB = FC$. Lại có $IA = IB$ nên $IE = IF$.

17. Định lý Shooten

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng với mỗi điểm M bất kỳ nằm trên đường tròn (O) thì một trong ba đoạn MA, MB, MC có một đoạn có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn kia.

Chứng minh:



Xét điểm M nằm trên cung nhỏ BC.

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABMC$, ta có

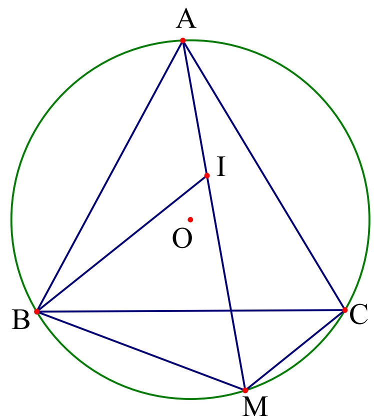
$MA.BC = MB.AC + MC.AB$.

Vì $AB = AC = BC$ nên $MA = MB + MC$.

Tương tự nếu điểm M nằm trên cung nhỏ AC và AB thì ta lần lượt có $MB = MC + MA$ và $MC = MA + MB$.

Suy ra đpcm.

Cách khác để chứng minh:



$MA = MB + MC$ (trường hợp điểm M nằm trên các cung AB, AC tương tự).

Trên MA lấy điểm I sao cho $MI = MB$, ta cần chứng minh $MC = AI$.

Thật vậy, ta có $\widehat{BMI} = \widehat{ACB} = 60^0$ mà $MB = MI$ nên tam giác BMI đều, do đó $BI = BM$ và $\widehat{IBM} = 60^0$.

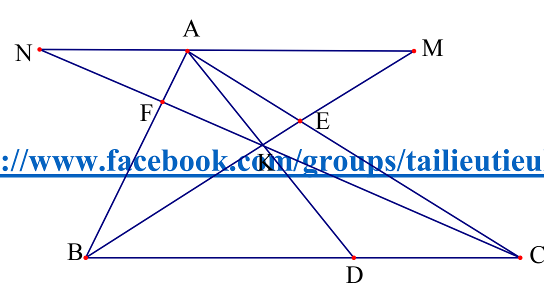
Ta lại có $\widehat{ABC} = 60^0$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{IBM}$, suy ra $\widehat{CBM} = \widehat{ABI}$.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta BCM = \Delta BAI$ (c.g.c) nên $MC = AI$.

18. Hệ thức Van Aubel

Cho tam giác ABC có AD, BE, CF đồng quy tại K (D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB).Chứng minh rằng $\frac{AK}{KD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$.

Chứng minh:



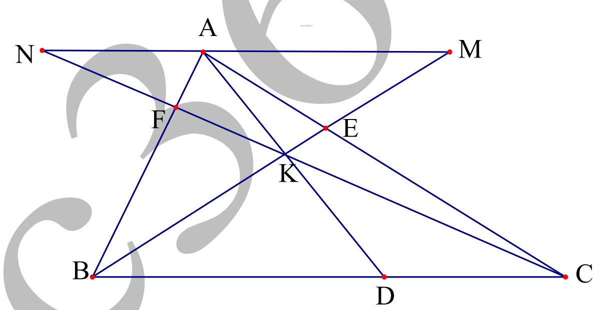
Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt BE, CF tại M, N ta có

$$\frac{AK}{KD}=\frac{AM}{BD}=\frac{AN}{CD}=\frac{AM+AN}{BD+CD}=\frac{AM+AN}{BC}=\frac{AM}{BC}+\frac{AN}{BC}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}$$

19. Định lý Ce'va

> Cho tam giác ABC và các điểm D, E, F lần lượt nằm trên cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để AD, BE, CF đồng quy là ta có hệ thức $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB=1}$ (*)

Chứng minh:



Điều kiện cần: Ta chứng minh rằng nếu AD, BE, CF đồng quy thì có (*)

Gọi K là điểm đồng quy của ba đoạn AD, BE, CF. Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt BE, CF ở M, N. Theo định lý Ta-lét ta có

$\frac{DB}{DC}=\frac{AM}{AN}, \frac{EC}{EA}=\frac{BC}{AM}, \frac{FA}{FB}=\frac{AN}{BC}$, do đó

$\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=\frac{AM}{AN}.\frac{BC}{AM}.\frac{AN}{BC}=1$ (đpcm)

Điều kiện đủ: Ta chứng minh rằng nếu có (*) thì AD, BE, CF đồng quy.
Thật vậy, gọi K là giao điểm của BE và CF, AK cắt cạnh BC tại D'.

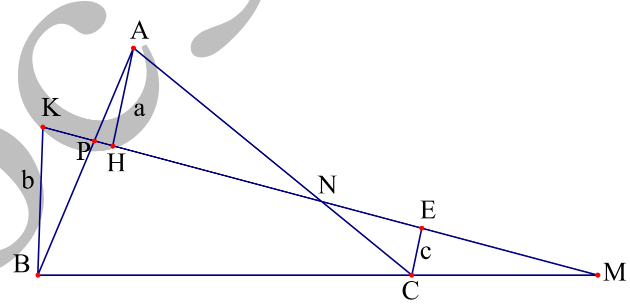
Theo chứng minh ở điều kiện cần ta có
$\frac{D'B}{D'C}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB}=1 \Rightarrow \frac{D'B}{D'C}=\frac{DB}{DC}$. Hai điểm D và D' đều chia trong đoạn BC theo cùng một tỉ số nên $D' \equiv D$. Vậy AD, BE, CF đồng quy.

Chú ý: Bài toán vẫn đúng trong trường hợp các điểm D, E, F nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB trong đó có đúng hai điểm nằm ngoài tam giác.

20. Định lý Menelaus

Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P theo thứ tự nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để M, N, P thẳng hàng là ta có hệ thức $\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB}=1$ (**)

Chứng minh:



Điều kiện cần: Gọi a, b, c theo thứ tự là khoảng cách từ A, B, C đến cát tuyến MNP.

Ta có $\frac{MB}{MC}=\frac{b}{c};\frac{NC}{NA}=\frac{c}{a};\frac{PA}{PB}=\frac{a}{b}$. Do đó $\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB}=\frac{b}{c}.\frac{c}{a}.\frac{a}{b}=1$ (đpcm)

Điều kiện đủ: Giả sử có (**) và PN cắt cạnh BC tại M'.

Thế thì $\frac{M'B}{M'C}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB}=1\Rightarrow\frac{M'B}{M'C}=\frac{MB}{MC}\Rightarrow M'\equiv M$.

Vậy M,N,P thẳng hàng (đpcm).