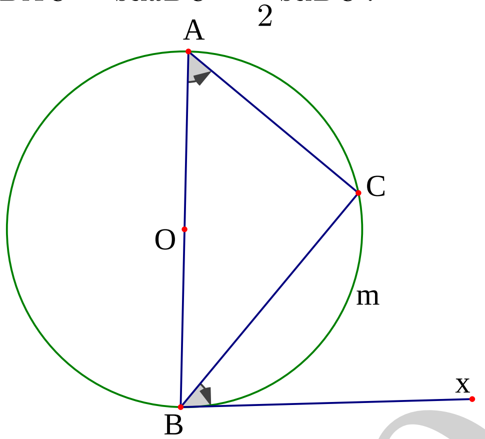
GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Số đo góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung (tại một điểm trên đường tròn) bằng nửa số đo cung bị chắn.

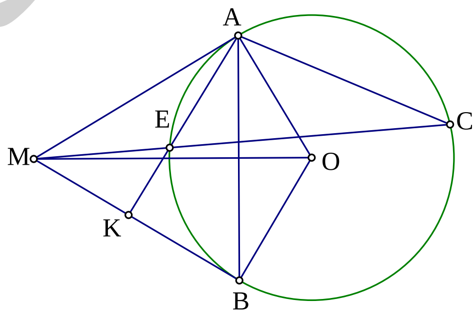
- Trên hình vẽ: sđBAC = sđ$xBC = \frac{1}{2}$sđBC.



B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giả sử A và B là hai điểm phân biệt trên đường tròn O. Các tiếp tuyến của đường tròn O. Các tiếp tuyến của đường tròn O tại A và B cắt nhau tại điểm M. Từ A kẻ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn O tại C. MC cắt đường tròn O tại E. Các tia AE và MB cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $MK^2 = AK.EK$ và $MK = KB$.

Lời giải:



Do $MB//AC$ nên

$BMC = ACM$ (1), ta lại có

$ACM = ACE = MAE$

(cùng chắn AE) (2). Từ (1) và (2)

suy ra $\Delta KME \sim \Delta KAM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MK}{AK} = \frac{EK}{MK}$ hay $MK^2 = AK.EK$ (3).

Ta thấy $EAB = EBK$ (cùng chắn BE). Từ đó $\Delta EBK \sim \Delta BAK$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BK}{AK} = \frac{EK}{BK}$ hay $BK^2 = AK.EK$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $MK^2 = KB^2$ nghĩa là $MK = MB$ (đpcm).

hoc360.net

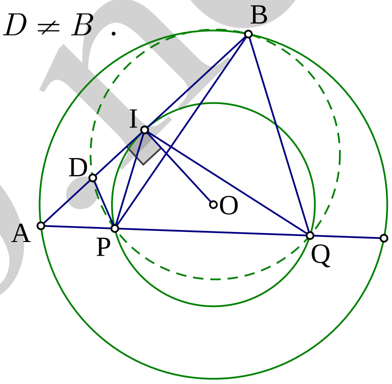
Ví dụ 2. Cho đường tròn C tâm O, AB là một dây cung của C không đi qua O và I là trung điểm của AB. Một đường thẳng thay đổi đi qua A cắt đường tròn C_1 tâm O bán kính OI tại P và Q. Chứng minh rằng tích $AP.AQ$ không đổi và đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ luôn đi qua một điểm cố định khác B.

Lời giải:

Ta có $PQI = PIA$ (cùng chắn PI), nên $\Delta API \sim \Delta AIQ$ (g.g).

Suy ra $\dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AI}{AQ} \Rightarrow AP.AQ = AI^2$ (không đổi).

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ cắt AB tại D $D \neq B$.

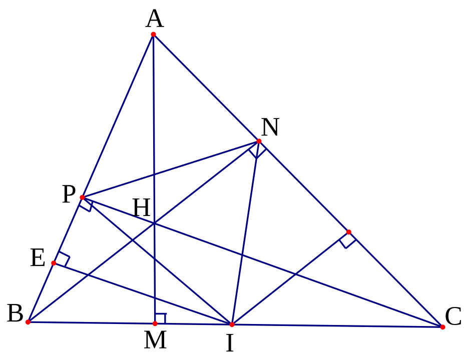


Khi đó $\Delta ADP \sim \Delta AQB$, suy ra

$\dfrac{AD}{AQ} = \dfrac{AP}{AB}$ hay $AD.AB = AP.AQ = AI^2$

(không đổi). Do đó điểm D là điểm cố định (đpcm).

Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và $BAC = 60^0$. Gọi M, N, P theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC và I là trung điểm của BC.
a) Chứng minh rằng tam giác INP đều.
b) Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC. Chứng minh rằng các điểm I, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.
c) Giả sử IA là phân giác của NIP. Tìm số đo BCP.



Lời giải:

a). Từ giả thiết ta có

$IN = IP = \dfrac{1}{2}BC$ nên tam giác INP cân tại I.

Lại vì B, P, N, C nằm trên đường tròn tâm I, đường kính BC nên theo mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung, ta thấy $PIN = 2PBN = 60^0$. Vậy tam giác INP đều.

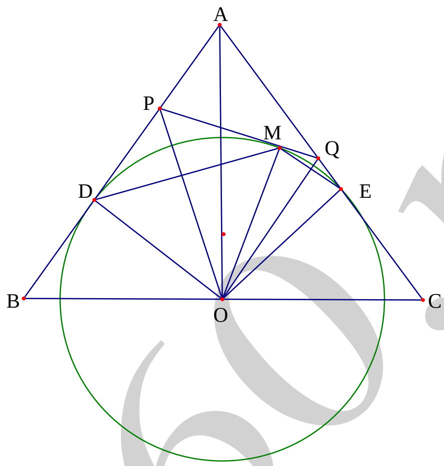
hoc360.net

b) Rõ ràng bốn điểm I, M, E và K cùng nằm trên đường tròn đường kính AI.

c) Từ điều kiện của bài toán ta thấy AI là tia phân giác của $BAC = 60^0$, mà I là trung điểm của BC nên tam giác ABC đều. Từ đó suy ra $BCP = 30^0$.

Ví dụ 4). Cho tam giác cân $ABC, (AB = AC)$. Gọi O là trung điểm của BC. Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC tại D, E. M là điểm chuyển động trên cung nhỏ DE tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M cắt AB, AC tại P, Q. Chứng minh $BC^2 = 4BP.CQ$ và tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác APQ lớn nhất.

Lời giải:



Ta thấy $S_{\Delta ABC}$ không đổi nên $S_{\Delta APQ}$ lớn nhất khi và chỉ khi S_{BPQC} nhỏ nhất, đây là cơ sở để ta làm xuất hiện các biểu thức có liên quan đến BP, CQ.

Ta có AB, PQ, AC lần lượt là các tiếp tuyến tại các điểm D, M, E của (O) nên ta có: $AB \perp OD, PQ \perp OM, AC \perp OE, BD = CE$.

Từ đó ta tính được: $S_{BPQC} = \frac{1}{2}R\ \ BP + PQ + CQ\ \ = \frac{1}{2}R\ \ BD + 2DP + 2EQ + CE$

$= R.\ \ BD + DP + EQ\ \ = R\ \ BP + CQ - BD\ \ .$

Mặt khác ta cũng có: $POQ = \frac{1}{2}DOE = \frac{1}{2}\ \ 180^0 - A\ \ = B = C$ nên suy ra

$BOP = 180^0 - POQ - QOC = 180^0 - QCO - QOC = CQO \Leftrightarrow \Delta BPO \sim \Delta COQ$

$\Rightarrow \frac{BP}{CO} = \frac{BO}{CQ} \Leftrightarrow BP.CQ = BO.CO = \frac{BC^2}{4}$.

Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $BP + CQ \geq 2\sqrt{BP.CQ} = BC \Rightarrow S_{BPQC} \geq R.\ \ BC - BD\ \ $.

Vậy S_{BPQC} nhỏ nhất khi $BP = CQ \Leftrightarrow M$ là trung điểm của cung DE.

hoc360.net