CÁC BÀI TOÁN VỀ QUỸ TÍCH VÀ DỰNG HÌNH

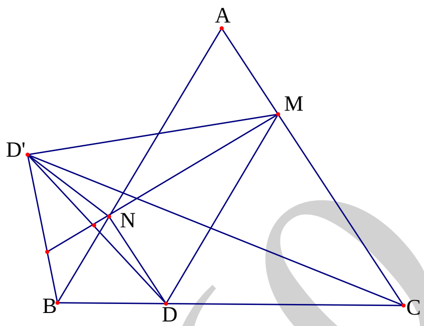
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Khái niệm cung chứa góc giúp chúng ta giải được nhiều bài toán quỹ tích, dựng hình, chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác cân ABC $AB = AC$ và D là một điểm trên cạnh BC. Kẻ $DM//AB$ ($M \in AC$), $DN//AC$ $N \in AB$. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua MN. Tìm quỹ tích điểm D' khi điểm D di động trên cạnh BC.

Lời giải:



Phần thuận: Từ giả thiết đề ra ta thấy $NB = ND = ND'$,(1) do đó ba điểm B, D, D' nằm trên đường tròn tâm N. Từ đó $BD'D = \frac{1}{2}DMC$ (2). Lại có $BND = DMC = BAC$, nên từ (1) và (2) suy ra $BD'C = BAC$ (không đổi). Vì BC cố định, D' nhìn BC dưới một góc BAC không đổi, D' khác phía với D (tức là cùng phía với A so với MN) nên D' nằm trên cung chứa góc BAC vẽ trên đoạn BC (một phần của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Phần đảo: Bạn đọc tự giải.

Kết luận: Quỹ tích của điểm D' là cung chứa góc BAC trên đoạn BC. Đó chính là cung BAC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lưu ý: Quy trình để giải một bài toán quỹ tích như sau:

Để tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn một tính chất T nào đó ta tiến hành các bước

***Phần thuận:** Chỉ ra mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H.

***Phần đảo:** Chứng tỏ rằng mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.

***Kết luận:** Quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H.

Chú ý rằng trong một số bài toán, sau phần thuận, trước phần đảo ta có thể thêm phần giới hạn quỹ tích.

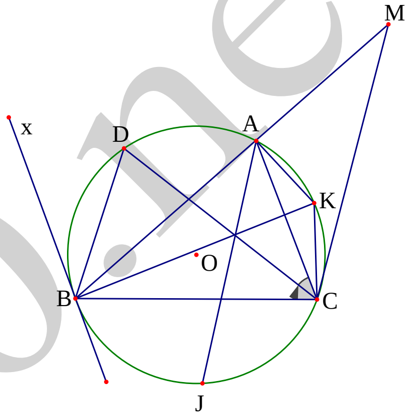
Ví dụ 2. Cho đường tròn O và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn O (A khác B, A khác C). Tia phân giác của ACB cắt đường tròn O tại điểm D khác điểm C. Lấy điểm I thuộc đoạn CD sao cho $DI = DB$. Đường thẳng BI cắt đường tròn O tại điểm K khác điểm B.

a) Chứng minh rằng tam giác KAC cân.

b) Chứng minh đường thẳng AI luôn đi qua một điểm J cố định.

c) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho $AM = AC$. Tìm quỹ tích các điểm M khi A di động trên cung lớn BC của đường tròn O.

Lời giải:



a). Ta có

$$DBK = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}DA + \text{sđ}AK\right);$$

$$\text{sđ}DIB = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}BD + \text{sđ}KC\right)$$

Vì $\text{sđ}BD + \text{sđ}DA$ và ΔDBI cân tại D nên $\text{sđ}KC + \text{sđ}AK$. Suy ra $AK = CK$

hay ΔKAC cân tại K (đpcm).

b) Từ kết quả câu a, ta thấy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên đường thẳng AI luôn đi qua điểm J (điểm chính giữa của cung BC không chứa A). Rõ ràng J là điểm cố định.

c) Phần thuận: Do ΔAMC cân tại A, nên $BMC = \frac{1}{2}BAC$.

Giả sử số đo BAC là 2α (không đổi) thì khi A di động trên cung lớn BC thì M thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn BC về phía điểm O.

Phần đảo: Tiếp tuyến Bx với đường tròn O cắt cung chứa góc α vẽ trên đoạn BC tại điểm X.

Lấy điểm M bất kỳ trên Cx (một phần của cung chứa góc α và vẽ trên đoạn BC $M \neq X; M \neq C$.

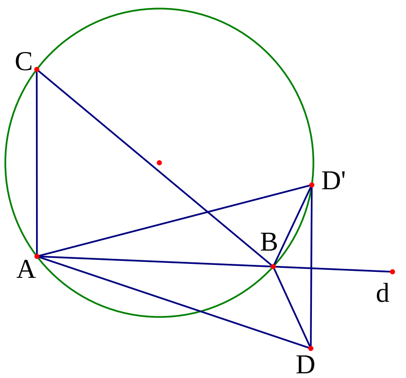
Nếu MB cắt đường tròn O tại A thì rõ ràng A thuộc cung lớn BC của đường tròn O.

Vì $BAC = 2\alpha; AMC = \alpha$ suy ra ΔAMC cân tại A hay $AC = AM$.

Kết luận: Quỹ tích các điểm M là cung Cx, một phần của cung chứa góc α vẽ trên đoạn BC về phía O trừ hai điểm C và X.

Ví dụ 3. Cho trước điểm A nằm trên đường thẳng d và hai điểm C, D thuộc hai nủa mặt phẳng đối nhau bờ d. Hãy dựng một điểm B trên d sao cho $ACB = ADB$.

Lời giải:



***Phân tích:** Giả sử dựng được điểm B trên d sao cho $ACB = ADB$. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua d. Khi đó $ADB = AD'B$, vậy $ACB = AD'B$. Suy ra C và D' cùng nằm trên một nửa cung chứa góc dựng trên đoạn AB. Từ đó ta thấy B là giao điểm của d với đường tròn ngoại tiếp $\Delta ACD'$.

***Cách dựng:** Dựng điểm D' là điểm đối xứng của D qua đường thẳng d.

Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD'.

Dựng giao điểm của B của đường thẳng d với đường tròn ACD'.

***Chứng minh:** Rõ ràng với cách dựng trên, ta có $ACB = AD'B = ADB$.

***Biện luận:** Nếu ba điểm A, C, D không thẳng hàng, hoặc nếu ba điểm này thẳng hàng nhưng CD không vuông góc với d thì bài toán có một nghiệm hình.

\+ Nếu ba điểm A, C, D thẳng hàng và d là đường trung trực của đoạn CD thì bài toán có vô số nghiệm hình.

\+ Nếu ba điểm A, C, D thẳng hàng, $d \perp CD$ nhưng d không phải là đường trung trực của CD thì bài toán không có nghiệm hình.

Lưu ý: Khái niệm cung chứa góc được áp dụng để chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn. Ví dụ để chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn, ta có thể chứng minh hai điểm A và B cùng nhìn CD dưới hai góc bằng nhau. Nói cách khác, nếu một tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì bốn đỉnh của tứ giác đó cùng thuộc một đường tròn.

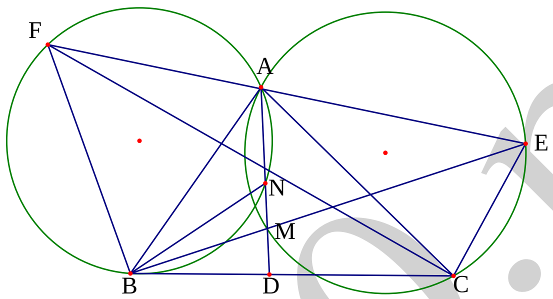
Ví dụ 4. Giả sử AD là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC ($D \in BC$). Trên AD lấy hai điểm M và N sao cho $ABN = CBM$. BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM tại điểm thứ hai E và CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $BCF = ACM$, từ đó suy ra $ACN = BCM$.

Lời giải:



a) Ta có $BFC = BAN$ (cùng chắn cung BN); $BEC = CAN$ (cùng chắn CM), mà $BAN = CAN$, suy ra $BFC = BEC$.

Từ đó bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).

b) Từ kết quả trên, ta có $CFE = NFA$. Do đó hai tia FA và FE trùng nhau nghĩa là ba điểm A, E, F thẳng hàng (đpcm).

c) Vì $BCF = BEF$ và do $ACM = BEF$ nên $BEF = ACM$. Từ đó suy ra $ACM = BCF$, dẫn đến $ACN = BCM$ (đpcm).