

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

b. DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ PHÂN SỐ

h. Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{n+10}{2n-8}$ có giá trị là một số nguyên.

$A = \frac{n+10}{2n-8} \Rightarrow 2A = \frac{2n-8+28}{2n-8} = 1 + \frac{28}{2n-8}$ Để $2A$ nguyên thì $2n - 8$ phải là ước của 28

Ta có bảng đáp số:

$2n - 8$	n	$2A$	A	Kết luận
-28	-10	-1	-1/2	L
-14	-3	-2	-1	TM
-7	1/2	-4	-2	L
-4	2	-7	-7/2	L
-2	3	-14	-7	TM
-1	7/2	-28	-14	L
1	9/2	28	14	L
2	5	14	7	TM
4	6	7	7/2	L
7	15/2	4	2	L
14	11	2	1	TM
28	18	1	1/2	L

Bài 3: Cho phân số: $A = \frac{63}{3n+1}$ với n thuộc số tự nhiên.

- Với giá trị nào của n thì A rút gọn được.
- Với giá trị nào của n thì A là số tự nhiên?

Hướng dẫn:

1 Ta có: $A = \frac{63}{3n+1} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 7}{3n+1}$

Để A rút gọn được $\Leftrightarrow 3n + 1 : 3$ hoặc $3n + 1 : 7$.

TH1: $3n + 1 : 3$ (Vô lý)

TH2: $3n + 1 \vdots 7$. Với $n = 7k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $3n + 1 \vdots 7$.

Kết luận: $n = 7k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) thì phân số $A = \frac{63}{3n+1}$ rút gọn được.

2 Để A là số tự nhiên $\Leftrightarrow 63 \vdots (3n + 1) \Leftrightarrow 3n + 1$ là ước của 63.

$$U(63) = \{1; 3; 7; 9; 21; 63\}$$

$$\begin{cases} 3n + 1 = 1 \\ 3n + 1 = 3 \\ 3n + 1 = 7 \\ 3n + 1 = 9 \\ 3n + 1 = 21 \\ 3n + 1 = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \{n = 2$$

c. DẠNG 2: TÍNH NHANH

i. Bài tập minh họa:

Bài 1: Rút gọn biểu thức sau:

$$\diamond S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

$$3S = 3 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^n}\right)$$

$$3S = 3 + S - \frac{1}{3^n}$$

$$2S = 3 - \frac{1}{3^n}$$

$$S = \frac{3 - \frac{1}{3^n}}{2}$$

$$\diamond A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$$

$$2A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{100}}$$

$$2A = 1 + A - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\diamond C = \left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{4}+1\right)\dots\left(\frac{1}{99}+1\right)$$

$$C = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99} = \frac{100}{2} = 50$$

$$\diamond D = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{899}{30^2}$$

Bài 2: Tính các tổng sau:

$$\color{red}{+} A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{999.1000}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}$$

$$A = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}$$

$$\color{red}{+} B = \frac{1}{1.6} + \frac{1}{6.11} + \dots + \frac{1}{496.501}$$

$$B = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{496} - \frac{1}{501} \right) =$$

$$B = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{501} \right) = \frac{100}{501}$$

$$\color{red}{+} C = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{998.999.1000}$$

Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ta viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau:

Ta xét:

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{2}{1.2.3}; \quad \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} = \frac{2}{2.3.4}; \quad \dots;$$

$$\frac{1}{998.999} - \frac{1}{999.1000} = \frac{2}{998.999.1000}$$

$$\text{Tổng quát: } \frac{1}{n.(n+1)} - \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{2}{n.(n+1).(n+2)}$$

$$2C = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{998.999} - \frac{1}{999.1000} = \frac{1}{1.2} -$$

$$\frac{1}{999.1000}$$

$$2C = \frac{500.999-1}{999.1000} = \frac{4951}{999.1000}$$

$$C = \frac{4951}{999.2000}$$

$$D = \frac{1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+98)}{1.98+2.97+3.96+\dots+98.1}$$

$$D = \frac{1.98+2.97+3.96+\dots+98.1}{1.98+2.97+3.96+\dots+98.1} = 1$$

$$B = \frac{1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 98.1}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99}$$

$$E = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \frac{3}{197} + \dots + \frac{198}{2} + \frac{199}{1}}$$

j. Bài tập tự luyện:

$$\diamond A = \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$A = \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$A = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100}$$

$$\diamond B = 1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n!$$

Ta có : $1! = 2! - 1!$

$2.2! = 3! - 2!$

$3.3! = 4! - 3!$

.....

$n.n! = (n+1)! - n!$

Vậy

$$B = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \dots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$$

$$\diamond C = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{98.99.100}$$

Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ta viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau:

Ta xét:

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{2}{1.2.3}; \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} = \frac{2}{2.3.4}; \dots; \frac{1}{98.99} - \frac{1}{99.100} = \frac{2}{98.99.100}$$

$$\text{Tổng quát: } \frac{1}{n.(n+1)} - \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{2}{n.(n+1).(n+2)}$$

$$C = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{98.99} - \frac{1}{99.100} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{99.100}$$

$$C = \frac{50.99-1}{99.100} = \frac{4951}{99.100}$$

$$\diamond D = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots 9}_{(50 \text{ chữ số } 9)}$$

$$D = 10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \dots + \underbrace{100\dots 0}_{(50 \text{ cs } 0)} - 1$$

$$D = \underbrace{111\dots 10}_{(50 \text{ cs } 1)} - 50.1 = \underbrace{111\dots 1060}_{(48 \text{ cs } 1)}$$

$$\diamond S = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{37.38.39}$$

S = Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ta viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau:

Ta xét:

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{2}{1.2.3}; \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} = \frac{2}{2.3.4}; \dots; \frac{1}{37.38} - \frac{1}{38.39} = \frac{2}{37.38.39}$$

$$\text{Tổng quát: } \frac{1}{n.(n+1)} - \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{2}{n.(n+1).(n+2)}$$

$$C = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38} - \frac{1}{38.39} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{38.39}$$

$$C = \frac{19.39-1}{38.39} = \frac{370}{19.39}$$

$$\diamond B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\diamond D = \frac{100 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}}$$

d. DẠNG 3: CHỨNG MINH BIỂU THỨC

k. Bài tập minh họa:

Bài 1: Chứng minh rằng các phân số sau tối giản:

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{2n-3} \\ & \frac{2n+3}{4n+8} \\ & \frac{3n+2}{5n+3} \end{aligned}$$

Bài 2: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{63} > 2$

Bài 3: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}$

Chứng minh rằng tổng A không phải là số tự nhiên.

Bài 4 : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0 ta đều có:

$$a) \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$$

$$VT = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3n}{2(3n+2)} \right) = \frac{n}{6n+4} = VP \text{ (đpcm)}$$

$$b) \frac{5}{3.7} + \frac{5}{7.11} + \frac{5}{11.15} + \dots + \frac{5}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{5n}{4n+3}$$

$$VT = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right)$$

$$= \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{4n}{3(4n+3)} = \frac{5n}{3(4n+3)}$$

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$ ta có:

$$\frac{3}{9.14} + \frac{3}{14.19} + \frac{3}{19.24} + \dots + \frac{3}{(5n-1)(5n+4)} < \frac{1}{15}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có VT} &= \frac{3}{5} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{5n-1} - \frac{1}{5n+4} \right) \\ &= \frac{3}{5} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{5n+4} \right) < \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{15} \Rightarrow \text{đpcm} \end{aligned}$$

Bài 6: Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}$. Chứng minh $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$

$$\begin{aligned} A &> \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{9.10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \\ &(2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) \Rightarrow đpcm

Bài 7: Tổng $\frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{99}$ bằng phân số $\frac{a}{b}$. Chứng minh rằng a chia hết cho 149.

I. Bài tập tự luyện:

Bài 8: Cho $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2}$. Chứng minh: $A < \frac{1003}{2008}$

$$\text{Ta có: } \frac{2}{(2n+1)^2} < \frac{2}{2n.(2n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}$$

Thay $n = 1, 2, 3, \dots, 1003$

$$\text{Ta có: } A < \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 9: Cho $B = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{2006^2}$. Chứng minh: $B < \frac{334}{2007}$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}; \frac{1}{6^2} < \frac{1}{5.6}; \dots; \frac{1}{2006^2} < \frac{1}{2005.2006}$$

$$a) B = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2006^2} < \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{2005.2006}$$

Bài 10: Cho $C = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng minh $C > 48$

C có 49 số hạng

$$\text{Ta có: } C - 49 = -\left(1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{8}{9} + 1 - \frac{15}{16} + \dots + 1 - \frac{2499}{2500}\right)$$

$$b) C - 49 = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2500}\right)$$

$$c) C = 49 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2500}\right) = 49 - D$$

$$\text{Xét } D = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2500} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$$

$$D < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{48.49} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{48} - \frac{1}{49} = 1 - \frac{1}{49} < 1$$

$$D < 1 \Rightarrow 49 - D > 49 - 1 = 48$$

$$d) C > 48 \text{ (đpcm)}$$

Bài 11: Cho $M = \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+59}$. Chứng minh $M < \frac{2}{3}$

$$\text{Áp dụng công thức: } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M = \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{59.60} = 2\left(\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{59.60}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots + \frac{1}{59} - \frac{1}{60}\right) = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{60}\right) = 2 \cdot \frac{19}{60} = \frac{19}{30} < \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$e) M < \frac{2}{3} \text{ (đpcm)}$$

Bài 12: Cho $A = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{18.19.20}$. Chứng minh $A < \frac{1}{4}$

Áp dụng phương pháp khử liên tiếp ta viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau:

Ta xét:

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{2}{1.2.3}; \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} = \frac{2}{2.3.4}; \dots; \frac{1}{18.19} - \frac{1}{19.20} = \frac{2}{18.19.20}$$

$$\text{Tổng quát: } \frac{1}{n.(n+1)} - \frac{1}{(n+1).(n+2)} = \frac{2}{n.(n+1).(n+2)}$$

$$\text{Do đó: } 2A = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{18.19.20}$$

$$= \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{18.19} - \frac{1}{19.20} \right)$$

$$= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{19.20} = \frac{189}{380}$$

$$f) A = \frac{189}{760} < \frac{190}{760} = \frac{1}{4} \text{ (đpcm)}$$

Bài 13: Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}; n > 1$ ta có:

$$A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$$

$$A < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$

Nhận xét: mỗi số hạng tổng có dạng:

$$\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

Từ đó suy ra:

$$A < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n.(n+1)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n.(n+1)} \right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ (đpcm)}$$

Bài 14: Cho $C = \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots + \frac{5}{4^{99}}$. Chứng minh: $C < \frac{5}{3}$

Hướng dẫn giải:

$$\Leftrightarrow C = \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots + \frac{5}{4^{99}}$$

$$\Leftrightarrow 4C = \frac{5}{1} + \frac{5}{4^1} + \frac{5}{4^2} + \dots + \frac{5}{4^{98}}$$

$$\Leftrightarrow 3C = 5 - \frac{5}{4^{99}}$$

$$\Leftrightarrow C < \frac{5}{3}$$

Bài 15: Cho $E = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh: $E < \frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải:

$$E = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Leftrightarrow 3E = \frac{1}{1} + \frac{2}{3^1} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{100}{3^{99}}$$

$$\Leftrightarrow 2E = \frac{1}{1} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{100}{3^{99}} - \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Leftrightarrow 2E = 1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 6E = 3 + 1 + \frac{1}{3^1} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$4E = 3 - \frac{101}{3^{99}} + \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{3}{4} - \left(\frac{101.3 - 100}{3^{100}} \right) < \frac{3}{4}$$

Bài 16: Cho $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{199}{200}$. (1) Chứng minh: $C^2 < \frac{1}{201}$

Biểu thức C là tích của 100 phân số nhỏ hơn 1, trong đó các tử đều lẻ, các mẫu đều chẵn. Ta đưa ra biểu thức trung gian là một tích các phân số mà các tử đều chẵn, các mẫu đều lẻ. Thêm 1 vào tử và mẫu của mỗi phân số của A, giá trị mỗi phân số tăng thêm, do đó:

$$C < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{200}{201} \quad (2)$$

Nhân (1) với (2) theo từng vế ta được:

$$C^2 < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{199}{200} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{200}{201} \right)$$

Vế phải của bất đẳng thức trên bằng $\frac{1}{201}$

$$\text{Vậy } C^2 < \frac{1}{201} \text{ (đpcm)}$$

✚ DẠNG 4: TÌM X

m. Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm x, biết rằng: $\frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \frac{1}{11.14} + \cdots + \frac{1}{x.(x+3)} = \frac{101}{1540}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \cdots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{101}{1540}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{101}{1540}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{x+3} = \frac{101}{1540} \cdot 3 = \frac{303}{1540}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5} - \frac{303}{1540} = \frac{1}{308}$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 308$$

$$\Leftrightarrow x = 305$$

Bài 2: Tìm x, biết rằng: $x - \left(\frac{50x}{100} + \frac{25x}{200} \right) = 11\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3x}{8} = \frac{45}{4}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 90$$

$$\Leftrightarrow x = 18$$

Bài 3: Tìm x, biết rằng: $(x-5) \cdot \frac{30}{100} = \frac{200x}{100} + 5$

$$\Leftrightarrow (x-5) \cdot 30 = 200x + 500$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \cdot 3 = 20x + 50$$

$$\Leftrightarrow 3x - 15 = 20x + 50$$

$$\Leftrightarrow 17x = -65$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{65}{17}$$

Bài 4: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x = 820$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{2} = 820$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) = 1640 = 40 \cdot 41$$

Vậy $x = 40$

✚ DẠNG 5: SO SÁNH PHÂN SỐ

✚ Bài tập minh họa:

Bài 1: Cho $A = \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1}$ và $B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1}$

So sánh A và B?

Ta có:

$$10A = \frac{10^{2005} + 10}{10^{2005} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2005} + 1}$$

$$10B = \frac{10^{2006} + 10}{10^{2006} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2006} + 1}$$

Vì $\frac{9}{10^{2005} + 1} > \frac{9}{10^{2006} + 1}$ nên $10A > 10B$, do đó $A > B$.

Bài 2: Cho $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$ và $B = 1.2.3 \dots 11$

So sánh A và B?

$$\text{Ta có: } A = \frac{(1+1000).1000}{2} < 10^3.10^3 = 10^6$$

$$B = (2.5).(3.4).(6.7).(8.9).10.11 > 10^6$$

Vậy $A < B$

Bài 3: So sánh $L = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{20}\right)$ với $\frac{1}{21}$

$$\text{Ta có: } L = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{19}{20} = \frac{1}{20} > \frac{1}{21}$$

Vậy $L > \frac{1}{21}$

Bài 4: So sánh $M = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right)$ với $\frac{11}{19}$

Ta có:

$$M = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} = \frac{1.3.2.4.3.5 \dots 8.10.9.11}{2^2.3^2.4^2 \dots 9^2.10^2} = \frac{(1.2.3 \dots 9).(3.4 \dots 11)}{(1.2.3 \dots 10)(1.2.3 \dots 10)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{11}{2} = \frac{11}{20} < \frac{11}{19}$$

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$ và $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$

So sánh A và B?

Ta có:

$$10A = \frac{10^{16}+10}{10^{16}+1} = 1 + \frac{9}{10^{16}+1}$$

$$10B = \frac{10^{17}+10}{10^{17}+1} = 1 + \frac{9}{10^{17}+1}$$

Vì $\frac{9}{10^{16}+1} > \frac{9}{10^{17}+1}$ nên $10A > 10B$, do đó $A > B$.

Bài 2: Cho $A = \frac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1}$ và $B = \frac{10^{1993}+1}{10^{1992}+1}$

So sánh A và B?

Áp dụng tính chất: nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}$ ($m > 0$)

Vì $B > 1$ nên

$$B = \frac{10^{1993}+1}{10^{1992}+1} > \frac{10^{1993}+1+9}{10^{1992}+1+9} = \frac{10^{1993}+10}{10^{1992}+10} = \frac{10 \cdot (10^{1992}+1)}{10 \cdot (10^{1991}+1)} = \frac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1} = A$$

Vậy $A < B$

Bài 3: So sánh $U = \frac{1.3.5.7.....39}{21.22.23.....40}$ và $V = \frac{1}{2^{20}-1}$

Ta có: $U = \frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.27.29.31.33.35.37.39}{21.2.11.23.3.2^3.25.2.13.27.7.2^2.29.2.15.31.2^5.33.2.17.35.9.2^2.37.2.19.39.5.2^3}$

$$U = \frac{1}{2 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2^5 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2^3} = \frac{1}{2^{20}}$$

Vì $\frac{1}{2^{20}} < \frac{1}{2^{20}-1} \Rightarrow U < V$

Bài 4: So sánh:

- a. 63^7 và 16^{12}
 $63^7 < 64^7 = (8^2)^7 = 8^{14}$

$$16^{12} = (2^4)^{12} = 2^{48} = 2^{3 \cdot 16} = (2^3)^{16} = 8^{16}$$

$$8^{14} < 8^{16} \text{ nên } 63^7 < 16^{12}$$

b. $\left(\frac{1}{32}\right)^7$ và $\left(\frac{1}{16}\right)^9$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^7 = \left(\frac{1}{2^5}\right)^7 = \frac{1}{2^{35}}$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^9 = \left(\frac{1}{2^4}\right)^9 = \frac{1}{2^{36}}$$

Ta có : $2^{35} < 2^{36}$ nên $\frac{1}{2^{35}} > \frac{1}{2^{36}} \Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^7 > \left(\frac{1}{16}\right)^9$

c. $\left(\frac{1}{243}\right)^9$ và $\left(\frac{1}{83}\right)^{13}$

$$\left(\frac{1}{3^5}\right)^9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{45} \text{ và } \left(\frac{1}{83}\right)^{13} < \left(\frac{1}{81}\right)^{13} = \left(\frac{1}{3^4}\right)^{13} = \left(\frac{1}{3}\right)^{52}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{45} > \left(\frac{1}{3}\right)^{52} \Rightarrow \left(\frac{1}{243}\right)^9 > \left(\frac{1}{83}\right)^{13}$$

d. 5^{299} và 3^{501}

$$5^{299} < 5^{300} = (5^3)^{100} < (3^5)^{100} = 3^{500} < 3^{501}$$

Vậy $5^{299} < 3^{501}$

e. 3^{23} và 5^{15}

$$3^{23} = 9 \cdot (3^3)^7 > 5 \cdot (5^2)^7 = 5^{15}$$

f. 127^{23} và 513^{18}

$$127^{23} < 128^{23} = (2^7)^{23} = 2^{161}$$

$$513^{18} > 512^{18} = (2^9)^{18} = 2^{162}$$

Vì $2^{162} > 2^{161}$ nên $513^{18} > 127^{23}$

g. $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10}

$$1990^9 \cdot (1990+1) = 1991 \cdot 1990^9$$

$$1991^{10} = 1991 \cdot 1991^9$$

Vì $1991^9 > 1990^9$ nên $1991 \cdot 1991^9 > 1991 \cdot 1990^9 \Rightarrow 1991^{10} > 1990^{10} + 1990^9$

h. 3^{500} và 7^{300}

$$3^{500} = 3^{5 \cdot 100} = (3^5)^{100} = 243^{100}$$

$$7^{300} = 7^{3 \cdot 100} \cdot (7^3)^{100} = (343)^{100}$$

Vì $243^{100} < 343^{100} \Rightarrow 3^{500} < 7^{300}$

i. 99^{20} và 9999^{10}

$$99^{20} = (99^2)^{10} = (99.99)^{10} = 99^{10} \cdot 99^{10}$$

$$9999^{10} = (101.99)^{10} = 101^{10} \cdot 99^{10}$$

$$\text{Vì } 101 > 99 \text{ nên } 101^{10} > 99^{10}$$

$$\Rightarrow 101^{10} \cdot 99^{10} > 99^{10} \cdot 99^{10}$$

$$\text{Vậy } 9999^{10} > 99^{20}$$

j. 202^{303} và 303^{202}

$$\text{Vì } 202^{303} = (2.101)^{3.101} = (2^3 \cdot 101^3)^{101} = (8.101.101^2)^{101} = (808.101^2)^{101}$$

$$\text{Và } 303^{202} = (3.101)^{2.101} = (3^2 \cdot 101^2)^{101} = (9.101^2)^{101}$$

$$\text{Mà } (808.101^2)^{101} > (9.101^2)^{101} \text{ nên } 202^{303} > 303^{202}$$

✚ DẠNG 5: TÌM GIÁ TRỊ THỎA MÃN BIỂU THỨC

Bài 1: Tìm các số tự nhiên x và y sao cho:

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{y} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Đkxd : } y \neq 0$$

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{y} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy-12}{3y} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5xy - 60 = 3y$$

$$\Leftrightarrow y(5x - 3) = 60$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{60}{5x-3}$$

Vì y là số tự nhiên nên $5x - 3$ phải là ước của 60

Vì x cũng là số tự nhiên nên giá trị của x thỏa mãn là $x = 1; x = 3$

Vậy $x = 3, y = 5; x = 1, y = 30$

$$\frac{4}{x} - \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$$

Đkxd: $x \neq 0$

$$\frac{4}{x} - \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12-xy}{3x} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 24 - 2xy = 5x$$

$$\Leftrightarrow x(5 + 2y) = 24$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{24}{5+2y}$$

Vì x là số tự nhiên nên $5 + 2y$ là ước của 24, vì y cũng là số tự nhiên nên không có giá trị nào của x, y thỏa mãn.

Bài 2: Tìm các số nguyên x và y sao cho:

$$\frac{5}{x} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$$

Đkxd: $x \neq 0$

$$\frac{5}{x} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{30-2xy}{6x} = \frac{x}{6x}$$

$$\Leftrightarrow x+2xy=3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{30}{1+2y}$$

x nguyên nên $2y + 1$ là ước lẻ của 30. Ta có:

$2y+1$	1	-1	3	-3	5	-5	15	-15
$2y$	0	-2	2	-4	4	-6	14	-16
y	0	-1	1	-2	2	-3	7	-8
x	30	-30	10	-10	6	-6	2	-2

$$\frac{x}{6} - \frac{2}{y} = \frac{1}{30}$$

Đkxd: $y \neq 0$

$$\frac{x}{6} - \frac{2}{y} = \frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy-12}{6y} = \frac{1}{30}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5xy-60}{30y} = \frac{y}{30y}$$

$$\Leftrightarrow 5xy - 60 = y$$

$$\Leftrightarrow 5xy - y = 60$$

$$\Leftrightarrow y(5x - 1) = 60$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{60}{5x-1}$$

Vì y là số nguyên nên $5x - 1$ phải là ước của 60 và chia cho 5 thiếu 1. Ta có:

$5x - 1$	-1	4	-6
$5x$	0	5	-5
x	0	1	-1
y	-60	15	-10