HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

❖ DẠNG 1: SO SÁNH HAI SỐ

Bài vận dụng:

❖ 107^{50} và 73^{75}

$107^{50} < 108^{50} = (4.27)^{50} = 2^{100}.\,3^{150}$ (1)

$73^{75} > 72^{75} =(8.9)^{75} = 2^{225}.3^{150}$ (2)

Mà $2^{100}.3^{150} < 2^{225}.\,3^{150}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $107^{50} < 73^{75}$

❖ 2^{91} và 5^{35}

$2^{91} = (2^{13})^7 = 8192^7$

$5^{35} = (5^5)^7 = 3125^7$

$\Rightarrow 2^{91} > 5^{35}$

❖ 54^4 và 21^{12}

Có $54^4 = (2.27)^4 = (2.3^3)^4 = 2^4.3^{12}$

$21^{12} = (3.7)^{12} = 3^{12}.7^{12}$

$7^{12} > 2^4 \Rightarrow 54^4 < 21^{12}$

❖ 199^{20} và 2003^{15}

$199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = 2^{60}.5^{40}$

$2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = 2^{60}.5^{45}$

Vì $2^{60}.5^{45} > 2^{60}.5^{40}$ nên $2003^{15} > 199^{20}$

❖ 3^{39} và 11^{21}

$3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$

$11^{21} > 11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10}$

Mà $121^{10} > 81^{10} \Rightarrow 11^{21} > 3^{39}$

❖ 9^8 và 8^9

$9^8 < 10^8 = 100^4 = 100.100^3$

$8^9 = 512^3 > 500^3 = 5^3.100^3 = 125.100^3$

$\Rightarrow 8^9 > 9^8$

❖ 333^{444} và 444^{333}

$333^{444} = (3.111)^{4.111} = (3^4.111^4)^{111} = 8991^{111}.111^{333}$

$444^{333} = (4.111)^{3.111} = (4^3.111^3)^{111} = 64^{111}.111^{333}$

Mà $8991^{111}.111^{333} > 64^{111}.111^{333}$ nên $333^{444} > 444^{333}$

b. DẠNG 2: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC:

- **Bài tập minh họa:**

Bài 1:

- Cho biểu thức: $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{100}$ và $B = 3^{101} - 1$. Chứng minh rằng: A < B.

  Ta có: $A + 1 = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{100} = \frac{3^{101}-1}{3-1} = \frac{3^{101}-1}{2}$

- $A = \frac{3^{101}-1}{2} - 1 = \frac{3^{101}-3}{2} < B = 3^{101} - 1$ (đpcm).
- Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{99}$, $B = 4^{100}$. Chứng minh rằng: A < B/3

  $A = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{99} = \frac{4^{100}-1}{4-1} = \frac{4^{100}-1}{3} < \frac{4^{100}}{3} = \frac{B}{3}$

- Cho $H = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 99^2 + 100^2$ và B = 10100. Chứng minh rằng H > B

  $H = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 99^2 + 100^2 = \frac{100.(100+1).(2.100+1)}{6} = \frac{100.101.201}{6}$

  = 338350 > 10100.

  Vậy H > B (đpcm)
- Cho $E = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 999.1000$ và B = 111111000. Chứng minh rằng E > B.

  $E = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 999.1000 = \frac{(1000-1).1000.(1000+1)}{3} =$

  $\frac{999.1000.1001}{3} = 333333000 > 111111000 = B$

  Vậy E > B

Bài 2: Cho $E = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{100^2}$.

Chứng minh rằng: $E < \frac{3}{4}$

Giải:

Giữ nguyên phân số $\frac{1}{2^2}$, còn các phân số sau thay bằng các phân số lớn hơn, ta có:

$E < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} + F$

F = $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$

Do đó: E $< \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} < \frac{3}{4}$ (ĐPCM)

Bài 3: Cho $C = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.....\frac{199}{200}$. Chứng minh: $C^2 < \frac{1}{201}$

Giải:

Biểu thức C là tích của 100 phân số nhỏ hơn 1, trong đó các tử đều lẻ, các mẫu đều chẵn. Ta đưa ra biểu thức trung gian là một tích các phân số mà các tử đều chẵn, các mẫu đều lẻ. Thêm 1 vào tử và mẫu của mỗi phân số của A, giá trị mỗi phân số tăng thêm, do đó:

C $< \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7} \ldots .\frac{200}{201}$ (2)

Nhân (1) với (2) theo từng vế ta được:

$C^2 < (\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6} \ldots .\frac{199}{200}).(\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7} \ldots .\frac{200}{201})$

Vế phải của bất đẳng thức trên bằng $\frac{1}{201}$

Vậy $C^2 < \frac{1}{201}$ (đpcm)

Bài 4: Cho A = $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{100}-1}$. Chứng minh rằng:

- A < 100

  Để chứng tỏ A < 100, ta chia A thành 100 nhóm:

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{15}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \cdots + \frac{1}{2^{100}-1}\right)$$

Thay mỗi phân số trong dấu ngoặc bằng phân số lớn hơn tronh dấu ngoặc đó, ta được:

$$A < 1 + \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{4}.4 + \frac{1}{8}.8 + \ldots + \frac{1}{2^{99}}.2^{99} = 100$$

- A > 50

Để chứng tỏ rằng A > 50, ta thêm và bớt $\frac{1}{2^{100}}$ rồi viết A dưới dạng sau:

$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{2^4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{99}+1} + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$

Thay các phân số trong mỗi dấu ngoặc bằng phân số nhỏ nhất trong dấu ngoặc đó, ta được:

$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}.2 + \frac{1}{2^3}.2^2 + \ldots + \frac{1}{2^{100}}.2^{99} - \frac{1}{2^{100}} = 1 + \frac{1}{2}.100 - \frac{1}{2^{100}} > 50$

Bài 5: Chứng minh rằng: $A = \frac{9}{10!} + \frac{9}{11!} + \frac{9}{12!} + \ldots + \frac{9}{1000!} < \frac{1}{9!}$

Giải:

$A < \frac{10-1}{10!} + \frac{11-1}{11!} + \frac{12-1}{12!} + \ldots + \frac{1000-1}{1000!}$

$= \frac{1}{9!} - \frac{1}{10!} + \frac{1}{10!} - \frac{1}{11!} + \frac{1}{11!} - \frac{1}{12!} + \ldots + \frac{1}{999!} - \frac{1}{1000!}$

$= \frac{1}{9!} - \frac{1}{1000!} < \frac{1}{9!}$ (đpcm).

Bài 6: Cho $C = \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \ldots + \frac{5}{4^{99}}$. Chứng minh: $C < \frac{5}{3}$

Giải:

Ta có:

$C = \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \ldots + \frac{5}{4^{99}}$

<=> $4C = \frac{5}{1} + \frac{5}{4^1} + \frac{5}{4^2} + \ldots + \frac{5}{4^{98}}$

<=> $3C = \frac{5}{1} - \frac{5}{4^{98}}$

<=> $C = \frac{5}{3} - \frac{5}{3.4^{98}}$

<=> $C < \frac{5}{3}$

Bài 7: Cho $G=\frac{5}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{11}{3^3}+...+\frac{302}{3^{100}}$. Chứng minh: $2\frac{5}{9}<G<3\frac{1}{2}$

Bài 8: So sánh $L=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{20}\right)$ với $\frac{1}{21}$

Giải:

$L=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\dots.\frac{19}{20}=\frac{1}{20}>\frac{1}{21}$

Bài 9: Cho $C=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+...+\frac{1}{200}$. Chứng minh rằng:

- $C>\frac{7}{12}$

Ta chọn biểu thức D làm trung gian sao cho C > D, còn D > $\frac{7}{12}$. Tách C thành hai nhóm, mỗi nhóm có 50 phân số, rồi thay mỗi phân số trong từng nhóm bằng phân số nhỏ trong nhóm đấy, ta được:

$C=\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{150}\right)+\left(\frac{1}{151}+\frac{1}{152}+\cdots+\frac{1}{200}\right)>\frac{1}{150}.50+\frac{1}{200}.50=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ (đpcm).

- $C>\frac{5}{8}$

Tách C thành 4 nhóm rồi cũng làm như trên ta được:

$C>\frac{25}{125}+\frac{25}{150}+\frac{25}{175}+\frac{25}{200}=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{8}=\frac{107}{210}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

b) Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho $C=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+...+\frac{1}{70}$. Chứng minh rằng: $\frac{4}{3}<C<2,5$

Giải:

Ta tách C thành 3 nhóm:

C=$\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{30}\right)$+$\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{50}\right)$+ $\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{70}\right)$

C > $\frac{1}{30}$.20 + $\frac{1}{50}$.20 + $\frac{1}{70}$.20 = $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}$ = $1\frac{37}{105}$ = $1\frac{1}{3}$ = $\frac{4}{3}$ (1)

Tiếp tục, ta tách tổng C thành 6 nhóm:

C=$\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$+$\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\cdots+\frac{1}{30}\right)$+$\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{40}\right)$+$\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{42}+\cdots+\frac{1}{50}\right)$+$\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{60}\right)$+$\left(\frac{1}{61}+\cdots+\frac{1}{70}\right)$

C < $\frac{1}{11}$.10 + $\frac{1}{21}$.10 + $\frac{1}{31}$.10 + $\frac{1}{41}$.10 + $\frac{1}{51}$.10 + $\frac{1}{61}$.10

C < 1 + $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ = 1 + $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$+$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ < 2 + 0,5 = 2,5 (2)

Từ (1) và (2) => $\frac{4}{3}<C<2{,}5$ đpcm

Bài 2: Chứng minh rằng: $A=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{100!}<1$

Giải:

Ta có: $\frac{1}{2!}=\frac{1}{1.2}$; $\frac{1}{3!}=\frac{1}{2.3}$; $\frac{1}{4!}<\frac{1}{3.4}$; …; $\frac{1}{100!}<\frac{1}{99.100}$

A < $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{99.100}$ = 1 - $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

= 1 - $\frac{1}{100}$ < 1

Vậy A < 1 (đpcm).

Bài 3: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}$

Chứng minh rằng: 0,2 < A < 0,4.

Giải:

A = $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right)$

Biểu thức trong dấu ngoặc thứ nhất = $\frac{13}{60} > \frac{12}{60} = 0.2$

Để chứng minh A < $\frac{2}{5}$ ta viết:

A = $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{98}\right) - \frac{1}{99}$

Biểu thức trong dấu ngoặc thứ nhất < $\frac{2}{5}$, còn các dấu ngoặc trong biểu thức đều dương, do đó A < $\frac{2}{5}$.

Bài 4: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$

Giải:

A = $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{100^2} = \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{50^2}\right) < \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{49.50}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + 1 - \frac{1}{50}\right) < \frac{1}{2}$. (đpcm)

Bài 5: Cho $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \ldots + \frac{2}{2007^2}$. Chứng minh: $A < \frac{1003}{2008}$

Giải:

Ta có: $\frac{2}{(2n+1)^2} < \frac{2}{2n.(2n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}$

Thay n = 1, 2, 3, …, 1003

Ta có: A < $\frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$ (đpcm)

b) DẠNG 3: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

b) Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức A = $\frac{14-x}{4-x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

A = $\frac{(4-x)+10}{4-x}$ = 1 + $\frac{10}{4-x}$

Để A_{max} ⇔ $\frac{10}{4-x}$ $_{max}$

TH1: 4 – x < 0 thì $\frac{10}{4-x}$ < 0 (loại)

TH2: 4 – x > 0 ⇔ x < 4 thì $\frac{10}{4-x}$ $_{max}$ ⇔ $(4 - x)_{min}$ ⇔ x_{max} ⇔ x = 3

Vậy khi x = 3 thì A_{max} = 11

Bài 2: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức A = $\frac{7-x}{x-5}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

A = $\frac{7-x}{x-5}$ = $\frac{(5-x)+2}{x-5}$ = $\frac{2}{x-5}$ -1

Để A_{max} thì $\frac{2}{x-5}$ $_{max}$

TH1: x – 5 < 0 <=> x < 5 => $\frac{2}{x-5}$ < 0 (loại)

TH2: x – 5 > 0 ⇔ x > 5. Để $\frac{2}{x-5}$ $_{max}$ thì $(x - 5)_{min}$ mà x nguyên nên x = 6

Vậy x = 6 thì A_{max} = 1

Bài 3: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức A = $\frac{x-13}{x+3}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

A = $\frac{x-13}{x+3} = \frac{(x+3)-16}{x+3} = 1 - \frac{16}{x+3}$

Để A_{min} thì $\frac{16}{x+3}$ $_{max}$ => (x + 3) $_{min}$ ⇔ x $_{min}$

Nếu x + 3 < 0 thì không tìm được giá trị A nhỏ nhất

Nếu x + 3 > 0 ⇔ x > -3 mà x nguyên nên $(x + 3)_{min}$ khi x = -2

Vậy A_{min} = -15 khi x = -2

Bài 4: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức A = $\frac{2x+4}{x+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

A = $\frac{2x+4}{x+1} = \frac{2x+2+2}{x+1} = 2 + \frac{2}{x+1}$

Amin ⇔ $\frac{2}{x+1}$ min

TH1: Nếu x + 1 > 0 <=> x > -1 => $\frac{2}{x+1} > 0$ không thỏa mãn.

TH 2:

Nếu x + 1 < 0 <=> x < -1 => $\frac{2}{x+1} < 0$

$\frac{2}{x+1}$ min <=> x + 1 = -1 <=> x = -2 => Amin = 0

Bài 5: Tìm các số tự nhiên a và b nhỏ nhất sao cho $a^7 = b^8$

Giải:

Ta có : $a^7 = b^8$ (1) => b = $\frac{a^7}{b^7} = \left(\frac{a}{b}\right)^7$.

Do b là số tự nhiên nên a ⋮ b, đặt a = b.k (k ∈ N)

Do b > 1 nên $\frac{a}{b}$ > 1, do đó k ≥ 2 (2)

Thay a = b.k vào (1):

$b^7k^7 = b^8 \Rightarrow k^7 = b$ (3)

Từ (2) và (3) : $b \geq 2^7$

Giá trị nhỏ nhất của b là 2^7. Khi đó k = 2; $a = b.k = 2^7.2 = 2^8$

Đáp số $a = 2^8$, $b = 2^7$

Bài 6: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho ta có cách thêm n chữ số vào sau số đó để được số chia hết cho 39.

Giải:

Xét n = 1. Không có cách nào thêm một chữ số vào đằng sau chữ số 1 đề được một số chia hết cho 39

Xét n = 2 tồn tại cách thêm hai chữ số vào đăng sau chữ số 2 để được số chia hết cho 39, chẳng hạn như 234 ⋮ 39.

Vậy n = 2

Bài 7: Viết số 72 thành tổng của hai số mà BCNN của chúng có giá trị lớn nhất.

Giải:

Viết 72 thành tổng hai số, có các cách sau:

$$36 + 36;\ 35 + 37;\ 34 + 38;\ \ldots;\ 2 + 70;\ 1 + 71.$$

Ta thấy:

$$[36, 36] = 36,\ [35, 37] = 35.37,\ [34, 38] < 34.38\ldots$$

$$[2, 70] > 2.70,\ [1, 71] = 1.71$$

Ta sẽ chứng minh rằng 35.37 > 34.38 > … > 2.70 > 1.71. muốn vậy chỉ cần chứng tỏ rằng nếu b > a thì ab > (a – 1)(b + 1). Thật vậy, ta có:

$(a - 1)(b + 1) = a(b + 1) + (b + 1) = ab + a - b - 1 = ab - (b - a) - 1 < ab$.

Vậy [35, 37] có giá trị lớn nhất.

Bài 8: Cho dãy số tự nhiên 1, 2, 3, 4, …, 50.

- Tìm hai số thuộc dãy trên sao cho ƯCLN của chúng đạt giá trị lớn nhất.
- Tìm hai số thuộc dãy trên sao cho BCNN của chúng đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Gọi a và b là hai số bất kì thuộc dãy 1, 2, 3, …, 50. Giả sử a > b

- Gọi d ∈ ƯC (a, b) thì a – b ⋮ d. Ta sẽ chứng minh d ≤ 25.
  Thật vậy, giả sử d > 25 thì b > 25. Ta có a ≤ 50 mà b > 25 nên 0 < a – b < 25, không thể xảy ra a – b ⋮ d.
  d = 25 xảy ra khi a = 50; b = 25.
  Vậy hai số có ƯCLN đạt giá trị lớn nhất là 50 và 25.
- BCNN (a,b) ≤ a.b ≤ 50.49 = 2450.
  Vậy hai số có BCNN đạt giá trị lớn nhất là 50 và 49.

b) Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức A = $\frac{1}{4+x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Để A_{max} thì $(4 + x)_{min}$.

TH1: x + 4 < 0 <=> x < -4 => $\frac{1}{x+4}$ < 0 (loại)

TH2: x +4 > 0 ⇔ x > -4. Để $\frac{1}{x+4}$ $_{max}$ thì $(x + 4)_{min}$ mà x nguyên nên x = -3

Vậy x = -3 thì A_{max} = 1

Bài 2: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức A = $\frac{5x-19}{x-4}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Ta có: A = $\frac{5x-19}{x-4} = \frac{(5x-20)+1}{x-4} = 5 + \frac{1}{x-4}$.

Để A_{max} thì $(x - 4)_{min}$.

TH1: x - 4 < 0 <=> x < 4 => $\frac{1}{x-4}$ < 0 (loại)

TH2: x - 4 > 0 ⇔ x > 4. Để $\frac{1}{x-4}{}_{max}$ thì $(x - 4)_{min}$ mà x nguyên nên x – 4 = 1

<=> x = 5

Vậy x = 5 thì A_{max} = 6.

Bài 3: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức A = $\frac{10x + 25}{2x + 4}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Ta có: A = $\frac{10x + 25}{2x + 4} = \frac{(10x + 20) + 5}{2x + 4}$ = 5 + $\frac{5}{2x + 4}$

Để A_{min} thì $(2x + 4)_{max}$.

TH1: 2x + 4 > 0 <=> x > -2 => $\frac{5}{2x+4}$ > 0 (loại)

TH2: 2x + 4 < 0 ⇔ x < -2. Để $\frac{5}{2x+4}{}_{min}$ thì $(2x + 4)_{max}$ mà x là số nguyên

<=> 2x + 4 = -2

<=> x = -3

Vậy x = -3 thì $A_{min} = \frac{5}{2}$

Bài 4: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức A = $\frac{3x + 7}{x-1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

A = $\frac{3x + 7}{x-1} = \frac{3x-3+10}{x-1}$ =3 + $\frac{7}{x-1}$

Để A_{min} thì $(x - 1)_{max}$.

TH1: x - 1 < 0 <=> x < 1 => $\frac{7}{x-1}$ < 0 (loại)

TH2: x - 1 > 0 ⇔ x > 1. Để $\frac{7}{x-1}$ $_{min}$ thì $(x - 1)_{max}$ mà x nguyên nên x = 2

Vậy x = 2 thì A_{min} = 10

Bài 5: Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 15, ta được: A = 1234…1415

Hãy xóa đi 15 chữ số của số A để các chữ số còn lại (vẫn giữ nguyên thứ tự như trước) tạo thành:

- Số lớn nhất
- Số nhỏ nhất

Giải:

Số A có 21 chữ số, sau khi xóa đi 15 chữ số thì còn lại 6 chữ số $\overline{abcdeg}$.

a) Để được số lớn nhất, ta chọn a = 9 (của số 9). Sau chữ số 9, còn lại dãy chữ số: 101112131415.
Để chọn b ta bớt lại bốn chữ số cuối, còn lại 10111213, chọn chữ số lớn nhất là 3.
Sau chữ số 3 còn lại 1415, đoc chính là $\overline{cdeg}$.
Vậy số lớn nhất phải tìm là: 931415.

b) Để được số nhỏ nhất, ta lần lượt chọn a, b, …(a, b có thể bằng 0) là chữ số nhỏ nhất có thể được. Bằng cách giải tương tự như câu a, ta được: 011111.

Bài 6: Tìm các phân số có tử và mẫu đều dương sao cho tổng của phân số đó với nghịch đảo của nó có giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Gọi phân số phải tìm là $\frac{a}{b}$. Phân số này phải khác 0, nghịch đảo của nó là $\frac{b}{a}$. Không mất tính tổng quát, giả sử a ≥ b, ta đặt a = b + m với m ≥ 0.

Ta có: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{b+m}{b} + \frac{b}{b+m} = 1 + \frac{m}{b} + \frac{b}{b+m} \geq 1 + \frac{m}{b+m} + \frac{b}{b+m} = 1 + \frac{m+b}{b+m} = 2$

Như vậy $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi m = 0, khi đó a = b.

Vậy phân số mà tổng của nó với số nghịch đảo của nó có giá trị nhỏ nhất là phân số có tử bằng mẫu, tức là phân số có giá trị bằng 1.

Bài 7: Tổng của bốn số nguyên dương bằng 402. ƯCLN của chúng có giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

Giải:

Gọi d là ƯCLN của 4 số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4 ($1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$) thì $a_1 = dk_1, a_2 = dk_2, a_3 = dk_3, a_4 = dk_4$. Ta có: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 402$ nên $d(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = 402$.

Gọi $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = s$ thì d.s = 402. Như vậy d lớn nhất khi s nhỏ nhất.

Ta có $s \geq 4$ và s là ước của 402. Do đó s nhỏ nhất bằng 6. Khi đó d lớn nhất bằng : 402 : 6 = 67.

Các số k_1, k_2, k_3, k_4 có tổng bằng 6 ($k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4$) có thể là 1, 1, 1, 3 hoặc 1, 1, 2, 2.

Vậy $ƯCLN_{(a1,\ a2,\ a3,\ a4)}$ có giá trị lớn nhất bằng 67 khi 4 số đó là: 67, 67, 67, 201 hoặc 67, 67, 134, 134.

Bài 8: Dùng mười chữ số khác nhau, hãy viết số chia hết cho 8 có mười chữ số sao cho số đó có giá trị:

a) Lớn nhất
b) Nhỏ nhất

Giải:

⇨ Chọn 7 chữ số đầu là: 9 8 7 6 5 4 3. Còn lại 3 chữ số 2, 1, 0; lập được số lớn nhất có 3 chữ số tận cùng tạo thành số chia hết cho 8 được 120.
Đáp số: 9876543120.

⇨ Ta chọn 6 chữ số đầu là 102345, ta được n = $\overline{102345abcd}$ với a, b, c, d ∈ {6, 7, 8, 9}.

Để n chia hết cho 8 thì $\overline{bcd}$ phải chia hết cho 8. Chỉ có 4 cách chọn $\overline{bcd}$ bằng 896; 976; 968; 768. Để n nhỏ nhất thì 4 chữ số cuối cùng của n có thể là: 7896; 8976; 7968; 9768, số nhỏ nhất là 7896.

Vậy số n nhỏ nhất là 1023457896.

DẠNG 4: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỀ TÌM KHOẢNG GIÁ TRỊ CỦA SỐ PHẢI TÌM

❖ Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm hai số nguyên dương sao cho tích của hai số ấy gấp đôi tổng của chúng.

Giải:

Gọi hai số nguyên dương phải tìm là a và b, ta có 2(a + b) = ab (1)

Do vai trò của a và b như nhau, ta giả sử rằng a ≤ b, nên a + b ≤ 2b, do đó 2(a + b) ≤ 4b. (2)

Từ (1) và (2) => ab ≤ 4b. Chia hai vế cho b > 0 ta được a ≤ 4.

Thay a = 1 vào (1) ta được 2 + 2b = b, loại.

Thay a = 2 vào (1) ta được 4 + 2b = 2b, loại.

Thay a = 3 vào (1) ta được 6 + 2b = 3b => b = 6

Thay a = 4 vào (1) ta được 8 + 2b = 4b => b = 4

Vậy có hai cặp số thỏa mãn đề bài là 3 và 6, 4 và 4.

Bài 2: Viết phân số $\frac{1}{4}$ thành tổng của hai phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau.

Giải:

Gọi hai phân số phải tìm là : $\frac{1}{a}$ và $\frac{1}{b}$, ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}$ (1)

Do vai trò của a và b là như nhau , ta giả sử rằng a < b. ta sẽ dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của a (là số nhỏ hơn).

Hiển nhiên $\frac{1}{a} < \frac{1}{4}$ nên a > 4. (2)

Mặt khác, do a < b nên $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Do đó: $\frac{1}{a} > \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : 2 = \frac{1}{8}$. => a < 8 (3)

Từ (2) và (3) => 4 < a < 8. Thay các giá trị của a bằng 5, 6, 7 vào (1) ta được hai trường hợp cho b là số tự nhiên: a = 5, b = 20 và a = 6, b = 12.

Vậy có hai cách viết: $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ và $\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$

Bài 3: Tìm hai số tự nhiên sao cho tổng của hai số ấy bằng tích của chúng.

Giải:

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a và b

Theo bài ra ta có: a + b = a.b (1)

Nếu một trong hai số bằng 0 thì số kia bằng 0.

Nếu cả hai số khác 0 thì từ (1) ta có:

- $\frac{a+b}{ab} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

Do vai trò của a và b là như nhau , ta giả sử rằng a ≤ b. ta sẽ dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của a (là số nhỏ hơn).

Hiển nhiên $\frac{1}{a} < 1$ nên a > 1. (2)

Mặt khác, do a ≤ b nên $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. Do đó: $\frac{1}{a} \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : 2 = \frac{1}{2}$ => a ≤ 2 (3)

Từ (2) và (3) => 1 < a ≤ 2. => a =2. Thay a = 2 vào (1) ta được b = 2

Vậy được hai cặp số cần tìm: (0; 0) và (2; 2).

Bài 4: Tìm ba số nguyên tố a, b, c khác nhau sao cho: abc < ab + bc + ca

Giải:

Chia hai vế của bất đẳng thức abc < ab + bc + ac cho số dương abc được: $1 < \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (1)

Giả sử a > b > c ≥ 2. Trong ba phân số $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ thì $\frac{1}{c}$ lớn nhất nên $\frac{1}{c} > \frac{1}{3}$, do đó c < 3. Vậy c = 2

Thay c =2 vào (1) được: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$ (2)

Trong hai phân số $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, phân số $\frac{1}{b}$ lớn hơn nên: $\frac{1}{b} > \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$, do đó b < 4, mà b > c = 2 nên b = 3.

Thay b = 3 vào (2) được: $\frac{1}{a} > \frac{1}{6}$. Do đó a < 6, mà a > b = 3 và a là số nguyên tố, vậy a = 5.

Vậy các số a, b, c phải tìm là 2, 3, 5 và các hoán vị của chúng.

Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số biết rằng số đó có thể phân tích thành tích của hai thừa số có tổng bằng 100 và một trong hai thừa số ấy có dạng a^a .

Giải:

Gọi thừa số còn lại là b, ta có $a^a + b = 100$

Do $a^a < 100$ nên a ∈ {1,2,3}. Mặt khác $a^a.b > 1000$ mà b < 100 nên $a^a > 10$, tức a > 2.

Vậy a = 3. Ta có: $3^3.73 = 1971$.

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên sao cho tích của hai số ấy gấp bốn lần tổng của chúng.

Giải:

Gọi hai số phải tìm là a và b, ta có:

4(a + b) = ab (1)

Nếu một trong hai số bằng 0 thì số kia bằng 0.

Nếu cả hai số khác 0 thì từ (1) ta có:

$\frac{4(a+b)}{4ab} = \frac{ab}{4ab}$ hay $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$

Do vai trò của a và b là như nhau , ta giả sử rằng a ≤ b. ta sẽ dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của a (là số nhỏ hơn).

Hiển nhiên $\frac{1}{a} < \frac{1}{4}$ nên a > 4.   (2)

Mặt khác, do a ≤ b nên $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. Do đó: $\frac{1}{a} \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : 2 = \frac{1}{8}$. => a ≤ 8 (3)

Từ (2) và (3) => 4 < a ≤ 8. Thay các giá trị của a bằng 5, 6, 7, 8 vào (1) ta được hai trường hợp cho b là số tự nhiên: a = 5, b = 20, a = 6, b = 12 và a = 8, b = 8

Vậy có 4 cặp số cần tìm: (0; 0), (5; 20), (6; 12), (8; 8).

Bài 3: Viết phân số $\frac{1}{6}$ thành tổng của hai phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau.

Giải:

Gọi hai phân số cần tìm là: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ (a ≠ b ≠ 0).

Theo bài ra ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$ (1)

Do vai trò của a và b là như nhau , ta giả sử rằng a < b, ta sẽ dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của a (là số nhỏ hơn).

Hiển nhiên $\frac{1}{a} < \frac{1}{6}$ nên a > 6.   (2)

Mặt khác, do a < b nên $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Do đó: $\frac{1}{a} > \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : 2 = \frac{1}{12}$. => a < 12 (3)

Từ (2) và (3) => 6 < a < 12. Thay các giá trị của a bằng 7, 8, 9, 10, 11 vào (1) ta được 4 trường hợp cho b là số tự nhiên: a = 7, b = 42, a = 8, b = 24, a = 9, b = 18 và a = 10, b = 15

Bài 4: Tìm hai phân số có tử bằng 1, các mẫu dương, biết rằng tổng của hai phân số ấy cộng với tích của chúng bằng $\frac{1}{2}$

Giải:

Gọi hai phân số cần tìm là: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ (a ≤ b, ≠ 0).

Theo bài ra ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{2}$ (1)

Hiển nhiên ta có: $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ nên a > 2.

Mặt khác, nếu a ≥ 5 thì: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{11}{25} < \frac{1}{2}$ (loại).

Lần lượt, thay a = 3, a = 4 vào (1) , ta được b = 8, b = 5.

Đáp số: có hai cặp $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{5}\right)$ và $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{8}\right)$.

Bài 5: Tìm bốn số tự nhiên sao cho tổng nghịch đảo các bình phương của chúng bằng 1.

Giải:

Gọi 4 số tự nhiên cần tìm là: a, b, c, d, ta có: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1$.

Trong 4 số a, b, c, d không có số nào bằng 1, không có số nào lớn hơn hoặc bằng 3, do đó cả 4 số đều bằng 2.