HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

SỐ NGUYÊN TỐ VÀ HỢP SỐ

Bài 1: Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số nguyên tố đó là số chẵn hay lẻ?

HƯỚNG DẪN:

Ta thấy trong 25 số nguyên tố có 1 số chẵn còn lại là 24 số lẻ. Tổng của 24 số lẻ là một số chẵn nên tổng của 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 là số chẵn.

Bài 2: Tổng của ba số nguyên tố bằng 1012. Tìm số nhỏ nhất trong ba số nguyên tố đó.

HƯỚNG DẪN:

Vì tổng của 3 số nguyên tố bằng 1012, nên trong 3 số nguyên tố đó tồn tại ít nhất một số nguyên tố chẵn. Mà số nguyên tố chẵn duy nhất là 2 và là số nguyên tố nhỏ nhất. Vậy số nguyên tố nhỏ nhất trong 3 số nguyên tố đó là 2

Bài 3: Tìm bốn số nguyên tố liên tiếp, sao cho tổng của chúng là số nguyên tố.

HƯỚNG DẪN:

Tổng của 4 số nguyên tố là một số nguyên tố => tổng của 4 số nguyên tố là 1 số lẻ => trong 4 số đó tồn tại ít nhất một số nguyên tố chẵn. Mà số nguyên tố chẵn duy nhất là 2. Vậy 4 số nguyên tố cần tìm là: 2; 3; 5; 7

Bài 4: Tổng của hai số nguyên tố có thể bằng 2003 được không?

HƯỚNG DẪN:

Vì tổng của 2 số nguyên tố bằng 2003, nên trong 2 số nguyên tố đó tồn tại 1 số nguyên tố chẵn. Mà số nguyên tố chẵn duy nhất là 2. Do đó số nguyên tố còn lại là 2001. Do 2001 chia hết cho 3 và 2001 > 3. Suy ra 2001 không phải là số nguyên tố. => Tổng của hai số nguyên tố không thể bằng 2003 .

Bài 5: Tìm hai số nguyên tố, sao cho tổng và hiệu của chúng đều là số nguyên tố.

hoc360.net

HƯỚNG DẪN:

Gọi a, b, c, d là các số nguyên tố. (a>b)

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} a - b = c \\ a + b = d \end{cases}$ (*) => c + b = d - b

Từ (*) => a > 2, a là số nguyên tố lẻ => c + b và d – b là số lẻ. Do b, c, d đều là số nguyên tố nên để c + b và d – b là số lẻ thì => b chẵn. Vậy b = 2

a. Bài toán đưa về dạng tìm một số nguyên tố a sao cho a – 2 và a + 2 cũng là số nguyên tố.
    - Nếu a = 5 => a – 2 = 3; a + 2 = 7 đều là số nguyên tố
    - Nếu a ≠ 5 . Xét 2 trường hợp

      + a chia 3 dư 1 => a + 2 chia hết cho 3 : không là số nguyên tố

      + a chia 3 dư 2 => a – 2 chia hết cho 3: không là số nguyên tố

      Vậy chỉ có số nguyên tố a duy nhất thoả mãn là 5.

      Hai số nguyên tố cần tìm là 5; 2

Bài 6: Tìm số nguyên tố có ba chữ số, biết rằng nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì ta được một số là lập phương của một số tự nhiên.

HƯỚNG DẪN:

Gọi số tự nhiên đó là a.

Ta có $10^3 = 1000$; $5^3 = 125$ => $125 \le a^3 < 1000$ => $5 \le a < 10$

Ta có bảng sau:

a	5	6	7	8	9
a^3	125	216	343	512	729
Số cần tìm	521	612	343	215	927
Kết luận	TM	loại	loại	loại	loại

Vậy số cần tìm là 521

Bài 7: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng trăm bằng chữ số hàng chục và số đó viết được dưới dạng tích của ba số nguyên tố liên tiếp.

Bài 8: Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm số dư r.

HƯỚNG DẪN:

Ta có:

p = 42.k + r. = 2.3.7.k + r

Vì r là hợp số và r < 42 nên r phải là tích của 2 số r = x.y

x và y không thể là 2, 3, 7 và cũng không thể là số chia hết cho 2, 3, 7 được vì nếu thế thì p không là số nguyên tố.

Vậy x và y có thể là các số trong các số {5,11,13, ..}

Nếu x=5 và y=11 thì r = x.y =55>42

Vậy chỉ còn trường hợp x = 5, y = 5. Khi đó r = 25

Bài 9: Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị. Tìm hai số nguyên tố sinh đôi nhỏ hơn 50.

HƯỚNG DẪN:

Các số nguyên tố sinh đôi nhỏ hơn 50 là: 5 và 7; 11 và 13; 17 và 19; 29 và 31; 41 và 43.

Bài 10: Tìm số nguyên tố, biết rằng số đó bằng tổng của hai chữ số nguyên tố và bằng hiệu của hai số nguyên tố.

Giả sử a, b, c, d, e là các số nguyên tố (d > e)

Theo bài ra ta có: a = b + c = d – e (*)

Từ (*) => a > 2 => a là số nguyên tố lẻ

- b + c = d – e là số lẻ.
  do b, d là các số nguyên tố => b, d là số lẻ => c, e là số chẵn.
- c =e = 2 (do e, c là các số nguyên tố)
- a = b + c = d – 2 => d = b + 4
  vậy ta cần tìm số nguyên tố b sao cho b + 2, b + 4 cũng là số nguyên tố
- b = 3
  Vậy số nguyên tố cần tìm là 5

Bài 11: Tìm số nguyên tố p, sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a. p + 2 và p + 10
    - Nếu p = 2 thì p + 2 = 4 và p + 10 = 12 đều không phải là số nguyên tố.

- Nếu p ≥ 3 thì số nguyên tố p có một trong 3 dạng : 3k, 3k + 1, 3k + 2 với k ∈ N*

    + Nếu p = 3k => p = 3; p + 2 = 5; p + 10 = 13 đều là số nguyên tố.
    + Nếu p = 3k + 1 => p + 2 = 3k + 3 chia hết cho 3: không là số nguyên tố.
    + Nếu p = 3k + 2 => p + 10 = 3k + 12 chia hết cho 3: không là số nguyên tố
    Vậy p = 3

b. p + 10 và p + 14

Nếu p = 2 thì p + 10 = 12 và p + 14 = 16 đều không phải là số nguyên tố.

Nếu p ≥ 3 thì số nguyên tố p có một trong 3 dạng : 3k, 3k + 1, 3k + 2 với k ∈ N*

+ Nếu p = 3k => p = 3; p + 10 = 13; p + 14= 17 đều là số nguyên tố.
+ Nếu p = 3k + 1 => p + 14 = 3k + 15 chia hết cho 3: không là số nguyên tố.
+ Nếu p = 3k + 2 => p + 10 = 3k + 12 chia hết cho 3: không là số nguyên tố
Vậy p = 3

c. p + 10 và p + 20

Nếu p = 2 thì p + 2 = 12 và p + 10 = 22 đều không phải là số nguyên tố.

Nếu p ≥ 3 thì số nguyên tố p có một trong 3 dạng : 3k, 3k + 1, 3k + 2 với k ∈ N*

+ Nếu p = 3k => p = 3; p + 10 = 13; p + 20 = 23 đều là số nguyên tố.
+ Nếu p = 3k + 1 => p + 20 = 3k + 21 chia hết cho 3: không là số nguyên tố.
+ Nếu p = 3k + 2 => p + 10 = 3k + 12 chia hết cho 3: không là số nguyên tố
Vậy p = 3

hoc360.net

d. p + 2, p + 6, p + 8, p + 12, p + 14

+Nếu p = 2 ⇒ p + 2 = 4 (loại)
+Nếu p = 3 ⇒ p + 6 = 9 (loại)
+Nếu p = 5 ⇒ p + 2 = 7, p + 6 = 11, p + 8 = 13, p + 12 = 17, p + 14 = 19 (thỏa mãn)
+Nếu p > 5, ta có vì p là số nguyên tố nên ⇒ p không chia hết cho 5 ⇒ p = 5k+1, p = 5k+2, p = 5k+3, p = 5k+4
-Với p = 5k + 1, ta có: p + 14 = 5k + 15 = 5 (k+3) ⋮ 5 (loại)
-Với p = 5k + 2, ta có: p + 8 = 5k + 10 = 5 (k+2) ⋮ 5 (loại)
-Với p = 5k + 3, ta có: p + 12 = 5k + 15 = 5 (k+3) ⋮ 5 (loại)
-Với p = 5k + 4, ta có: p + 6 = 5k + 10 = 5 (k+2) ⋮ 5 (loại)
⇒ không có giá trị nguyên tố p lớn hơn 5 thỏa mãn
Vậy p = 5 là giá trị cần tìm

Bài 12: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Biết p + 2 cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng p + 1 chia hết cho 6.

HƯỚNG DẪN:

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng 6k-1 hoặc 6k+1nếu p=6k+1 thì p+2=6k+3=3(2k+1)chia hết cho 3 và lớn hơn 3 nên là hợp số(vô lí)
do đó p=6k-1=>p+1=6k chia hết cho 6(đpcm)

Bài 13: Cho a + b = p, p là một số nguyên tố. Chứng minh a và b nguyên tố cùng nhau.

HƯỚNG DẪN:

Gọi d là ước chung lớn nhất của a và b.

Theo bài ra ta có: a, b < p

❖ $\begin{cases} a \vdots d \\ b \vdots d \end{cases}$ => a + b ⋮ d => p ⋮ d => d = 1 => a, b là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 14: Tìm 3 số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng?

HƯỚNG DẪN:

Gọi 3 số nguyên tố đó là a,b,c
Ta có: abc =5(a+b+c)

=> abc chia hết cho 5, do a,b,c nguyên tố
=> chỉ có trường hợp 1 trong 3 số =5, giả sử là a =5
=> bc = b+c +5 => (b-1)(c-1) = 6
{b-1 =1 => b=2; c-1 =6 => c=7
{b-1=2, c-1=3 => c=4 (loại)

Vậy 3 số nguyên tố đó là 2, 5, 7

Bài 15: Số $a^4 + a^2 + 1$ có thể là một số nguyên tố hay không?

HƯỚNG DẪN:

Số $a^4 + a^2 + 1$ có thể là một số nguyên tố vì với a = 1 thì $a^4 + a^2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$ là số nguyên tố.

SỐ CHÍNH PHƯƠNG

d) Dạng 1: Chứng minh một số là số chính phương

Bài 1: Chứng minh với mọi số tự nhiên n thì $a_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ là số chính phương.

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = n . (n + 3)(n + 1)(n + 2) + 1$

$$= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 \quad (*)$$

Đặt $n^2 + 3n = t \quad (t \in N)$ thì (*) $= t(t + 2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$

$$= (n^2 + 3n + 1)^2$$

Vì $n \in N$ nên $n^2 + 3n + 1 \in N$. Vậy n(n + 1)(n + 2)(+ 3) + 1 là số chính phương.

Bài 2: Cho S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ...+ k(k + 1)(k + 2)

Chứng minh rằng 4S + 1 là số chính phương.

Ta có: $k(k + 1)(k + 2) = \frac{1}{4}k(k + 1)(k + 2).4 = \frac{1}{4}k(k + 1)(k + 2).\left[(k+3)-(k-1)\right]$

$$= \frac{1}{4}k(k + 1)(k + 2)(k + 3) - \frac{1}{4}k(k + 1)(k + 2)(k - 1)$$

=> $4S = 1.2.3.4 - 0.1.2.3 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + \ldots + k(k + 1)(k + 2)(k + 3)$

$- k(k + 1)(k + 2)(k - 1) = k(k + 1)(k + 2)(k + 3)$

=> $4S + 1 = k(k + 1)(k + 2)(k + 3) + 1$

Theo kết quả bài 2 => $k(k + 1)(k + 2)(k + 3) + 1$ là số chính phương.

Bài 3: Cho dãy số 49; 4489; 444889; 44448889; . . .

Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa các chữ số đứng trước và đứng sau nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương.

Ta có $4\underbrace{4\ldots4}_{n\text{ chữ số }4}\underbrace{88\ldots8}_{n-1\text{ chữ số }8}9 = \underbrace{44\ldots4}_{n\text{ chữ số }4}\underbrace{88\ldots8}_{n\text{ chữ số }8} + 1 = \underbrace{44\ldots4}_{n\text{ chữ số }4}.10^n + 8.\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số }1} + 1$

$$= 4.\frac{10^n-1}{9}.10^n + 8.\frac{10^n-1}{9} + 1$$

$$= \frac{4.10^{2n} - 4.10^n + 8.10^n - 8 + 9}{9} = \frac{4.10^{2n} + 4.10^n + 1}{9}$$

$$= \left(\frac{2.10^n+1}{3}\right)^2$$

Ta thấy:

$2.10^n + 1 = 2\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ chữ số }0}1$ có tổng các chữ số chia hết cho 3 nên nó chia hết cho 3

=> $\left(\frac{2.10^n+1}{3}\right)^2 \in Z$ hay các số có dạng 44 ... 488 ... 89 là số chính phương.

hoc360.net

Bài 4: Chứng minh rằng : Nếu m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $3m^2 + m = 4n^2 + n$ thì m - n và 4m + 4n + 1 đều là số chính phương.

Ta có : $3m^2 + m = 4n^2 + n$ tương đương với $4(m^2 - n^2) + (m - n) = m^2$ hay là $(m - n)(4m + 4n + 1) = m^2$ (*)
Gọi d là ước chung lớn nhất của m - n và 4m + 4n + 1 thì (4m + 4n + 1) + 4(m - n) chia hết cho d
=> 8m + 1 chia hết cho d.
Mặt khác, từ (*) ta có : m^2 chia hết cho d^2 => m chia hết cho d.
Từ 8m + 1 chia hết cho d và m chia hết cho d ta có 1 chia hết cho d => d = 1.
Vậy m - n và 4m + 4n + 1 là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn (*) nên chúng đều là các số chính phương.

d) DẠNG 2 : CHỨNG MINH MỘT SỐ KHONG PHẢI LA SỐ CHINH PHƯƠNG

Bài 1: Chứng minh số : $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương.

Dễ dàng thấy chữ số tận cùng của các số 2004^2 ; 2003^2 ; 2002^2 ; 2001^2 lần lượt là 6 ; 9 ; 4 ; 1. Do đó số n có chữ số tận cùng là 8 nên n không phải là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh số 1234567890 không phải là số chính phương.

Thấy ngay số 1234567890 chia hết cho 5 (vì chữ số tận cùng là 0) nhưng không chia hết cho 25 (vì hai chữ số tận cùng là 90). Do đó số 1234567890 không phải là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng nếu một số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó không phải là số chính phương.

Ta thấy tổng các chữ số của số 2004 là 6 nên 2004 chia hết cho 3 mà không chia hết 9 nên số có tổng các chữ số là 2004 cũng chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9, do đó số này không phải là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh một số có tổng các chữ số là 2006 không phải là số chính phương.

Vì số chính phương khi chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1. Do tổng các chữ số của số đó là 2006 nên số đó chia cho 3 dư 2. Chứng tỏ số đã cho không phải là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

Ta có:

$$1+2+3+...+2005\equiv(2005+1).2005:2\equiv2006.2005:2$$

$$\equiv1003.2005\equiv3.1\equiv3$$

(mod 4)

Vậy tổng của các số từ 1 đến 2005 có dạng 4k+3 (k∈N) nên không là số chính phương (đpcm)

Bài 6: Chứng minh số : $n = 4^4 + 44^{44} + 444^{444} + 4444^{4444} + 15$ không là số chính phương.

$$n\equiv4^4 + 44^{44} + 444^{444} + 4444^{4444} + 15 \equiv0^4 + 0^{44} + 0^{444} + 0^{4444} +3\equiv3$$

(mod 4)

Vậy n=4k+3 (k∈N) nên n không là số chính phương (đpcm)

Bài 8: Chứng minh số 4014025 không là số chính phương.

Ta có: $2003^2 = 4012009$; $2004^2 = 4016016$ mà $4012009 < 4014025 < 4016016$ nên $2003^2 < 4014025 < 2004^2$. Vậy 4014025 không là số chính phương.

Bài 9: Chứng minh $A = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên n khác 0.

Ta có : $A + 1 = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n)^2 + 2(n2 + 3n) +1 = (n^2 + 3n +1)^2$.

Mặt khác :
$(n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) = A$.

Điều này hiển nhiên đúng vì $n \geq 1$. Chứng tỏ : $(n^2 + 3n)^2 < A < A + 1 = (n^2 + 3n +1)^2$. => A không là số chính phương.

Bài 10: Giả sử N = 1.3.5.7 . . . 2007. 2011

Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp 2N - 1, 2N và 2N + 1 không có số nào là số chính phương.

a- 2N - 1 = 2.1.3.5.7 . . . 2011 - 1

Có 2N ⋮ 3 => 2N - 1 = 3k + 2 ($k \in N$)

=> 2N - 1 không là số chính phương.

b- 2N = 2.1.3.5.7 . . . 2011 => 2N chẵn.

=> N lẻ => N không chia hết cho 2 và 2N ⋮ 2 nhưng 2N không chia hết cho 4.

2N chẵn nên 2N không chia cho 4 dư 1 hoặc dư 3 => 2N không là số chính phương.

c- 2N + 1 = 2.1.3.5.7 . . . 2011 + 1

2N + 1 lẻ nên 2N + 1 không chia hết cho 4

2N không chia hết cho 4 nên 2N + 1 không chia cho 4 dư 1.

=> 2N + 1 không là số chính phương.

Bài 11: Chứng minh rằng tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

Gọi 2 số lẻ bất kì là a, b.

- a có dạng 2m + 1, b có dạng 2n + 1 (với m, n thuộc N)
- $a^2 + b^2 = (2m + 1).(2m + 1) + (2n + 1)(2n + 1)$
  $= 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1$
  $= 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2 = 4.t + 2$ ($t \in N$)
  Không có số chính phương nào có dạng 4t + 2 ($t \in N$) do đó $a^2 + b^2$ không thể là số chính phương. => đpcm.

Bài 12: Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in N$ và $n > 1$

không phải là số chính phương.

$n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2.(n^4 - n^2 + 2n + 2) = n^2.[n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)]$

$= n^2[(n+1)(n^3 - n^2 + 2)] = n^2(n+1).[(n^3+1) - (n^2-1)]$

$= n^2(n+1)^2.(n^2-2n+2)$

Với $n \in N$, $n > 1$ thì $n^2-2n+2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không phải là một số chính phương.

e) DẠNG 3: TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN ĐỂ BIỂU THỨC CÓ GIÁ TRỊ LÀ MỘT SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: Tìm số tự nhiên n sao cho các số sau là số chính phương

a) $n^2 + 2n + 12$ b) $n(n + 3)$

c) $13n + 3$ d) $n^2 + n + 1589$

Hướng dẫn

a)Vì $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương nên đặt $n^2 + 2n + 12 = k^2$ $(k \in N)$

$\Rightarrow (n^2 + 2n + 1) + 11 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (n+1)^2 = 11 \Leftrightarrow (k + n + 1)(k - n - 1) = 11$

Nhận xét thấy $k + n + 1 > k - n - 1$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết $(k + n + 1)(k - n - 1) = 11.1 \Leftrightarrow \begin{cases} k + n + 1 = 11 \\ k - n - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 4 \end{cases}$

b) Đặt $n(n + 3) = a^2$ $(n \in N) \Rightarrow n^2 + 3n = a^2 \Leftrightarrow 4n^2 + 12n = 4a^2$

$\Leftrightarrow (4n^2 + 12n + 9) - 9 = 4a^2$

$\Leftrightarrow (2n + 3)^2 - 4a^2 = 9$

$\Leftrightarrow (2n + 3 + 2a)(2n + 3 - 2a) = 9$

Nhận xét thấy $2n + 3 + 2a > 2n + 3 – 2a$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết $(2n + 3 + 2a)(2n + 3 – 2a) = 9.1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2n + 3 + 2a = 9 \\ 2n + 3 - 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

c) Đặt $13n + 3 = y^2$ ($y \in N$) $\Rightarrow 13(n - 1) = y^2 – 16$

$\Leftrightarrow 13(n - 1) = (y + 4)(y – 4)$

$\Rightarrow (y + 4)(y – 4) \vdots 13$ mà 13 là số nguyên tố nên $y + 4 \vdots 13$ hoặc $y – 4 \vdots 13$

$\Rightarrow y = 13k \pm 4$ (với $k \in N$)

$\Rightarrow 13(n - 1) = (13k \pm 4)^2 – 16 = 13k.(13k \pm 8)$

$\Rightarrow 13k^2 \pm 8k + 1$

Vậy $n = 13k^2 \pm 8k + 1$ (với $k \in N$) thì $13n + 3$ là số chính phương

d) Đặt $n^2 + n + 1589 = m^2$ ($m \in N$) $\Rightarrow (4n^2 + 1)^2 + 6355 = 4m^2$

$\Leftrightarrow (2m + 2n + 1)(2m – 2n – 1) = 6355$

Nhận xét thấy $2m + 2n + 1 > 2m – 2n – 1 > 0$ và chúng là những số lẻ, nên ta có thể viết $(2m + 2n + 1)(2m – 2n – 1) = 6355.1 = 1271.5 = 205.31 = 155.41$

Suy ra n có thể có các giá trị sau : 1588 ; 316 ; 43 ; 28

Bài 2: Tìm a để các số sau là những số chính phương

a) $a^2 + a + 43$

b) $a^2 + 81$

c) $a^2 + 31a + 1984$

Đáp số:

a) 2; 42; 13

b) 0; 12; 40

c) 12 ; 33 ; 48 ; 97 ; 176 ; 332 ; 565 ; 1728

Bài 3: Tìm số tự nhiên n ≥ 1 sao cho tổng 1! + 2! + 3! + … + n! là một số chính phương.

Với n = 1 thì 1! = 1 = 1^2 là số chính phương

Với n = 2 thì 1! + 2! = 3 không là số chính phương

Với n = 3 thì 1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^2 là số chính phương

Với n ≥ 4 ta có 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33 còn 5!; 6!; …; n! đều tận cùng bởi 0 do đó 1! + 2! + 3! + … n! có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên n thoả mãn đề bài là n = 1; n = 3

Bài 4: Có hay không số tự nhiên n để 2010 + n^2 là số chính phương.

Giả sử 2010 + n^2 là số chính phương thì 2010 + n^2 = m^2 ($m \in N$)

Từ đó suy ra m^2 - n^2 = 2010 ⇔ (m + n) (m – n) = 2010

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác m + n + m – n = 2m ⇒ 2 số m + n và m – n cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) ⇒ m + n và m – n là 2 số chẵn.

⇒ (m + n) (m – n) ⋮ 4 nhưng 2006 không chia hết cho 4

⇒ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để 2006 + n^2 là số chính phương.

Bài 5: Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng 2n + 1 và 3n + 1 đều là các số chính phương.

Ta có 10 ≤ n ≤ 99 nên 21 ≤ 2n + 1 ≤ 199. Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được 2n + 1 bằng 25; 49; 81; 121; 169 tương ứng với số n bằng 12; 24; 40; 60; 84

Số 3n + 1 bằng 37; 73; 121; 181; 253. Chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy n = 40

Bài 6: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương

Giả sử $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$ ($a \in N$) thì

$2^n = a^2 - 48^2 = (a + 48)(a - 48)$

$2^p . 2^q = (a + 48)(a - 48)$ với $p, q \in N$; $p + q = n$ và $p > q$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 48 = 2^p \\ a - 48 = 2^q \end{cases} \Rightarrow 2^p 2^q = 96 \Leftrightarrow 2^q(2^{p-q} - 1) = 2^5.3$

$\Rightarrow q = 5$ và $p - q = 2 \Rightarrow p = 7$

$\Rightarrow n = 5 + 7 = 12$

Thử lại ta có: $2^8 + 2^{11} + 2^n = 80^2$

f) Dạng 4: TÌM SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.

Gọi A = $\overline{abcd} = k^2$. Nếu thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta có số

B = $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = m^2$ với $k, m \in N$ và $32 < k < m < 100$

$a, b, c, d = \overline{1;9}$

$\Rightarrow$ Ta có: $\begin{cases} A = \overline{abcd} = k^2 \\ B = \overline{abcd} + 1111 = m^2 \end{cases}$. Đúng khi cộng không có nhớ

$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow (m - k)(m + k) = 1111$ (*)

Nhận xét thấy tích (m – k)(m + k) > 0 nên m – k và m + k là 2 số nguyên dương.

Và m – k < m + k < 200 nên (*) có thể viết (m – k) (m + k) = 11.101

Do đó: $\begin{cases} m - k = 11 \\ m + k = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 56 \\ n = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2025 \\ B = 3136 \end{cases}$

<u>Bài 2</u>: Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm 2 chữ số sau một đơn vị.

Đặt $\overline{abcd} = k^2$ ta có $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ và k $\in$ N, 32 $\le$ k < 100

Suy ra : $101\overline{cd} = k^2 - 100 = (k - 10)(k + 10) \Rightarrow k + 10 \vdots 101$ hoặc $k - 10 \vdots 101$

Mà (k – 10; 101) = 1 $\Rightarrow$ k + 10 $\vdots$ 101

Vì 32 $\le$ k < 100 nên 42 $\le$ k + 10 < 110 $\Rightarrow$ k + 10 = 101 $\Rightarrow$ k = 91

$\Rightarrow \overline{abcd} = 91^2 = 8281$

<u>Bài 3</u>: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Gọi số chính phương phải tìm là: $\overline{aabb} = n^2$ với a, b $\in$ N, 1 $\le$ a $\le$ 9; 0 $\le$ b $\le$ 9

Ta có: $n^2 = \overline{aabb} = 11.\overline{a0b} = 11.(100a + b) = 11.(99a + a + b)$ (1)

Nhận xét thấy $\overline{aabb} \vdots 11 \Rightarrow a + b \vdots 11$

Mà 1 $\le$ a $\le$ 9; 0 $\le$ b $\le$ 9 nên 1 $\le$ a + b $\le$ 18 $\Rightarrow$ a + b = 11

Thay a + b = 11 vào (1) được $n^2 = 11^2(9a + 1)$ do đó 9a + 1 là số chính phương

Bằng phép thử với a = 1; 2;…; 9 ta thấy chỉ có a = 7 thoả mãn $\Rightarrow$ b = 4

Số cần tìm là: 7744

hoc360.net

Bài 4: Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.

Gọi số chính phương đó là $\overline{abcd}$. Vì abcd vừa là số chính phương vừa là một lập phương nên đặt $\overline{abcd} = x^2 = y^3$ với x, y $\in$ N

Vì $y^3 = x^2$ nên y cũng là một số chính phương.

Ta có : $1000 \leq \overline{abcd} \leq 9999 \Rightarrow 10 \leq y \leq 21$ và y chính phương

$\Rightarrow y = 16 \Rightarrow \overline{abcd} = 4096$

Bài 5: Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ với a, b, c, d nguyên và $1 \leq a \leq 9$; $0 \leq b, c, d \leq 9$

$\overline{abcd}$ chính phương $\Rightarrow d \in \{0,1,4,5,6,9\}$

d nguyên tố $\Rightarrow d = 5$

Đặt $\overline{abcd} = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \leq k < 100$

k là một số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng bằng 5 $\Rightarrow$ k tận cùng bằng 5

Tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow k = 45$

$\Rightarrow \overline{abcd} = 2025$

Vậy số phải tìm là: 2025

Bài 6: Tìm số có 2 chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$ với a, b $\in$ N, $1 \leq a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$

Theo giả thiết ta có: $\overline{ab} = (a + b)^3$

$\Leftrightarrow (10a + b)^2 = (a + b)^3$

$\Rightarrow \overline{ab}$ là một lập phương và a + b là một số chính phương

Đặt $\overline{ab} = t^3$ (t $\in$ N), a + b = 1^2 (1 $\in$ N)

Vì 10 $\leq$ ab $\leq$ 99 $\Rightarrow$ $\overline{ab}$ = 27 hoặc $\overline{ab}$ = 64

Nếu $\overline{ab}$ = 27 $\Rightarrow$ a + b = 9 là số chính phương

Nếu $\overline{ab}$ = 64 $\Rightarrow$ a + b = 10 không là số chính phương $\Rightarrow$ loại

Vậy số cần tìm là ab = 27

hoc360.net