

CHUYÊN ĐỀ 9: DÃY PHÂN SỐ THEO QUY LUẬT

a. DẠNG 1: MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ PHÂN SỐ

a. Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{n+10}{2n-8}$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{21n+3}{6n+4}$

Bài 3: Cho phân số: $A = \frac{63}{3n+1}$ với n thuộc số tự nhiên.

- Với giá trị nào của n thì A rút gọn được.
- Với giá trị nào của n thì A là số tự nhiên?

b. Bài tập tự luyện:

Bài 4: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị là số nguyên.

Bài 5: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{8n+193}{4n+3}$ sao cho:

- Có giá trị là số tự nhiên.
- Là phân số tối giản
- Với giá trị nào của n trong khoảng 150 đến 170 thì phân số A rút gọn được?

Bài 6: Tìm các giá trị nguyên của n để các phân số sau có giá trị là số nguyên:

a. $A = \frac{3n+4}{n-1}$

b. $B = \frac{6n-3}{3n+1}$

a. DẠNG 2: TÍNH NHANH

c. Bài tập minh họa:

Bài 1: Rút gọn biểu thức sau:

a. $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$

$$b. A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$$

$$c. C = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{4} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{99} + 1\right)$$

$$d. D = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{899}{30^2}$$

Bài 2: Tính các tổng sau:

$$a. A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{999.1000}$$

$$b. B = \frac{1}{1.6} + \frac{1}{6.11} + \dots + \frac{1}{496.501}$$

$$c. C = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{998.999.1000}$$

$$d. D = \frac{1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+98)}{1.98+2.97+3.96+\dots+98.1}$$

$$e. B = \frac{1.98+2.97+3.96+\dots+98.1}{1.2+2.3+3.4+\dots+98.99}$$

$$f. E = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \frac{3}{197} + \dots + \frac{198}{2} + \frac{199}{1}}$$

d. Bài tập tự luyện:

$$\diamond A = \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$\diamond B = 1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n!$$

$$\diamond C = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{98.99.100}$$

$$\diamond D = 9 + 99 + 999 + \dots + \underline{99\dots\dots 9}$$

(50 chữ số 9)

$$\diamond S = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{37.38.39}$$

$$\diamond B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\diamond D = \frac{100 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}}$$

b. DẠNG 3: CHỨNG MINH BIỂU THỨC

e. Bài tập minh họa:

Bài 1: Chứng minh rằng các phân số sau tối giản:

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{2n-3} \\ & \frac{2n+3}{4n+8} \\ & \frac{3n+2}{5n+3} \end{aligned}$$

Bài 2: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{63} > 2$

Bài 3: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}$

Chứng minh rằng tổng A không phải là số tự nhiên.

Bài 4 : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0 ta đều có:

$$a) \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$$

$$b) \frac{5}{3.7} + \frac{5}{7.11} + \frac{5}{11.15} + \dots + \frac{5}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{5n}{4n+3}$$

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$ ta có:

$$\frac{3}{9.14} + \frac{3}{14.19} + \frac{3}{19.24} + \dots + \frac{3}{(5n-1)(5n+4)} < \frac{1}{15}$$

Bài 6: Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}$. Chứng minh $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$

Bài 7: Tổng $\frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{99}$ bằng phân số $\frac{a}{b}$. Chứng minh rằng a chia hết cho 149.

f. Bài tập tự luyện:

Bài 8: Cho $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2}$. Chứng minh: $A < \frac{1003}{2008}$

Bài 9: Cho $B = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{2006^2}$. Chứng minh: $B < \frac{334}{2007}$

Bài 10: Cho $C = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng minh $C > 48$

Bài 11: Cho $M = \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+59}$. Chứng minh $M < \frac{2}{3}$

Bài 12: Cho $A = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{18.19.20}$. Chứng minh $A < \frac{1}{4}$

Bài 13: Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}; n > 1$ ta có:

$$A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$$

Bài 14: Cho $C = \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots + \frac{5}{4^{99}}$. Chứng minh: $C < \frac{5}{3}$

Bài 15: Cho $E = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh: $E < \frac{3}{4}$

Bài 16: Cho $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{199}{200}$. Chứng minh: $C^2 < \frac{1}{201}$

Bài 17: Cho $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdot \dots \cdot \frac{208}{210}$. Chứng minh: $A < \frac{1}{25}$

✚ DẠNG 4: TÌM X

g. Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm x, biết rằng: $\frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + \frac{1}{11.14} + \dots + \frac{1}{x.(x+3)} = \frac{101}{1540}$

Bài 2: Tìm x, biết rằng: $x - \left(\frac{50x}{100} + \frac{25x}{200}\right) = 11\frac{1}{4}$

Bài 3: Tìm x, biết rằng: $(x-5) \cdot \frac{30}{100} = \frac{200x}{100} + 5$

Bài 4: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x = 820$

❖ **Bài tập tự luyện:**

Bài 5: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1989}{1991}$

Bài 6: $\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots + \frac{1}{(2x+1)(2x+3)} = \frac{15}{93}$

Bài 7: $\frac{7}{x} + \frac{4}{5.9} + \frac{4}{9.13} + \frac{4}{13.17} + \dots + \frac{4}{41.45} = \frac{29}{45}$

✚ **DẠNG 5: SO SÁNH PHÂN SỐ**

✚ **Bài tập minh họa:**

Bài 1: Cho $A = \frac{10^{2004} + 1}{10^{2005} + 1}$ và $B = \frac{10^{2005} + 1}{10^{2006} + 1}$

So sánh A và B?

Bài 2: Cho $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$ và $B = 1.2.3 \dots 11$

So sánh A và B?

Bài 3: So sánh $L = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{20}\right)$ với $\frac{1}{21}$

Bài 4: So sánh $M = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right)$ với $\frac{11}{19}$

✚ **Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Cho $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$ và $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$

So sánh A và B?

Bài 2: Cho $A = \frac{10^{1992}+1}{10^{1991}+1}$ và $B = \frac{10^{1993}+1}{10^{1992}+1}$

So sánh A và B?

Bài 3: So sánh $U = \frac{1.3.5.7.....39}{21.22.23.....40}$ và $V = \frac{1}{2^{20}-1}$

Bài 4: So sánh:

- ❖ 63^7 và 16^{12}
- ❖ $\left(\frac{1}{32}\right)^7$ và $\left(\frac{1}{16}\right)^9$
- ❖ $\left(\frac{1}{243}\right)^9$ và $\left(\frac{1}{83}\right)^{13}$
- ❖ 5^{299} và 3^{501}
- ❖ 3^{23} và 5^{15}
- ❖ 127^{23} và 513^{18}
- ❖ $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10}
- ❖ 3^{500} và 7^{300}
- ❖ 99^{20} và 9999^{10}
- ❖ 202^{303} và 303^{202}

✚ DẠNG 5: TÌM GIÁ TRỊ THỎA MÃN BIỂU THỨC

Bài 1: Tìm các số tự nhiên x và y sao cho:

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{y} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{x} - \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$$

Bài 2: Tìm các số nguyên x và y sao cho:

$$\frac{5}{x} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{x}{6} - \frac{2}{y} = \frac{1}{30}$$