

CHUYÊN ĐỀ 8: BẤT ĐẲNG THỨC

❖ DẠNG 1: SO SÁNH HAI SỐ

✚ Bài vận dụng:

✚ 107^{50} và 73^{75}

✚ 2^{91} và 5^{35}

✚ 54^4 và 21^{12}

✚ 199^{20} và 2003^{15}

✚ 3^{39} và 11^{21}

✚ 9^8 và 8^9

✚ 333^{444} và 444^{333}

✚ 5^{143} và 7^{119} (*)

✚ 2^{1995} và 5^{863} (*)

✚ $3^{976} \cdot 4^{2015}$ và 7^{1997} (*)

a. DẠNG 2: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC:

✚ Bài tập minh họa:

Bài 1:

✚ Cho biểu thức: $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$ và $B = 3^{101} - 1$. Chứng minh rằng: $A < B$.

✚ Cho $A = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{99}$, $B = 4^{100}$. Chứng minh rằng: $A < B/3$

✚ Cho $H = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2 + 100^2$ và $B = 10100$. Chứng minh rằng $H > B$

✚ Cho $E = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 999.1000$ và $B = 111111000$. Chứng minh rằng $E > B$.

Bài 2: Cho $E = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$.

Chứng minh rằng: $E < \frac{3}{4}$

Bài 3: Cho $C = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{199}{200}$. Chứng minh: $C^2 < \frac{1}{201}$

Bài 4: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}$. Chứng minh rằng:

a) $A < 100$

b) $A > 50$

Bài 5: Chứng minh rằng: $A = \frac{9}{10!} + \frac{9}{11!} + \frac{9}{12!} + \dots + \frac{9}{1000!} < \frac{1}{9!}$

Bài 6: Cho $C = \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \dots + \frac{5}{4^{99}}$. Chứng minh: $C < \frac{5}{3}$

Bài 7: Cho $G = \frac{5}{3} + \frac{8}{3^2} + \frac{11}{3^3} + \dots + \frac{302}{3^{100}}$. Chứng minh: $2\frac{5}{9} < G < 3\frac{1}{2}$

Bài 8: So sánh $L = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{20}\right)$ với $\frac{1}{21}$

Bài 9: Cho $C = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$. Chứng minh rằng:

❖ $C > \frac{7}{12}$

❖ $C > \frac{5}{8}$

a) **Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Cho $C = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$. Chứng minh rằng: $\frac{4}{3} < C < 2,5$

Bài 2: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{100!} < 1$

Bài 3: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99}$

Chứng minh rằng: $0,2 < A < 0,4$.

Bài 4: Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$

Bài 5: Cho $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2}$. Chứng minh: $A < \frac{1003}{2008}$

Bài 6: Cho $S = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{409^2}$. Chứng minh: $S < \frac{1}{12}$

Bài 7: Cho $A = \frac{11}{9} + \frac{18}{16} + \frac{27}{25} + \dots + \frac{1766}{1764}$. Chứng minh: $40\frac{20}{43} < A < 40\frac{20}{21}$

Bài 8: Cho $N = \frac{1.4}{2.3} + \frac{2.5}{3.4} + \frac{3.6}{4.5} + \dots + \frac{98.101}{99.100}$. Chứng minh $97 < N < 98$.

Bài 9: Cho $C = \frac{5}{5.8.11} + \frac{5}{8.11.14} + \dots + \frac{5}{302.305.308}$. Chứng minh $C < \frac{1}{48}$

Bài 10: Cho $B = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$. Chứng minh $B < 100$.

a) DẠNG 3: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

a) Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{14-x}{4-x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{7-x}{x-5}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{x-13}{x+3}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{2x+4}{x+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: Tìm các số tự nhiên a và b nhỏ nhất sao cho $a^7 = b^8$

Bài 6: Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho ta có cách thêm n chữ số vào sau số đó để được số chia hết cho 39.

Bài 7: Viết số 72 thành tổng của hai số mà BCNN của chúng có giá trị lớn nhất.

Bài 8: Cho dãy số tự nhiên 1, 2, 3, 4, ..., 50.

⇒ Tìm hai số thuộc dãy trên sao cho ƯCLN của chúng đạt giá trị lớn nhất.

⇒ Tìm hai số thuộc dãy trên sao cho BCNN của chúng đạt giá trị lớn nhất.

a) Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{1}{4+x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{5x-19}{x-4}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{10x + 25}{2x + 4}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Tìm x thuộc số nguyên sao cho biểu thức $A = \frac{3x + 7}{x - 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 15, ta được: $A = 1234\dots1415$

Hãy xóa đi 15 chữ số của số A để các chữ số còn lại (vẫn giữ nguyên thứ tự như trước) tạo thành:

- a. Số lớn nhất
- b. Số nhỏ nhất

Bài 6: Tìm các phân số có tử và mẫu đều dương sao cho tổng của phân số đó với nghịch đảo của nó có giá trị nhỏ nhất.

Bài 7: Tổng của bốn số nguyên dương bằng 402. ƯCLN của chúng có giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

Bài 8: Dùng mười chữ số khác nhau, hãy viết số chia hết cho 8 có mười chữ số sao cho số đó có giá trị:

- a. Lớn nhất
- b. Nhỏ nhất

✚ DẠNG 4: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM KHOẢNG GIÁ TRỊ CỦA SỐ PHẢI TÌM

❖ Bài tập minh họa:

Bài 1: Tìm hai số nguyên dương sao cho tích của hai số ấy gấp đôi tổng của chúng.

Bài 2: Viết phân số $\frac{1}{4}$ thành tổng của hai phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau.

Bài 3: Tìm hai số tự nhiên sao cho tổng của hai số ấy bằng tích của chúng.

Bài 4: Tìm ba số nguyên tố a, b, c khác nhau sao cho: $abc < ab + bc + ca$

✚ Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số biết rằng số đó có thể phân tích thành tích của hai thừa số có tổng bằng 100 và một trong hai thừa số ấy có dạng a^a .

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên sao cho tích của hai số ấy gấp bốn lần tổng của chúng.

Bài 3: Viết phân số $\frac{1}{6}$ thành tổng của hai phân số có tử bằng 1, mẫu dương và khác nhau.

Bài 4: Tìm hai phân số có tử bằng 1, các mẫu dương, biết rằng tổng của hai phân số ấy cộng với tích của chúng bằng $\frac{1}{2}$

Bài 5: Tìm bốn số tự nhiên sao cho tổng nghịch đảo các bình phương của chúng bằng 1.