

CHUYÊN ĐỀ VỀ SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ - SỐ CHÍNH PHƯƠNG

a. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

❖ LÝ THUYẾT SỐ NGUYÊN TỐ VÀ HỢP SỐ:

a. Định nghĩa:

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có hai ước là 1 và chính nó.
- Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước.

b. Tính chất:

- Để kết luận số a là số nguyên tố ($a > 1$), chỉ cần chứng tỏ không chia hết cho mọi số nguyên tố mà bình phương không vượt quá a .
- Để chứng tỏ một số tự nhiên $a > 1$ là hợp số, chỉ cần chỉ ra một ước khác 1 và a .
- Cách xác định số lượng các ước của một số:

Nếu số M phân tích ra thừa số nguyên tố được $M = a^x \cdot b^y \cdot \dots \cdot c^z$ thì số lượng các ước của M là $(x + 1)(y + 1) \dots (z + 1)$.

- Nếu tích $a \cdot b$ chia hết cho số nguyên tố p thì hoặc $a : p$ hoặc $b : p$.
- Đặc biệt nếu $a^n : p$ thì $a : p$
- Ước nhỏ nhất khác 1 của một hợp số là một số nguyên tố và bình phương lên không vượt quá nó.
- Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng: $4n \pm 1$
- Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng: $6n \pm 1$
- Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị
- Một số bằng tổng các ước của nó (Không kể chính nó) gọi là ‘Số hoàn chỉnh’.

Ví dụ: $6 = 1 + 2 + 3$ nên 6 là một số hoàn chỉnh

❖ SỐ CHÍNH PHƯƠNG:

⇒ **ĐỊNH NGHĨA:** Số chính phương là số bằng bình phương đúng của một số nguyên.

⇒ **TÍNH CHẤT:**

- ❖ Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.
- ❖ Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

- ❖ Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $4n$ hoặc $4n+1$. Không có số chính phương nào có dạng $4n + 2$ hoặc $4n + 3$ ($n \in \mathbb{N}$).
- ❖ Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $3n$ hoặc $3n + 1$. Không có số chính phương nào có dạng $3n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$).
- ❖ Số chính phương tận cùng bằng 1, 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.
- ❖ Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2.
- ❖ Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.
- ❖ Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.
- ❖ Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9
- ❖ Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25
- ❖ Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

⇒ **Một số bài toán về số chính phương:**

- a) Phương pháp chứng minh một số là số chính phương:
 - a) Dựa vào định nghĩa: Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên. Dựa vào định nghĩa này, ta có thể định hướng giải quyết các bài toán.
 - b) Dựa vào tính chất đặc biệt: **“Nếu a, b là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau và $a.b$ là một số chính phương thì a và b đều là các số chính phương”**.
- b) Phương pháp chứng minh một số không phải là số chính phương:
 - a) Nhìn chữ số tận cùng: số chính phương phải có chữ số tận cùng là một trong các chữ số **0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9**. Nếu số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì phải chia hết cho p^2 .
 - a) Dùng tính chất của số dư
 - b) “Kẹp” số giữa hai số chính phương “liên tiếp” Các em có thể thấy rằng : Nếu n là số tự nhiên và số tự nhiên k thỏa mãn $n^2 < k < (n + 1)^2$ thì k không là số chính phương.

b. BÀI TẬP VẬN DỤNG

✚ **SỐ NGUYÊN TỐ VÀ HỢP SỐ**

Bài 1: Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số nguyên tố đó là số chẵn hay lẻ?

Bài 2: Tổng của ba số nguyên tố bằng 1012. Tìm số nhỏ nhất trong ba số nguyên tố đó.

Bài 3: Tìm bốn số nguyên tố liên tiếp, sao cho tổng của chúng là số nguyên tố.

Bài 4: Tổng của hai số nguyên tố có thể bằng 2003 được không?

Bài 5: Tìm hai số nguyên tố, sao cho tổng và tích của chúng đều là số nguyên tố.

Bài 6: Tìm số nguyên tố có ba chữ số, biết rằng nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì ta được một số là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 7: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng trăm bằng chữ số hàng chục và số đó viết được dưới dạng tích của ba số nguyên tố liên tiếp.

Bài 8: Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm số dư r .

Bài 9: Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị. Tìm hai số nguyên tố sinh đôi nhỏ hơn 50.

Bài 10: Tìm số nguyên tố, biết rằng số đó bằng tổng của hai chữ số nguyên tố và bằng hiệu của hai số nguyên tố.

Bài 11: Tìm số nguyên tố p , sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

- ✚ $p + 2$ và $p + 10$
- ✚ $p + 10$ và $p + 14$
- ✚ $p + 10$ và $p + 20$
- ✚ $p + 2, p + 6, p + 8, p + 12, p + 14$

Bài 12: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Biết $p + 2$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $p + 1$ chia hết cho 6.

Bài 13: Cho $a + b = p$, p là một số nguyên tố. Chứng minh a và b nguyên tố cùng nhau.

Bài 14: Tìm 3 số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng?

Bài 15: Số $a^4 + a^2 + 1$ có thể là một số nguyên tố hay không?

✚ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

c) **Dạng 1: Chứng minh một số là số chính phương**

Bài 1: Chứng minh với mọi số tự nhiên n thì $a_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ là số chính phương.

Bài 2: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k + 1)(k + 2)$

Chứng minh rằng $4S + 1$ là số chính phương.

Bài 3: Cho dãy số 49; 4489; 444889; 44448889; ...

Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa các chữ số đứng trước và đứng sau nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng : Nếu m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $3m^2 + m = 4n^2 + n$ thì $m - n$ và $4m + 4n + 1$ đều là số chính phương.

a) **Dạng 2 : Chứng minh một số không phải là số chính phương**

Bài 1: Chứng minh số : $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không phải là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh số 1234567890 không phải là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng nếu một số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó không phải là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh một số có tổng các chữ số là 2006 không phải là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

Bài 6: Chứng minh số : $n = 4^4 + 44^{44} + 444^{444} + 4444^{4444} + 15$ không là số chính phương.

Bài 8: Chứng minh số 4014025 không là số chính phương.

Bài 9: Chứng minh $A = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên n khác 0.

Bài 10: Giả sử $N = 1.3.5.7 \dots 2007.2011$

Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp $2N - 1$, $2N$ và $2N + 1$ không có số nào là số chính phương.

Bài 11: Chứng minh rằng tổng bình phương của 2 số lẻ bất kỳ không phải là số chính phương.

Bài 12: Chứng minh rằng số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

b) Dạng 3: Tìm giá trị của biến để biểu thức có giá trị là một số chính phương

Bài 1: Tìm số tự nhiên n sao cho các số sau là số chính phương

- a) $n^2 + 2n + 12$ b) $n(n + 3)$
c) $13n + 3$ d) $n^2 + n + 1589$

Bài 2: Tìm a để các số sau là những số chính phương

- a) $a^2 + a + 43$
b) $a^2 + 81$
c) $a^2 + 31a + 1984$

Bài 3: Tìm số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho tổng $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ là một số chính phương.

Bài 4: Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Bài 5: Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n + 1$ và $3n + 1$ đều là các số chính phương.

Bài 6: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương

c) Dạng 4: TÌM SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1: Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B . Hãy tìm các số A và B .

Bài 2: Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng số gồm 2 chữ số đầu lớn hơn số gồm 2 chữ số sau một đơn vị.

Bài 3: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Bài 4: Tìm một số có 4 chữ số vừa là số chính phương vừa là một lập phương.

Bài 5: Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Bài 6: Tìm số có 2 chữ số mà bình phương của số ấy bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.