3. Áp dụng góc có đỉnh ở trong hoặc ngoài đường tròn.

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cũng như phần góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, các định lý và hệ quả của góc có đỉnh nằm trong hoặc nằm ngoài đường tròn giúp chúng ta tìm mối quan hệ giữa các số đo các góc, chứng minh các đường song song, các tam giác bằng nhau, các tam giác đồng dạng với nhau, hai đường thẳng vuông góc với nhau.

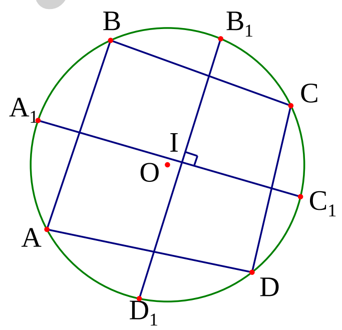
B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trên đường tròn O cho các điểm A, B, C, D theo thứ tự đó. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CD và DA. Chứng minh các đường thẳng A_1C_1 và B_1D_1 vuông góc với nhau

Lời giải:

Gọi I là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ theo thứ tự là số đo của các cung AB, BC, CD, DA. Khi đó $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$.

Xét góc A_1IB_1 là góc có đỉnh nằm trong đường tròn O.



Ta có $A_1IB_1 = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}A_1BB_1 + \text{sđ}C_1DD_1\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}A_1B + \text{sđ}BB_1 + \text{sđ}C_1D + \text{sđ}DD_1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ \alpha + \beta + \gamma + \delta\ = 90^0.$$

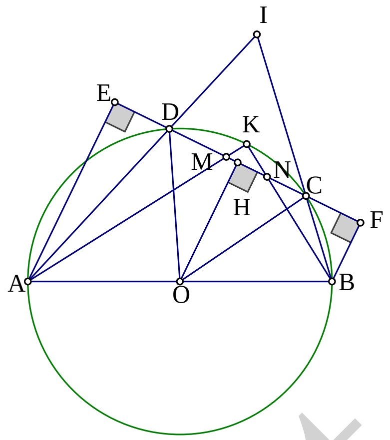
Nghĩa là $A_1C_1 \perp B_1D_1$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho bốn điểm A, D, C, B theo thứ tự đó nằm trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (C và D nằm về cùng một phía so với AB). Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên đường thẳng CD. Tia AD cắt tia BC tại I. Biết rằng $AE + BF = R\sqrt{3}$.

a) Tính số đo AIB.

b) Trên cung nhỏ CD lấy điểm K. Gọi giao điểm của KA, KB với DC lần lượt là M và N. Tìm giá trị lớn nhất của MN khi K di động trên cung nhỏ CD.

Lời giải:



a). Kẻ $OH \perp CD \ \ H \in CD$,

Ta thấy OH là đường trung bình của hình thang $ABFE$,

suy ra $OH = \frac{1}{2}\ AE + BF\ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó tam giác OCD đều,

suy ra sđ$COD =$ sđ$KCD = 60^0$.Ta thấy AIB có đỉnh nằm ngoài đường tròn O nên

sđ$AIB = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AmB - \text{sđ}KCD\right) = \frac{1}{2}\ 180^0 - 60^0\ = 60^0$.

b) Ta thấy $\Delta AEM \sim \Delta NFB$ suy ra $EM.NF = AE.BF$ (không đổi) do đó MN lớn nhất khi và chỉ khi $EM + NF$ nhỏ nhất.

Theo trên, $EM.NF$ không đổi nên $EM + NF$ nhỏ nhất khi $EM = FN = \sqrt{AE.BF}$.

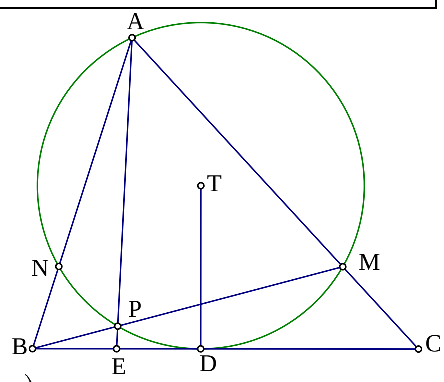
Vậy giá trị lớn nhất của MN bằng $EF - 2\sqrt{AE.BF}$.

Ví dụ 3. Trong tam giác ABC, đường phân giác của BAC cắt cạnh BC tại D. Giả sử T là đường tròn tiếp xúc với BC tại D và đi qua điểm A. Gọi M là giao điểm thứ hai của T và AC, P là giao điểm thứ hai của T và BM, E là giao điểm của AP và BC.

a) Chứng minh rằng $EAB = MBC$.

b) Chứng minh hệ thức $BE^2 = EP.EA$.

Lời giải:



a). Gọi N là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn T .

Do AD là phân giác của BAC nên sđ$DM =$ sđDN.

Ta có

$$MBC = MBD = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}DM - \text{sđ}DP\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}DN - \text{sđ}DP\right)$$

$$= \frac{1}{2}\text{sđ}NP = NAP = EAB \text{ (đpcm)}.$$

b) Từ kết quả câu a, ta thấy $EBP = EAB$.

Từ đó $\Delta EBP \sim \Delta EAB$ (g.g), suy ra $\dfrac{BE}{EP} = \dfrac{EA}{BE}$ hay $BE^2 = EP.EA$ (đpcm).

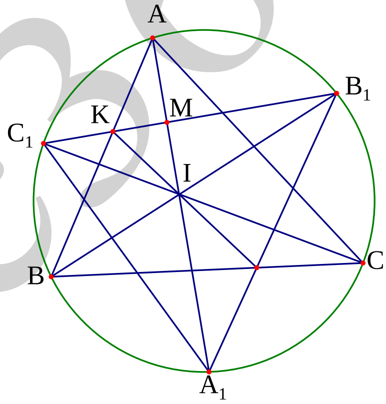
Ví dụ 4. Trên đường tròn O ta lấy các điểm A, C_1, B, A_1, C, B_1 theo thứ tự đó.

a) Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác trong của tam giác ABC thì chúng là các đường cao của $\Delta A_1B_1C_1$.

b) CHứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC thì chúng là đường phân giác trong của tam giác $\Delta A_1B_1C_1$.

c) Giả sử T_1 và T_2 là hai tam giác nội tiếp đường tròn O, đồng thời các đỉnh của tam giác T_2 là các điểm chính giữa của các cung đường tròn bị chia bởi các đỉnh của tam giác T_1. Chứng minh rằng trong hình lục giác là giao của các tam giác T_1 và T_2 các đường chéo nối các đỉnh đối nhau song song với các cạnh của tam giác T_1 và đồng quy tại một điểm.

Lời giải:



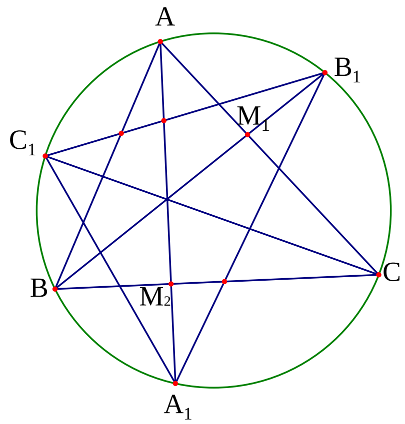
a) Ta chứng minh $AA_1 \perp B_1C_1$. Thật vậy, gọi M là giao điểm của AA_1 và B_1C_1, khi đó:

$$AMB_1 = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AB_1 + \text{sđ}A_1BC_1\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AB_1 + \text{sđ}A_1B + \text{sđ}BC_1\right)$$

$$= ABB_1 + A_1AB + BCC_1 = \frac{1}{2}\ ABC + CAB + BCA\ = 90^0 \text{ (đpcm).}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $BB_1 \perp A_1C_1; CC_1 \perp A_1B_1$.

b)



Gọi M_1 là giao điểm của BB_1 và AC.

Ta có $BM_1A = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AC_1B + \text{sđ}A_1C\right) = BCA + A_1C_1C$ (1)

Lại có $BM_2A = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}AC_1B + B_1C\right) = BCA + B_1C_1C$ (2).

Vì $BM_1A = BM_2A = 90^0$, nên từ (1) và (2) suy ra $A_1C_1A = B_1C_1C$.

Tức là CC_1 chứa đường phân giác của $A_1C_1B_1$.

Chứng minh tương tự, ta cũng thu được AA_1 chứa đường phân giác của $B_1A_1C_1$, BB_1 chứa đường phân giác của $A_1B_1C_1$.

c) Kí hiệu các đỉnh của tam giác T_1 là A, B và C; A_1, B_1 và C_1 là điểm chính giữa các cung BC, CA và AB tương ứng.

Khi đó T_2 là tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường AA_1, BB_1, CC_1 chứa các đường phân giác của tam giác T_1 nên chúng đồng quy tại điểm I. Giả sử K là giao điểm của AB và B_1C_1.

Ta chỉ cần chứng minh rằng $IK//AC$.

Thật vậy, ta thấy tam giác AB_1I cân tại B_1 nên tam giác AKI cân tại K. Từ đó $KIA = KAI = IAC$, dẫn đến $IK//AC$ (đpcm).