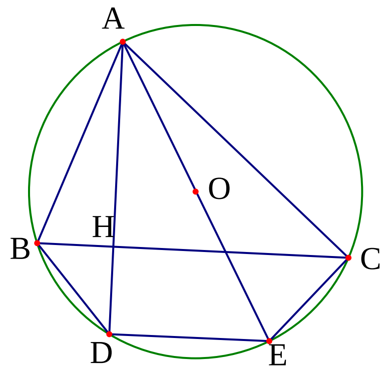
Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn O. Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $BAH = OAC$.

Lời giải:



Kẻ đường kính AE của đường tròn O. Ta thấy $ACE = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Từ đó $OAC + AEC = 90^0$ (1).

Theo giả thiết bài ra, ta có: $BAH + ABC = 90^0$ (2). Lại vì $AEC = ABC$ (cùng chắn AC) (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra $BAH = OAC$ (đpcm).

Lưu ý: Cũng có thể giải bài toán theo hướng sau: Gọi D là giao điểm của tia AH với đường tròn O, chứng tỏ tứ giác $BDEC$ là hình thang cân. Từ đó suy ra sđBD = sđCE, dẫn đến $BAD = CAE$, hay $BAH = OAC$.

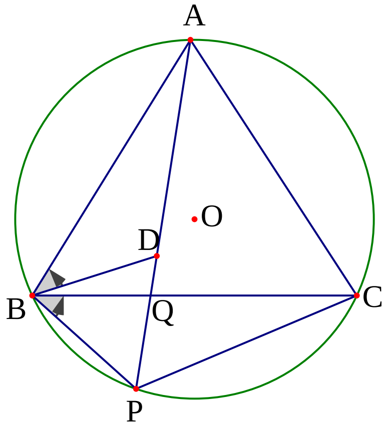
Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn O. Trên cung BC không chứa A ta lấy điểm P bất kỳ (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q.

a) Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho $PD = PB$. Chứng minh rằng ΔPDB đều.

b) Chứng minh rằng $PA = PB + PC$.

c) Chứng minh hệ thức $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC}$.

Lời giải:



a) Trước tiên ta nhận thấy rằng tam giác PBD cân tại P.

Mặt khác, $BPD = BPA = BCA = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn AB của đường tròn O).

Vậy nên tam giác PDB đều.

b) Ta đã có $PB = PD$, vậy để chứng minh $PA = PB + PC$ ta sẽ chứng minh $DA = PC$.

Thật vậy, xét hai tam giác BPC và BDA có: $BA = BC$ (giả thiết), $BD = BP$ (do tam giác BPD đều). Lại vì $ABD + DBC = 60^0$, $PBC + DBC = 60^0$ nên $ABD = PBC$.

Từ đó $\Delta BPC = \Delta BDA$ (c.g.c), dẫn đến $DA = PC$ (đpcm).

c) Xét hai tam giác PBQ và PAC ta thấy $BPQ = 60^0$, $APC = ABC = 60^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) suy ra $BPQ = APC, PBQ = PBC = PAC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn PC).

Từ đó $\Delta PBQ \sim \Delta PAC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{PC}{PA}$, hay $PQ.PA = PB.PC$.

Theo kết quả câu b, ta có $PA = PB + PC$ nên $PQ\ \ PB + PC\ \ = PB.PC$.

Hệ thức này tương đương với $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC}$ (đpcm).

Ghi chú:

- Tứ giác $ABCD$ có tính chất $AB.CD = BC.AD$ (*) nói ở ví dụ trên được gọi là tứ giác điều hòa. Loại tứ giác đặc biệt này có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học phẳng khác.

- Nếu hệ thức (*) dưới dạng $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$ và nhớ lại tính chất đường phân giác trong tam giác ta có thể nêu thêm một tính chất của tứ giác điều hòa.

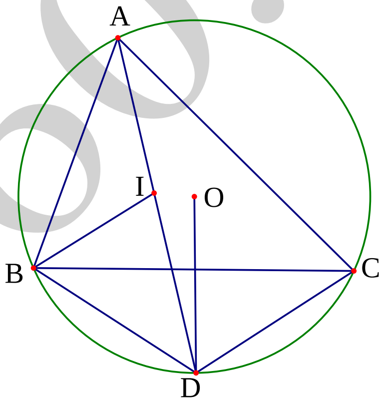
- Tứ giác $ABCD$ là một tứ giác điều hòa khi và chỉ khi các đường phân giác của góc BAD và BCD cắt nhau tại một điểm trên đường chéo BD.

- Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa khi và chỉ khi đường phân giác của góc ABC và ADC cắt nhau trên đường chéo AC.

Ví dụ 4) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại D. Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $DB = DC = DI$

Giải:

Ta luôn có $DB = DC$ do AD là phân giác trong góc A. Ta sẽ chứng minh tam giác DIB cân tại D.



Thật vậy ta có: $IBD = IBC + CBD$.

Mặt khác $CBD = CAD$

(Góc nội tiếp chắn cung CD) mà

$BAD = CAD$, $IBC = IBA$

(Tính chất phân giác) suy ra

$IBD = ABI + BAI$.

Nhưng $BID = ABI + BAI$ (Tính chất góc ngoài).

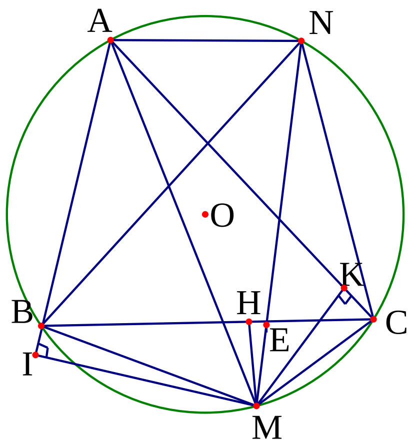
Như vậy tam giác BDI cân tại $D \Rightarrow DB = DI = DC$

Nhận xét: Thông qua bài toán này ta có thêm tính chất: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC là giao điểm của phân giác trong góc A với (O)

Ví dụ 5). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Lấy điểm M thuộc cung BC không chứa điểm A. Vẽ MH, MK, MI lần lượt vuông góc với

$\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI}$

Giải:



Trong bài toán có các tỷ số độ dài ta nghỉ đến các tam giác đồng dạng và định lý Thales.

<u>Cách 1:</u> Dựng đường thẳng qua A

song song với BC cắt (O) tại N. Gọi E là giao điểm của BC và MN

Ta có: $AB = NC$.

Ta có $BME \equiv BMN = \frac{1}{2} s\text{đ}\left(AB + AN\right) = \frac{1}{2} s\text{đ}\left(NC + AN\right) = AMC$,

$MBC = MAC \Rightarrow \Delta BME \sim \Delta AMC$ và MH, MK là hai đường cao tương ứng nên:
$\frac{AC}{MK} = \frac{BE}{MH}$, chứng minh tương tự ta cũng có: $\frac{AB}{MI} = \frac{CE}{MH}$.

Cộng hai đẳng thức trên ta có: $\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI}$

Cách 2: Ta thấy MH, MI là các đường cao của tam giác MBC, MAB nhưng hai tam giác này không đồng dạng với nhau. Điều này giúp ta nghỉ đến việc lấy một điểm E trên cạnh BC sao cho $BMA = DMC$ để tạo ra tam giác đồng dạng nhưng vẫn giữ được hai đường cao tương ứng. (Phần lời giải xin dành cho bạn đọc).