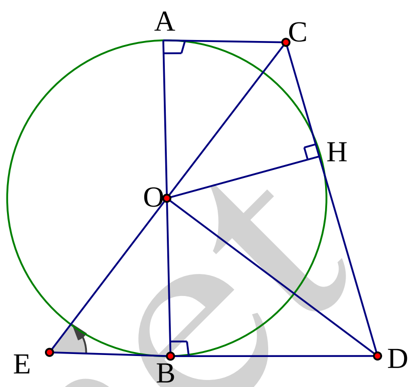
CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Ví dụ 1) Cho hình thang vuông $ABCD$ $(A = B = 90^0)$ có O là trung điểm của AB và góc $COD = 90^0$. Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.

Giải:



Kéo dài OC cắt BD tại E vì $COD = 90^0$ suy ra $EOD = 90^0$.

Xét tam giác COD và ΔEOD ta có OD chung

$$\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB} = 1 \Rightarrow OC = OD \Rightarrow \Delta COD = \Delta\Delta EOD.$$

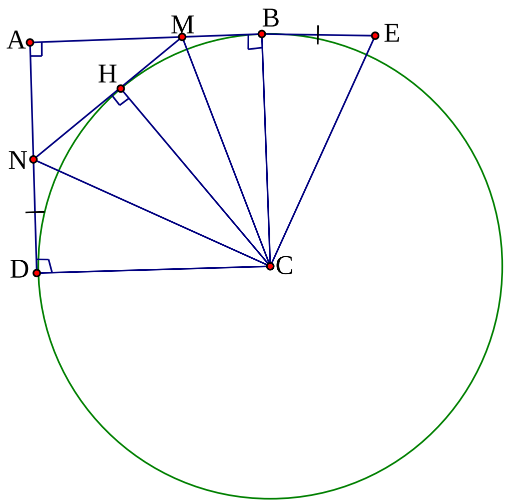
Suy ra $DC = DE$ hay tam giác ECD cân tại D.

Kẻ $OH \perp CD$ thì $\Delta OBD = \Delta OHD \Rightarrow OH = OB$ mà $OB = OA \Rightarrow OH = OB = OA$ hay A, H, B thuộc đường tròn (O).

Do đó CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.

Ví dụ 2) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N là hai điểm trên các cạnh AB, AD sao cho chu vi tam giác AMN bằng $2a$. Chứng minh đường thẳng MN luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.

Giải:



Trên tia đối của BA ta lấy điểm E sao cho $BE = ND$.

Ta có $\Delta BCE = \Delta DCN \Rightarrow CN = CE$.

Theo giả thiết ta có:

$$MN + AM + AN = AB + AD = AM + MB + AN + DN$$

$$= AM + AN + MB + BE.$$

Suy ra $MN = MB + BE = ME$.

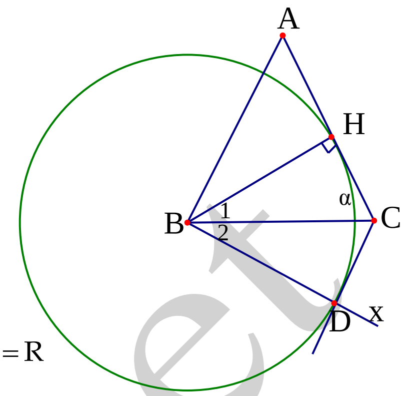
Từ đó ta suy ra $\Delta MNC = \Delta MEC \Rightarrow CMN = CMB$.

Kẻ $CH \perp MN \Rightarrow CH = CB = CD = a$.

Vậy D, H, B thuộc đường tròn tâm C bán kính $CB = a$ suy ra MN luôn tiếp xúc với đường tròn tâm C bán kính bằng a.

Ví dụ 3) Cho tam giác ABC cân tại A đường cao BH. Trên nửa mặt phẳng chứa C bờ AB vẽ $Bx \perp BA$ cắt đường tròn tâm B bán kính BH tại D. Chứng minh CD là tiếp tuyến của (B)

Giải:



Vì tam giác ABC cân tại A nên ta có: $B = C = \alpha$.

Vì $Bx \perp BA \Rightarrow B_2 + \alpha = 90^0$.

Mặt khác ta cũng có $B_1 + \alpha = 90^0 \Rightarrow B_1 = B_2$.

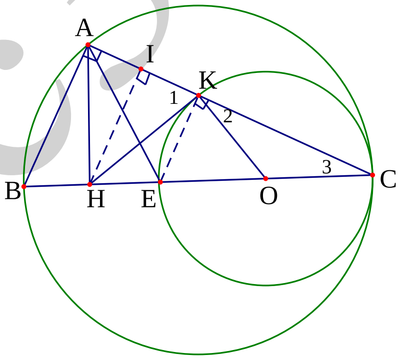
Hai tam giác BHC và ΔBDC có BC chung, $B_1 = B_2$, $BH = BD = R$

suy ra $\Delta BHC = \Delta BDC(c.g.c)$ suy ra $BHC = \Delta BDC = 90^0$.

Nói cách khác CD là tiếp tuyến của đường tròn (B)

Ví dụ 4) Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ đường cao AH. Gọi E là điểm đối xứng với B qua H. Đường tròn tâm O đường kính EC cắt AC tại K. Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Giải:



Vì tam giác EKC có một cạnh EC là đường kính của (O) nên $EKC = 90^0$.

Kẻ $HI \perp AC \Rightarrow BA // HI // EK$ suy ra $AI = IK$ từ đó ta có tam giác AHK cân tại H.

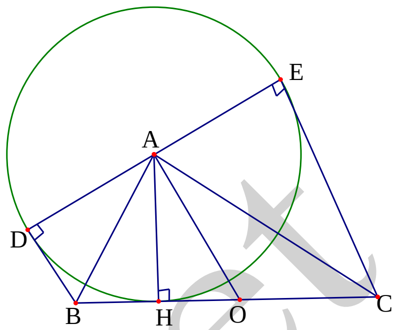
Do đó $K_1 = B$ (cùng phụ với góc hai góc bằng nhau là BAH, IHK).

Mặt khác ta cũng có: $K_2 = C_3$ (do tam giác KOC cân tại O).

Mà $B + C_3 = 90^0 \Rightarrow K_1 + K_2 = 90^0$ suy ra $HKO = 90^0$ hay HK là tiếp tuyến của (O).

Ví dụ 5) Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) (D, E là các tiếp điểm khác H). Chứng minh DE tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

Giải:



Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$DAB = HAB, CAH = CAE$.

Suy ra $DAB + CAE = HAB + CAH = BAC = 90^0$ hay

$DAB + CAE + HAB + CAH = 180^0 \Rightarrow D, A, E$ thẳng hàng.

Gọi O là trung điểm của BC thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mặt khác $AD = AE$ nên OA là đường trung bình của hình thang vuông $BDEC$ suy ra $OA \perp DE$ tại A. Nói cách khác DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) đường kính BC

Ví dụ 6) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. Giả sử $(I;r)$ tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CE lần lượt tại D, E, F. Đặt $AB = c, BC = a, AC = b, AD = x, BE = y, CF = z$.

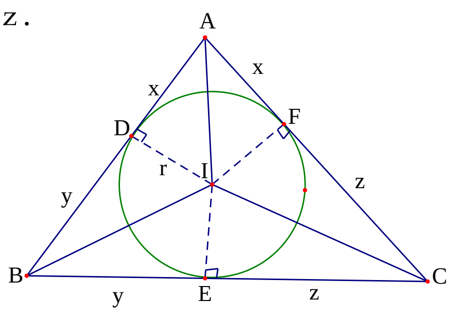
a) Hãy tính x, y, z theo a, b, c

b) Chứng minh $S = p.r$ (trong đó S là diện tích tam giác p là nữa chu vi tam giác, r là bán kính vòng tròn ngoại tiếp tam giác.

c) Chứng minh: $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ trong đó $(h_a; h_b; h_c)$ lần lượt là đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác A, B, C.

Giải:

a). Từ giả thiết ta có $AF = AD = x, BD = BE = y, CE = CF = z$.



Từ đó suy ra $\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ z + x = b \\ x + y + z = \frac{a+b+c}{2} \end{cases}$.

Lần lượt trừ từng vế phương trình (4) của hệ cho các phương trình ta thu được:

$$\begin{cases} z = \dfrac{a+b-c}{2} = p-c \\ y = \dfrac{a+c-b}{2} = p-b \\ x = \dfrac{b+c-a}{2} = p-a \end{cases}$$

b). Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta IAB} + S_{\Delta IAC} + S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2}(r.AB + r.AC + r.BC) = \frac{1}{2}r.2p = p.r$

c). Ta có $S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S} \Leftrightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2S}(a+b+c) = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$