

TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHON

KIẾN THỨC CƠ BẢN

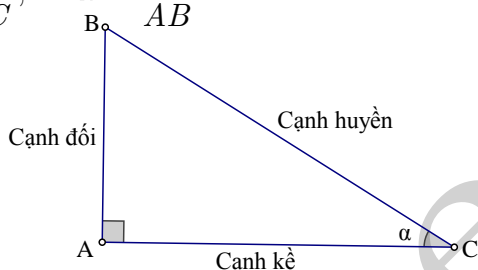
1. Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α (hình) được định nghĩa như sau:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}; \cos \alpha = \frac{AC}{BC}; \tan \alpha = \frac{AB}{AC}; \cot \alpha = \frac{AC}{AB}$$

+ Nếu α là một góc nhọn thì

$$0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1;$$

$$\tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$$



2. Với hai góc α, β mà $\alpha + \beta = 90^\circ$,

$$\text{ta có: } \sin \alpha = \cos \beta; \cos \alpha = \sin \beta; \tan \alpha = \cot \beta; \cot \alpha = \tan \beta.$$

Nếu hai góc nhọn α và β có $\sin \alpha = \sin \beta$ hoặc $\cos \alpha = \cos \beta$ thì $\alpha = \beta$.

$$3. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

4. Với một số góc đặc biệt ta có:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1; \cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

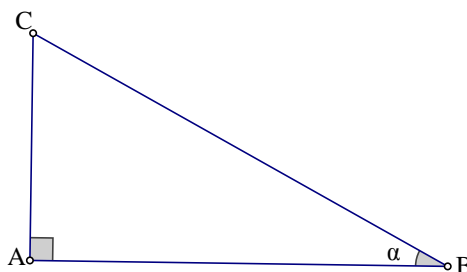
Ví dụ 1. Biết $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$.

Giải:

Cách 1. Xét $\triangle ABC$ vuông tại A.

$$\text{Đặt } B = \alpha. \text{ Ta có: } \sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$$

$$\text{suy ra } \frac{AC}{5} = \frac{BC}{13} = k, \text{ do đó}$$



$AC = 5k, BC = 13k$. Tam giác ABC vuông tại A nên:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 13k^2 - 5k^2 = 144k^2, \text{ suy ra } AB = 12k.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}; \tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}; \cot \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

Cách 2. Ta có $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{25}{169}$, mà $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, do đó

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}, \text{ suy ra } \cos \alpha = \frac{12}{13}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{12} = \frac{5}{12}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{12}{5}.$$

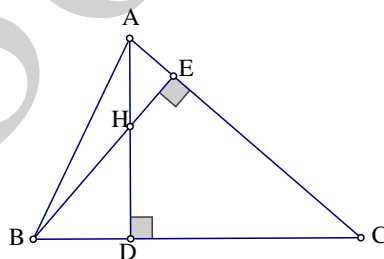
Ở cách giải thứ nhất ta biểu thị độ dài các cạnh của tam giác ABC theo đại lượng k rồi sử dụng định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn để tính $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$. Ở cách giải thứ hai, ta sử dụng giả thiết $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ để tính $\sin^2 \alpha$ rồi tính $\cos \alpha$ từ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Sau đó ta tính $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ qua $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H . Biết $HD : HA = 1 : 2$. Chứng minh rằng $\tan B \cdot \tan C = 3$.

Giải:

$$\text{Ta có: } \tan B = \frac{AD}{BD}; \tan C = \frac{AD}{CD}.$$

$$\text{Suy ra } \tan B \cdot \tan C = \frac{AD^2}{BD \cdot CD} \quad (1)$$



$$\angle HBD = \angle CAD \text{ (cùng phụ với } \angle ACB); \angle HDB = \angle ADC = 90^\circ.$$

$$\text{Do đó } \triangle BDH \sim \triangle ADC \text{ (g.g), suy ra } \frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}, \text{ do đó } BD \cdot DC = DH \cdot AD \quad (2). \text{ Từ (1)}$$

$$\text{và (2) suy ra } \tan B \cdot \tan C = \frac{AD^2}{DH \cdot AD} = \frac{AD}{DH} \quad (3). \text{ Theo giả thiết } \frac{HD}{AH} = \frac{1}{2} \text{ suy ra}$$

$$\frac{HD}{AH + HD} = \frac{1}{2 + 1} \text{ hay } \frac{HD}{AD} = \frac{1}{3}, \text{ suy ra } AD = 3HD. \text{ Thay vào (3) ta được:}$$

$$\tan B \cdot \tan C = \frac{3HD}{DH} = 3.$$

Ví dụ 3. Biết $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{12}{25}$. Tính $\sin \alpha, \cos \alpha$.

Giải:

Biết $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{12}{25}$. Để tính $\sin \alpha, \cos \alpha$ ta cần tính $\sin \alpha + \cos \alpha$ rồi giải phương trình với ẩn là $\sin \alpha$ hoặc $\cos \alpha$.

Ta có: $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 + 2 \cdot \frac{12}{25} = \frac{49}{25}$. Suy ra

$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$ nên $\sin \alpha = \frac{7}{5} - \cos \alpha$. Từ đó ta có:

$$\cos \alpha \left(\frac{7}{5} - \cos \alpha \right) = \frac{12}{25} \Leftrightarrow \frac{7}{5} \cos \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{12}{25}$$

$$\Leftrightarrow 25 \cos^2 \alpha - 35 \cos \alpha + 12 = 0 \Leftrightarrow 5 \cos \alpha - 4 \quad -3 \quad 5 \cos \alpha - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \cos \alpha - 4 \quad 5 \cos \alpha - 3 = 0. \text{ Suy ra } \cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ hoặc } \cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

+ Nếu $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ thì $\sin \alpha = \frac{12}{25} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$.

+ Nếu $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ thì $\sin \alpha = \frac{12}{25} : \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$.

Vậy $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$ hoặc $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$.