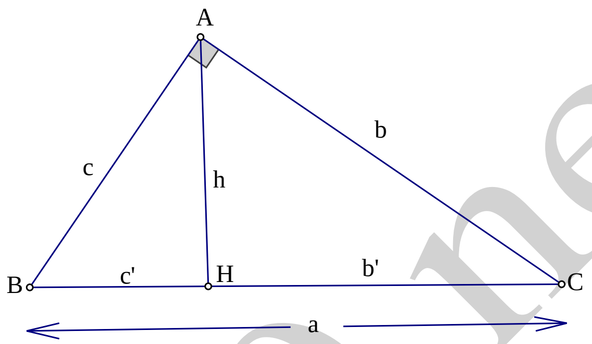
HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO

KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khi giải các bài toán liên quan đến cạnh và đường cao trong tam giác vuông, ngoài việc nắm vững các kiến thức về định lý Talet, về các trường hợp đồng dạng của tam giác, cần phải nắm vững các kiến thức sau

Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, ta có:



1) $a^2 = b^2 + c^2$.

2) $b^2 = a.b'; c^2 = a.c'$

3) $h^2 = b'.c'$

4) $a.h = b.c$.

5) $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

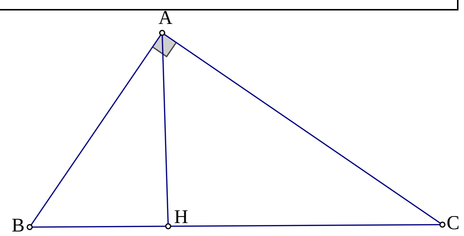
6) $\dfrac{b'}{a} = \dfrac{b^2}{a^2}$.

Chú ý: Diện tích tam giác vuông: $S = \dfrac{1}{2}ab$

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB : AC = 3 : 4$ và $AB + AC = 21cm$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC.

b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.



Giải:

a). Theo giả thiết: $AB : AC = 3 : 4$,

suy ra $\dfrac{AB}{3} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{AB + AC}{3 + 4} = 3$. Do đó $AB = 3.3 = 9\ \ cm$; $AC = 3.4 = 12\ \ cm$.

Tam giác ABC vuông tại A, theo định lý Pythagore ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$, suy ra $BC = 15cm$.

b) Tam giác ABC vuông tại A, ta có $AH.BC = AB.AC$, suy ra

$$AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{9.12}{15} = 7{,}2\ \ cm\ \ .$$

$AH^2 = BH.HC$. Đặt $BH = x\ \ 0 < x < 9$ thì $HC = 15 - x$, ta có:

$$7{,}2\ ^2 = x\ \ 15 - x\ \Leftrightarrow x^2 - 15x + 51{,}84 = 0 \Leftrightarrow x\ \ x - 5{,}4\ \ = 9{,}6\ \ x - 5{,}4\ \ = 0$$

$\Leftrightarrow\ \ x - 5{,}4\ \ \ x - 9{,}6\ \ = 0 \Leftrightarrow x = 5{,}4$ hoặc $x = 9{,}6$ (loại) Vậy $BH = 5{,}4cm$. Từ đó $HC = BC - BH = 9{,}6\ \ cm\ \ .$

Chú ý: Có thể tính BH như sau:

$AB^2 = BH.BC$ suy ra $BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{9^2}{15} = 5{,}4\ \ cm\ \ .$

Ví dụ 2: Cho tam giác cân ABC có đáy $BC = 2a$, cạnh bên bằng $b\ \ b > a\ \ .$

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Dựng $BK \perp AC$. Tính tỷ số $\dfrac{AK}{AC}$.

Giải:

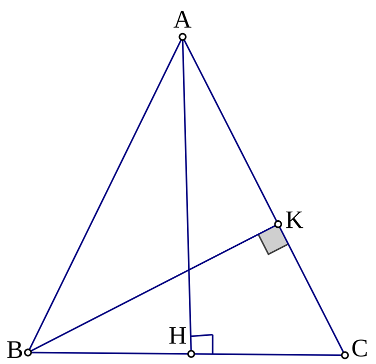
a). Gọi H là trung điểm của BC. Theo định lý Pitago ta có:

$AH^2 = AC^2 - HC^2 = b^2 - a^2$

Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}a\sqrt{b^2 - a^2}$

$\Rightarrow AH = \sqrt{b^2 - a^2}$

b). Ta có $\dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}BK.AC = S_{ABC}$



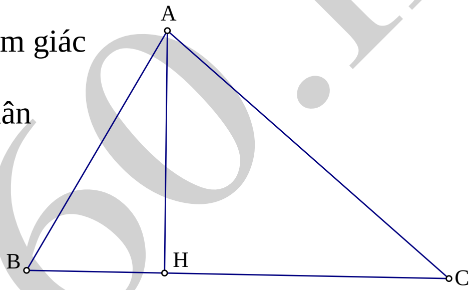
Suy ra $BK = \dfrac{BC.AH}{AC} = \dfrac{2a}{b}\sqrt{b^2 - a^2}$. Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông AKB ta có: $AK^2 = AB^2 - BK^2 = b^2 - \dfrac{4a^2}{b^2}\left(b^2 - a^2\right) = \dfrac{\left(b^2 - 2a^2\right)^2}{b^2}$. Suy ra $AK = \dfrac{\left|b^2 - 2a^2\right|}{b}$ do đó $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{\left|b^2 - 2a^2\right|}{b^2}$.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC với các đỉnh A, B, C và các cạnh đối diện với các đỉnh tương ứng là: a, b, c.

a) Tính diện tích tam giác ABC theo a

b) Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

Giải:



a). Ta giả sử góc A là góc lớn nhất của tam giác $ABC \Rightarrow B, C$ là các góc nhọn. Suy ra chân đường cao hạ từ A lên BC là điểm H thuộc cạnh BC.

Ta có: $BC = BH + HC$. Áp dụng định lý Pi ta go cho các tam giác vuông AHB, AHC ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2, AC^2 = AH^2 + HC^2$

Trừ hai đẳng thức trên ta có:

$c^2 - b^2 = HB^2 - HC^2 = \left(HB + HC\right)\left(HB - HC\right) = a.\left(HB - HC\right)$

$\Rightarrow HB - HC = \dfrac{c^2 - b^2}{a}$ ta cũng có: $HB + HC = a \Rightarrow BH = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông

$AHB \Rightarrow AH^2 = c^2 - \left(\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 = \left(c - \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c + \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$

$= \left[\dfrac{\left(a + c\right)^2 - b^2}{2a}\right].\left[\dfrac{b^2 - \left(a - c\right)^2}{2a}\right] = \dfrac{\left(a + b + c\right)\left(a + c - b\right)\left(b + a - c\right)\left(b + c - a\right)}{4a^2}$ Đặt $2p = a + b + c$ thì

$AH^2 = \dfrac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2} \Rightarrow AH = 2\dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$. Từ đó tính được

$S = \dfrac{1}{2}BC.AH = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

b). Từ câu $a)$ ta có: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$(p-a)(p-b)(p-c) \le \left(\dfrac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \dfrac{p^3}{27}$. Suy ra $S \le \sqrt{p.\dfrac{p^3}{27}} = \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Hay

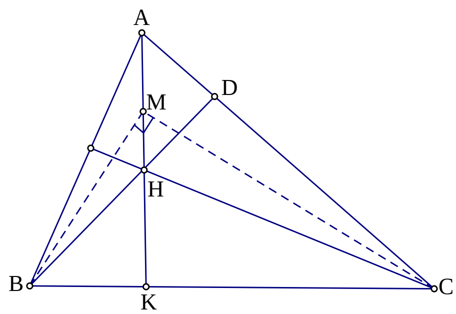
$S \le \dfrac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}$. Mặt khác ta dễ chứng minh được: $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$ suy ra

$S \le \dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{12\sqrt{3}} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S$

Dấu bằng xảy ra hki và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 4. Cho tam giác nhọn ABC đường cao CK; H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên CK sao cho $AMB = 90^0$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các tam giác AMB, ABC và ABH. Chứng minh rằng $S = \sqrt{S_1.S_2}$.

Giải:



Tam giác AMB vuông tại M có

$MK \perp AB$ nên $MK^2 = AK.BK$ (1).

$\Delta AHK \sim \Delta CBK$ vì có

$AKH = CKB = 90^0$; $KAH = KCB$

(cùng phụ với ABC). Suy ra $\dfrac{AK}{CK} = \dfrac{HK}{BK}$, do đó $AK.KB = CK.KH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MK^2 = CK.HK$ nên $MK = \sqrt{CK.HK}$;

$S_{AMB} = \dfrac{1}{2}.AB.MK = \dfrac{1}{2}AB.\sqrt{CK.HK} = \sqrt{\dfrac{1}{2}AB.CK.\dfrac{1}{2}AB.HK} = \sqrt{S_1S_2}$.

Vậy $S = \sqrt{S_1.S_2}$.

Ví dụ 5. Cho hình thang $ABCD$ có $A = D = 90^0, B = 60^0, CD = 30cm, CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.

Giải:

Ta có $CAD = ABC = 60^0$ (cùng phụ với CAB), vì thế trong tam giác vuông ACD ta có $AC = 2AD$.

Theo định lý Pythagore thì: $AC^2 = AD^2 + DC^2$ hay $\ 2AD\ ^2 = AD^2 + 30^2$

Suy ra $3AD^2 = 900 \Leftrightarrow AD^2 = 300$ nên $AD = 10\sqrt{3}\ \ cm\ \ .$

Kẻ $CH \perp AB$. Tứ giác $AHCD$ là hình chữ nhật vì có $A = D = H = 90^0$, suy ra $AH = CD = 30cm; CH = AD = 10\sqrt{3}\ \ cm\ \ .$

Tam giác ACB vuông tại C, ta có: $CH^2 = HA.HB$, suy ra

$HB = \dfrac{CH^2}{HA} = \dfrac{\ 10\sqrt{3}\ ^2}{30} = \dfrac{300}{30} = 10\ \ cm$, do đó $AB = AH + HB = 30 + 10 = 40\ \ cm$.

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}CH\ \ AB + CD\ \ \dfrac{1}{2}.10\sqrt{3}.\ \ 40 + 30\ \ = 350\sqrt{3}\ \ cm^2\ \ .$

Vậy diện tích hình thang $ABCD$ bằng $350\sqrt{3}cm^2$.