Các dạng toán ôn thi vào lớp 10

Dạng I: RÚT GỌN BIỂU THỨC

Có chứa căn thức bậc hai

I/ Biểu thức số học

Phương pháp:

Dùng các Phương pháp biến đổi căn thức(đưa ra ; đưa vào; ;khử; trục; cộng,trừ căn thức đồng dạng; rút gọn phân số…) để rút gọn biểu thức.

Bài tập: Thực hiện phép tính:

1) $2\sqrt{5}-\sqrt{125}-\sqrt{80}+\sqrt{605}$;

2) $\dfrac{10+2\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\dfrac{8}{1-\sqrt{5}}$;

3) $\sqrt{15-\sqrt{216}}+\sqrt{33-12\sqrt{6}}$;

4) $\dfrac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$;

5) $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}+\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$;

6) $2\sqrt{\dfrac{16}{3}}-3\sqrt{\dfrac{1}{27}}-6\sqrt{\dfrac{4}{75}}$;

7) $2\sqrt{27}-6\sqrt{\dfrac{4}{3}}+\dfrac{3}{5}\sqrt{75}$;

8) $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}.(3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

9) $\sqrt{8\sqrt{3}}-2\sqrt{25\sqrt{12}}+4\sqrt{\sqrt{192}}$;

10) $\sqrt{2-\sqrt{3}}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$;

11) $\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$;

12) $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$;

13) $\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(49-20\sqrt{6}\right)\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

14) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

15) $\dfrac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\dfrac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}$;

16) $\dfrac{\left(\sqrt{5}+2\right)^2-8\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}$;

18) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{6}{\sqrt{3}-3}$;

19) $\left(\sqrt{2}+1\right)^3-\left(\sqrt{2}-1\right)^3$

20) $\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{\sqrt{3}+1}}+\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{\sqrt{3}+1}}$.

II/ Biểu thức đại số:

Phương pháp:

- Phân tích đa thức tử và mẫu thành nhân tử;
- Tìm ĐKXĐ (Nếu bài toán chưa cho ĐKXĐ)
- Rút gọn từng phân thức(nếu được)
- Thực hiện các phép biến đổi đồng nhất như:
  + Quy đồng(đối với phép cộng trừ) ; nhân ,chia.
  + Bỏ ngoặc: bằng cách nhân đơn ; đa thức hoặc dùng hằng đẳng thức
  + Thu gọn: cộng, trừ các hạng tử đồng dạng.
  + Phân tích thành nhân tử – rút gọn

Chú ý: - Trong mỗi bài toán rút gọn thường có các câu thuộc các loại toán: Tính giá trị biểu thức; giải Phương trình; bất Phương trình; tìm giá trị của biến để biểu thức có giá trị nguyên; tìm giá trị nhỏ nhất ,lớn nhất…Do vậy ta phải áp dụng các Phương pháp giải tương ứng, thích hợp cho từng loại bài.

ví dụ: Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right):\dfrac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$

a/ Rút gọn P.

b/ Tìm giá trị của a để biểu thức P có giá trị nguyên.

Giải: a/ Rút gọn P:

- Phân tích: $P=\left[\dfrac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right]:\dfrac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)^2}$

- ĐKXĐ: $a>0$; $\sqrt{a}-1\neq 0\Leftrightarrow a\neq 1$

- Quy đồng: $P=\dfrac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}.\dfrac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}+1}$

- Rút gọn: $P=\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$.

b/ Tìm giá trị của a để P có giá trị nguyên:

- Chia tử cho mẫu ta được: $P=1-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

- Lý luận: P nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{a}$ là ước của 1 là ± 1. $\Rightarrow \sqrt{a}=\begin{cases}-1(ktm)\\ 1\Leftrightarrow a=1\end{cases}$

Vậy với a = 1 thì biểu thức P có giá trị nguyên.

Bài tập:

Bài 1: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A;
b) Tìm giá trị của x để A > - 6.

Bài 2: Cho biểu thức

$$B=\left(\frac{\sqrt{x}}{x-4}+\frac{2}{2-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\left(\sqrt{x}-2+\frac{10-x}{\sqrt{x}+2}\right)$$

a) Rút gọn biểu thức B;
b) Tìm giá trị của x để A > 0.

Bài 3: Cho biểu thức $C=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{3}{x\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn biểu thức C;
b) Tìm giá trị của x để C < 1.

Bài 4: Rút gọn biểu thức : $D=\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\dfrac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$

Bài5: Cho các biểu thức: $P=\dfrac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ và $Q=\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2}$

a) Rút gọn biểu thức P và Q;
b) Tìm giá trị của x để P = Q.

Bài 6: Cho biểu thức: $P=\dfrac{2x+2}{\sqrt{x}}+\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức P
b) So sánh P với 5.
c) Với mọi giá trị của x làm P có nghĩa, chứng minh biểu thức $\frac{8}{P}$ chỉ nhận đúng một giá trị nguyên.

Bài 7: Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{1}{x-1}$

a) Tìm điều kiện để P có nghĩa, rút gọn biểu thức P;
b) Tìm các số tự nhiên x để $\frac{1}{P}$ là số tự nhiên;
c) Tính giá trị của P với $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

Bài 8: Cho biểu thức : $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right):\left(2-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức P;

Tìm x để $\dfrac{1}{P}\le-\dfrac{5}{2}$

Bài 9: Cho biểu thức :

$$P=\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right).\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)$$

a) Rút gọn P
b) Tìm a để $P<7-4\sqrt{3}$

Bài 10: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9}\right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1\right)$$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Bài 11: Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} - 1\right) : \left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}\right)$$

a) Rút gọn P
b) Tìm giá trị của x để P<1

Bài 12: Cho biểu thức :

$$P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P = \frac{1}{2}$

c) Chứng minh $P \le \frac{2}{3}$

Bài 13: Cho biểu thức:

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+m} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-m} - \frac{m^2}{4x-4m^2} \qquad \text{với } m > 0$$

a) Rút gọn P
b) Tính x theo m để P = 0.
c) Xác định các giá trị của m để x tìm được ở câu b thoả mãn điều kiện x >1

Bài 14: Cho biểu thức :

$$P = \frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1} - \frac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$$

a) Rút gọn P
b) Tìm a để P = 2
c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P ?

Bài 15: Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1\right)$$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P nếu $a = 2 - \sqrt{3}$ và $b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P nếu $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$

Bài 16: Cho biểu thức :

$$P = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)$$

a) Rút gọn P
b) Với giá trị nào của a thì $P = 7$
c) Với giá trị nào của a thì $P > 6$

Bài 17: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$$

a) Rút gọn P
b) Tìm các giá trị của a để $P < 0$
c) Tìm các giá trị của a để $P = -2$

Bài 18: Cho biểu thức:

$$P = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$$

a) Tìm điều kiện để P có nghĩa.
b) Rút gọn P
c) Tính giá trị của P khi $a = 2\sqrt{3}$ và $b = \sqrt{3}$

Bài 19: Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

a) Rút gọn P
b) Chứng minh rằng $P > 0 \quad \forall x \neq 1$

Bài 20: Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}\right)$$

a) Rút gọn P
b) Tính $\sqrt{P}$ khi $x = 5 + 2\sqrt{3}$

Bài 21: Cho biểu thức:

$$P = 1 : \left(\frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{4-x} - \frac{2}{4-2\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{4-2\sqrt{x}}$$

a) Rút gọn P
b) Tìm giá trị của x để P = 20

Bài 22: Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

a) Rút gọn P
b) Chứng minh $P \geq 0$

Bài 23: Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} \right) . \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} \right) : \frac{a-b}{a+\sqrt{ab}+b} \right]$$

a) Rút gọn P
b) Tính P khi a =16 và b = 4

Bài 24: Cho biểu thức:

$$P = 1 + \left(\frac{2a+\sqrt{a}-1}{1-a} - \frac{2a\sqrt{a}-\sqrt{a}+a}{1-a\sqrt{a}} \right) . \frac{a-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-1}$$

a) Rút gọn P
b) Cho $P = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$ tìm giá trị của a
c) Chứng minh rằng $P > \frac{2}{3}$

Bài 25: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left(\frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \right)$$

a) Rút gọn P
b) Với giá trị nào của x thì P < 1

Bài 26: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{3\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}+b} - \frac{3a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) : \frac{(a-1).\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{2a+2\sqrt{ab}+2b}$$

a) Rút gọn P

b) Tìm những giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên

Bài 27: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của a để $P > \frac{1}{6}$

Bài 28: Cho biểu thức:

$$P = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3 y} + \sqrt{xy^3}}$$

a) Rút gọn P

b) Cho x.y=16. Xác định x,y để P có giá trị nhỏ nhất

Bài 29: Cho biểu thức :

$$P = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{xy}-2y} - \frac{2x}{x+\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}} \cdot \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

a) Rút gọn P

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x để y=625 và P<0,2

Bài 30: Cho biểu thức:

$$P = 1 : \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right).$$

a) Rút gọn P

b) So sánh P với 3

Dạng II:

ĐỒ THỊ $y = ax + b (a \neq 0) \& y = a'x^2 (a' \neq 0)$
VÀ TƯƠNG QUAN GIỮA CHÚNG

I/.Điểm thuộc đường – đường đi qua điểm.
Điểm $A(x_A; y_A)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$.
Ví dụ 1: Tìm hệ số a của hàm số: $y = ax^2$ biết đồ thị hàm số của nó đi qua điểm A(2;4)
Giải:
Do đồ thị hàm số đi qua điểm A(2;4) nên: $4 = a.2^2 \Leftrightarrow a = 1$
Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ cho A(-2;2) và đường thẳng (d) có Phương trình:
y = -2(x + 1). Đường thẳng (d) có đi qua A không?
Giải:
Ta thấy -2.(-2 + 1) = 2 nên điểm A thuộc v ào đường thẳng (d)
II.Cách tìm giao điểm của hai đường y = f(x) và y = g(x).
Bước 1: Hoành độ giao điểm là nghiệm của Phương trình f(x) = g(x) **(*)**
Bước 2: Lấy nghiệm đó thay vào 1 trong hai công thức y = f(x) hoặc y = g(x) để Tìm tung độ giao điểm.
Chú ý: Số nghiệm của Phương trình (*) là số giao điểm của hai đường trên.
III.Quan hệ giữa hai đường thẳng.
Xét hai đường thẳng : $(d_1) : y = a_1x + b_1$. và $(d_2) : y = a_2x + b_2$.
a) (d_1) cắt $(d_2) \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$.
b) $d_1) // (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$
c) $d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$
d) $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow a_1.a_2 = -1$

IV.Tìm điều kiện để 3 đường thẳng đồng qui.
Bước 1: Giải hệ Phương trình gồm hai đường thẳng không chứa tham số để Tìm (x;y).
Bước 2: Thay (x;y) vừa Tìm được vào Phương trình còn lại để Tìm ra tham số .
V.Quan hệ giữa (d): y = ax + b và (P): $y = a'x^2$ ($a' \neq 0$).
1.Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).
Bước 1: Tìm hoành độ giao điểm là nghiệm của Phương trình:
$$a'x^2 = ax + b \quad (\#) \Leftrightarrow a'x^2 - ax - b = 0$$
Bước 2: Lấy nghiệm đó thay vào 1 trong hai công thức y = ax +b hoặc $y = ax^2$ để Tìm tung độ giao điểm.
Chú ý: Số nghiệm của Phương trình (#) là số giao điểm của (d) và (P).
2.Tìm điều kiện để (d) và (P) cắt;tiếp xúc; không cắt nhau:
Từ Phương trình (#) ta có: $a'x^2 - ax - b = 0 \Rightarrow \Delta = (-a)^2 + 4a'.b$
a) (d) và (P) cắt nhau ⇔ Phương trình (#) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$
b) (d) và (P) tiếp xúc với nhau ⇔ Phương trình (#) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$
c) (d) và (P) không giao nhau ⇔ Phương trình (#) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$

VI.<u>Viết Phương trình đường thẳng y = ax + b</u> :

1.Biết quan hệ về hệ số góc(//hay vuông góc) và đi qua điểm A(x_0;y_0)

Bước 1: Dựa vào quan hệ song song hay vuông góc để Tìm hệ số a.

Bước 2: Thay a vừa Tìm được và x_0;y_0 vào cụng thức y = ax + b để Tìm b.

2.Biết đồ thị hàm số đi qua điểm A(x_1;y_1) và B(x_2;y_2).

Do đồ thị hàm số đi qua điểm A(x_1;y_1) và B(x_2;y_2) nên ta có hệ Phương trình:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

Giải hệ Phương trình Tìm a,b.

3.Biết đồ thị hàm số đi qua điểm A(x_0;y_0) và tiếp xỳc với (P): y = a'x^2

+) Do đường thẳng đi qua điểm A(x_0;y_0) nên có Phương trình :

$y_0 = ax_0 + b$

+) Do đồ thị hàm số y = ax + b tiếp xỳc với (P): y = a'x^2 nờn:

Pt: a'x^2 = ax + b cú nghiệm kộp$\Leftrightarrow \Delta = 0$

+) Giải hệ $\begin{cases} y_0 = ax_0 + b \\ \Delta = 0 \end{cases}$ để Tìm a,b.

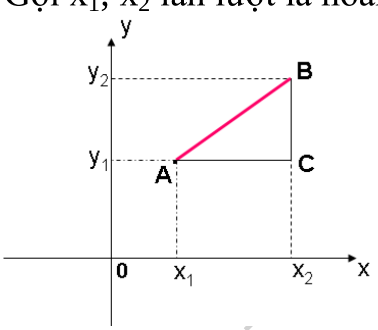
VII.<u>Chứng minh đường thẳng luôn đi qua 1 điểm cố định</u> (giả sử tham số là m).

+) Giả sử A(x_0;y_0) là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua với mọi m, thay x_0;y_0 vào Phương trình đường thẳng chuyển về Phương trình ẩn m hệ số x_0;y_0 nghiệm đúng với mọi m.

+) Đồng nhất hệ số của Phương trình trờn với 0 giải hệ Tìm ra x_0;y_0.

VIII.<u>Tìm khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ A; B</u>

Gọi x_1; x_2 lần lượt là hoành độ của A và B; y_1,y_2 lần lượt là tung độ của A và B



Khi đó khoảng cách AB được tính bởi định lý Pi Ta Go trong tam giác vuông ABC:

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

IX. <u>Một số ứng dụng của đồ thị hàm số</u>:

1.Ứng dụng vào Phương trình.

2.Ứng dụng vào bài toỏn cực trị.

<u>Bài tập về hàm số.</u>

Bài 1. cho parabol (p): $y = 2x^2$.
1. tìm giá trị của a,b sao cho đường thẳng y = ax+b tiếp xúc với (p) và đi qua A(0;-2).
2. tìm Phương trình đường thẳng tiếp xúc với (p) tại B(1;2).
3. Tìm giao điểm của (p) với đường thẳng y = 2m +1.

Bài 2: Cho (P) $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): y = ax + b .
1. Xác định a và b để đường thẳng (d) đi qua điểm A(-1;0) và tiếp xúc với (P).
2. Tìm toạ độ tiếp điểm.

Bài 3: Cho (P) $y = x^2$ và đường thẳng (d) y = 2x + m
1. Vẽ (P)
2. Tìm m để (P) tiếp xúc (d)
3. Tìm toạ độ tiếp điểm.

Bài 4: Cho (P) $y = -\frac{x^2}{4}$ và (d): y = x + m
1. Vẽ (P)
2. Xác định m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B
3. Xác định Phương trình đường thẳng (d') song song với đường thẳng (d) và cắt (P) tại điẻm có tung độ bằng -4
4. Xác định Phương trình đường thẳng (d'') vuông góc với (d') và đi qua giao điểm của (d') và (P)

Bài 5: Cho hàm số (P): $y = x^2$ và hàm số(d): y = x + m
1. Tìm m sao cho (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B
2. Xác định Phương trình đường thẳng (d') vuông góc với (d) và tiếp xúc với (P)
3. Tìm m sao cho khoảng cách giữa hai điểm A và B bằng $3\sqrt{2}$

Bài 6: Cho điểm A(-2;2) và đường thẳng (d_1) y = -2(x+1)
1. Điểm A có thuộc (d_1) không ? Vì sao ?
2. Tìm a để hàm số (P): $y = a.x^2$ đi qua A
3. Xác định Phương trình đường thẳng (d_2) đi qua A và vuông góc với (d_1)
4. Gọi A và B là giao điểm của (P) và (d_2) ; C là giao điểm của (d_1) với trục tung . Tìm toạ độ của B và C . Tính chu vi tam giác ABC?

Bài 7: Cho (P) $y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (d) đi qua hai điểm A và B trên (P) có hoành độ lần lượt là
-2 và 4
1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số trên
2.Viết Phương trình đường thẳng (d)

3.Tìm điểm M trên cung AB của (P) tương ứng hoành độ $x \in [-2;4]$ sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

(Gợi ý: cung AB của (P) tương ứng hoành độ $x \in [-2;4]$ có nghĩa là A(-2; y_A) và B(4; y_B)$\Rightarrow$ tính $y_{A;}; y_B$;S_{MAB} có diện tích lớn nhất$\Leftrightarrow$M là tiếp điểm của đường thẳng (d_1)với (P)và(d_1)//(d).

Bài 8: Cho (P): $y = -\frac{x^2}{4}$ và điểm M (1;-2)

1. Viết Phương trình đường thẳng (d) đi qua M và có hệ số góc là m
   HD: Phương trình có dạng: $y = ax + b$ mà a = m. thay x = 1; y = -2 tính b = - m-2. vậy PT: $y = mx - m - 2$.
2. Chứng minh: (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B khi m thay đổi
3. Gọi $x_A; x_B$ lần lượt là hoành độ của A và B .Xác định m để $x_A^2 x_B + x_A x_B^2$ đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị đó?

Bài 9: Cho hàm số (P): $y = x^2$

1. Vẽ (P)
2. Gọi A,B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 2. Viết ph. trình đường thẳng AB
3. Viết Phương trình đường thẳng (d) song song với AB và tiếp xúc với (P)

Bài 10: Trong hệ toạ độ xOy cho Parabol (P) $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - 2m - 1$

1. Vẽ (P)
2. Tìm m sao cho (P) và (d) tiếp xúc nhau.Tìm toạ độ tiếp điểm
3. Chứng tỏ rằng (d) luôn đi qua một điểm cố định

Bài 11: Cho (P): $y = -\frac{1}{4}x^2$ và điểm I(0;-2). Gọi (d) là đường thẳng qua I và có hệ số góc m.

1. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B với $\forall m \in R$
2. Tìm giá trị của m để đoạn AB ngắn nhất

Bài 12: Cho (P): $y = \frac{x^2}{4}$ và đường thẳng (d) đi qua điểm I($\frac{3}{2}$;1) có hệ số góc là m

1. Vẽ (P) và viết Phương trình (d)
2. Tìm m sao cho (d) tiếp xúc (P)
3. Tìm m sao cho (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt

Bài 13: Cho (P): $y = \frac{x^2}{4}$ và đường thẳng (d): $y = -\frac{x}{2} + 2$

1. Vẽ (P) và (d)
2. Tìm toạ độ giao điểm của (P) và (d)

3. Tìm toạ độ của điểm thuộc (P) sao cho tại đó đường tiếp tuyến của (P) song song với (d)

Bài 14: Cho (P): $y = x^2$
1.Gọi A và B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là -1 và 2 . Viết ph. trình đường thẳng AB
2.Viết Phương trình đường thẳng (d) song song với AB và tiếp xúc với (P)

Bài 14: Cho (P): $y = 2x^2$
1.Vẽ (P)
2.Trên (P) lấy điểm A có hoành độ x = 1 và điểm B có hoành độ x = 2 . Xác định các giá trị của m và n để đường thẳng (d): y = mx + n tiếp xúc với (P) và song song với AB

Bài 15: Xác định giá trị của m để hai đường thẳng có Phương trình $\begin{matrix}(d_1): x + y = m \\ (d_2): mx + y = 1\end{matrix}$ cắt nhau tại một điểm trên (P) $y = -2x^2$.

Dạng III:

Phương trình và Hệ Phương trình

-------------ᘐᘘ-----------

A/ Phương trình bậc nhất một ẩn – giảI và biện luận:

+ Phương trình bậc nhất một ẩn có dạng $ax+b=0 (a\neq 0)$

+ Giải và biện luận:

- Nếu $a=0; b=0$ thì Phương trình vô số nghiệm.
- Nếu $a=0; b\neq 0$ thì Phương trình vô nghiệm.
- Nếu $a\neq 0$ thì Phương trình có một nghiệm duy nhất $x=-\frac{b}{a}$

ví dụ: Giải và biện luận Phương trình sau: $4m^2(x-1)=x-4m+1$

Giải: $4m^2(x-1)=x-4m+1 \Leftrightarrow 4m^2x-4m^2-x=-4m+1 \Leftrightarrow (4m^2-1)x=4m^2-4m+1$

$\Leftrightarrow (2m+1)(2m-1).x=(2m-1)^2$

Biện luận: + Nếu $m\neq \pm\frac{1}{2}$ thì Phương trình có một nghiệm: $x=\frac{2m-1}{2m+1}$

+ Nếu $m=\frac{1}{2}$ thì Phương trình có dạng: $0.x=0$ nên Phương trình vô số nghiệm.

+ Nếu $m=-\frac{1}{2}$ thì Phương trình có dạng: $0.x=2.(-\frac{1}{2})\neq 0$ nên Phương trình vô nghiệm.

Bài tập: Giải và biện luận các Phương trình sau:

Bài 1. $\frac{m(x-1)}{2}-\frac{m+x}{3}=2$

Bài 2. $\frac{x+a-2}{a-1}+\frac{x-a}{a+1}+\frac{x+2a}{1-a^2}=0 \left(a\neq \pm 1\right)$ HD: Quy đồng- thu gọn- đưa về dạng ax + b = 0

Bài 3. $\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}=1-\frac{4x}{a+b+c} (a;b;c;\neq 0; a+b+c\neq 0)$.

HD: $\frac{a+b-x}{c}+1+\frac{a+c-x}{b}+1+\frac{b+c-x}{a}+1=3+1-$

$\Leftrightarrow \frac{a+b-x}{c}+1+\frac{a+c-x}{b}+1+\frac{b+c-x}{a}+1=4-\frac{4x}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow (a+b+c-x)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=\frac{4(a+b+c-x)}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b+c-x).\frac{a+b+c}{abc}-\frac{4(a+b+c-x)}{a+b+c}=0$

$\Leftrightarrow (a+b+c-x)\left(\frac{a+b+c}{abc}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0 \Leftrightarrow (a+b+c-x)\left[\frac{(a+b+c)^2-4abc}{abc(a+b+c)}\right]=0$

Nếu $[...]\neq 0 \Rightarrow (a+b+c-x)=0 \Leftrightarrow x=a+b+c$

Nếu $[...]=0$ thì Phương trình vô số nghiệm.

b. hệ Phương trình bậc nhất có hai ẩn số:

+ Dạng tổng quát: $\begin{cases} ax+b=0 \\ a^{'}x+b^{'}=0 \end{cases}$

+ Cách giải:
- Phương pháp thế.
- Phương pháp cộng đại số.

+ Số nghiệm số:
- Nếu $a \neq a^{'}$ Thì hệ Phương trình có một nghiệm .
- Nếu $a=a^{'};b=b^{'};c \neq c^{'}$ Thì hệ Phương trình có vô nghiệm .
- Nếu $a=a^{'};b=b^{'};c=c^{'}$ Thì hệ Phương trình có vô số nghiệm.

+ Tập nghiệm của mỗi Phương trình biểu diễn trênmặt phẳng toạđộ là đồ thị hàm số dạng: $y=ax+b$

Ví dụ: ***Giải các HPT sau:***

Bài1: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+y=7 \end{cases}$

Giải:

+ Dùng PP thế: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ 3x+2x-3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ 5x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2.2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Vaọy HPT đã cho có nghiệm là: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

+ Dùng PP cộng: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=10 \\ 3x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 3.2+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Vaọy HPT đã cho có nghiệm là: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Bài2: $\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 5x+2y=6 \end{cases}$ Để giải loại HPT này ta thường sử dụng PP cộng cho thuận lợi.

$\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 5x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+15y=-10 \\ 10x+4y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y=-22 \\ 5x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ 5x+2.(-2=6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

Vaọy HPT có nghiệm là $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

Bài 3: $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{y}=-1 \\ \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{5}{y}=-1 \end{cases}$

****Đối với HPT ở dạng này ta có thể sử dụng hai cách giải sau đây:***

+ Cách 1: Sử dụng PP cộng. ĐK: $x \neq -1, y \neq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{y}=-1 \\ \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{5}{y}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{y}=2 \\ \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{5}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{5}{1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ \dfrac{2}{x+1}=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=1 \end{cases}$$

Vaọy HPT có nghiệm là $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=1 \end{cases}$

+ Cách 2: Sử dụng PP đặt ẩn phụ. ĐK: $x \neq -1, y \neq 0$.

Đặt $\dfrac{1}{x+1}=a$; $\dfrac{1}{y}=b$. HPT đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 2a+3b=-1 \\ 2a+5b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+5b=1 \\ 2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+5.1=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}=-2 \\ \dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=1 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vaọy HPT có nghiệm là $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=1 \end{cases}$

Lưu ý: - Nhiều em còn thiếu ĐK cho những HPT ở dạng này.

- Có thể thử lại nghiệm của HPT vừa giải.

Bài tập về hệ Phương trình:

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau (*bằng pp thế*)

1.1: $a)\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 7x-3y=5 \\ 4x+y=2 \end{cases}$

1.2. $a)\begin{cases} x-2\sqrt{2}y=\sqrt{5} \\ x\sqrt{2}+y=\sqrt{2} \end{cases}$

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau (*bằng pp cộng đại số*)

2.1. $a)\begin{cases} 3x+y=3 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 4x+3y=6 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 3x-2y=10 \\ x-\dfrac{2}{3}y=3\dfrac{1}{3} \end{cases}$

2.2. $a)\begin{cases} x\sqrt{2}-3y=1 \\ 2x+y\sqrt{2}=-2 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 5x\sqrt{3}+y=2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6}-y\sqrt{2}=2 \end{cases}$

Bài 3:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3y=1 \\ (m^2+1)x+6y=2m \end{cases}$ trong mỗi trường hợp sau

a) m = -1 b) m = 0 c) m = 1

Bài 4 a) Xác định hệ số a và b, biết rằng hệ phương trình $\begin{cases} 2x+by=4 \\ bx-ay=-5 \end{cases}$ có nghiệm là (1; -2)

b) Cũng hỏi như vậy nếu hệ phương trình có nghiệm là $\left(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}\right)$

Bài 5: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x+y=\sqrt{2} \\ x+3y=-1 \end{cases}$

a) Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2m}{m+1}+\dfrac{n}{n+1}=\sqrt{2} \\ \dfrac{m}{m+1}+\dfrac{3n}{n+1}=-1 \end{cases}$

Bài 6: Cho hệ Phương trình $\begin{cases} 2x-ay=b \\ ax+by=1 \end{cases}$

a) Giải hệ khi a =3 ; b =-2
b) Tìm a;b để hệ có nghiệm là (x;y) = ($\sqrt{2};\sqrt{3}$)

Bài 7: Giải các hệ Phương trình sau: (*pp đặt ẩn phụ)*

7.1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=2 \\ \dfrac{5}{x+y}-\dfrac{4}{x-y}=3 \end{cases}$ 7.2) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-4\sqrt{y}=-8 \\ 2\sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases}$ 7.3) $\begin{cases} 3\sqrt{x-2}-4\sqrt{y-2}=3 \\ 2\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}=1 \end{cases}$ (đk x;y$\geq$2)

7.4) $\begin{cases} 3x-\sqrt{3}y=3-2\sqrt{3} \\ \sqrt{2}x+3y=6+\sqrt{2} \end{cases}$; 7.5) $\begin{cases} (x+1)+2(y-2)=5 \\ 3(x+1)-(y-2)=1 \end{cases}$; 7.6) $\begin{cases} (x+5)(y-2)=(x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7)=(x-3)(y+4) \end{cases}$.

7.7) $\begin{cases} (x-1)(y-2)+(x+1)(y-3)=4 \\ (x-3)(y+1)-(x-3)(y-5)=1 \end{cases}$; 7.8) $\begin{cases} 3(x+y)+5(x-y)=12 \\ -5(x+y)+2(x-y)=11 \end{cases}$;

7.9) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5} \end{cases}$; 7.10) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=2 \\ \dfrac{5}{x+y}-\dfrac{4}{x-y}=3 \end{cases}$; 7.11) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-3y}+\dfrac{5}{3x+y}=\dfrac{5}{8} \\ \dfrac{3}{2x-3y}-\dfrac{5}{3x+y}=-\dfrac{3}{8} \end{cases}$;

……………………

c.<u>Phương trình bậc hai - hệ thức vi - ét</u>

<u>1.Cách giải Phương trình bậc hai</u>: $ax^2 + bx + c = 0$ (a $\neq$ $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

* Nếu $\Delta > 0$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

* Nếu $\Delta = 0$ Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

* Nếu $\Delta < 0$ thì Phương trình vô nghiệm

<u>Chú ý:</u> Trong trường hợp hệ số *b* là số chẵn thì giải Phương trình trên bằng công thức nghiệm thu gọn:

$$\boxed{b' = \frac{1}{2}b \quad \textbf{và} \quad \Delta' = b'^2 - ac}$$

* Nếu $\Delta' > 0$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$

* Nếu $\Delta' = 0$ Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

* Nếu $\Delta' < 0$ thì Phương trình vô nghiệm.

<u>2.Định lý Vi ét</u>: Nếu x_1 , x_2 là nghiệm của Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ p = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

<u>Đảo lại</u>: *Nếu cú hai số x_1,x_2 mà $x_1 + x_2 = S$ và $x_1x_2 = p$* thì hai số đó là nghiệm (nếu có) của Phương trình bậc 2: $x^2 - S x + p = 0$

3. <u>Toán ứng dụng định lý Viét</u>

I. <u>Tính nhẩm nghiệm</u>.

Xét Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

- Nếu a + b + c = 0 thì Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$
- Nếu a – b + c = 0 thì Phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$
- Nếu $x_1 + x_2 = m + n$, $x_1x_2 = mn$ và $\Delta \geq 0$ thì Phương trình có nghiệm $x_1 = m$, $x_2 = n$ (hoặc $x_1 = n$, $x_2 = m$)

II. <u>LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI</u>

1. Lập Phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm $x_1; x_2$

Vớ dụ : Cho $x_1 = 3$; $x_2 = 2$ lập một Phương trình bậc hai chứa hai nghiệm tròn

Theo hệ thức VI-ẫT ta cú $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 5 \\ P = x_1 x_2 = 6 \end{cases}$ vậy $x_1; x_2$ là nghiệm của Phương trình cú dạng:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Bài tập áp dụng:

1. $x_1 = 8$ và $x_2 = -3$
2. $x_1 = 3a$ và $x_2 = a$
3. $x_1 = 36$ và $x_2 = -104$
4. $x_1 = 1+\sqrt{2}$ và $x_2 = 1-\sqrt{2}$

2. Lập Phương trình bậc hai cú hai nghiệm thoả món biểu thức chứa hai nghiệm của một Phương trình cho trước:

V ớ dụ: Cho Phương trình : $x^2 - 3x + 2 = 0$ cú 2 nghiệm phõn biệt $x_1; x_2$. Không giải Phương trình tròn, hóy lập Phương trình bậc 2 cú ẩn là y thoả món : $y_1 = x_2 + \frac{1}{x_1}$ và $y_2 = x_1 + \frac{1}{x_2}$

Theo h ệ th ức VI- ẫT ta c ú:

$$S = y_1 + y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} + x_1 + \frac{1}{x_2} = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$P = y_1 y_2 = (x_2 + \frac{1}{x_1})(x_1 + \frac{1}{x_2}) = x_1 x_2 + 1 + 1 + \frac{1}{x_1 x_2} = 2 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Vậy Phương trình cần lập cú dạng: $y^2 - Sy + P = 0$

hay $y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 9 = 0$

Bài tập áp dụng:

1/ Cho Phương trình $3x^2 + 5x - 6 = 0$ cú 2 nghiệm phõn biệt $x_1; x_2$. Không giải Phương trình, Hóy lập Phương trình bậc hai cú cỏc nghiệm $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$ và $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$

(Đáp số: $y^2 + \frac{5}{6}y - \frac{1}{2} = 0$ hay $6y^2 + 5y - 3 = 0$)

2/ Cho Phương trình : $x^2 - 5x - 1 = 0$ cú 2 nghiệm $x_1; x_2$. Hóy lập Phương trình bậc 2 cú ẩn y thoả món $y_1 = x_1^4$ và $y_2 = x_2^4$ (có nghiệm là luỹ thừa bậc 4 của các nghiệm của Phương trình đó cho).

(Đáp số : $y^2 - 727y + 1 = 0$)

3/ Cho Phương trình bậc hai: $x^2 - 2x - m^2 = 0$ cú cỏc nghiệm $x_1; x_2$. Hóy lập Phương trình bậc hai cú cỏc nghiệm $y_1; y_2$ sao cho :

a) $y_1 = x_1 - 3$ và $y_2 = x_2 - 3$ b) $y_1 = 2x_1 - 1$ và $y_2 = 2x_2 - 1$

(Đáp số a) $y^2 - 4y + 3 - m^2 = 0$ b) $y^2 - 2y - (4m^2 - 3) = 0$)

III. TÌM HAI SỐ BIẾT TổNG VÀ TÍCH CủA CHÚNG

Nếu hai số cú Tổng bằng S và Tớch bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của Phương trình :

$x^2 - Sx + P = 0$ (Điều **kiện** để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$)

Vớ dụ : Tìm hai số a, b biết tổng S = a + b = −3 và tớch P = ab = −4

Vỡ a + b = −3 và ab = −4 n ên a, b là nghiệm của Phương trình : $x^2 + 3x - 4 = 0$

giải Phương trình trờn ta được $x_1 = 1$ và $x_2 = -4$

Vậy nếu a = 1 thì b = −4

nếu a = −4 thì b = 1

Bài tập áp dụng: Tìm 2 số a và b biết Tổng S và Tớch P

1. S = 3 và P = 2
2. S = −3 và P = 6
3. S = 9 và P = 20
4. S = 2x và P = $x^2 - y^2$

Bài tập nâng cao: Tìm 2 số a và b biết

1. a + b = 9 và $a^2 + b^2 = 41$
2. a −b = 5 và ab = 36
3. $a^2 + b^2 = 61$ v à ab = 30

Hướng dẫn: 1) Theo đề bài đó biết tổng của hai số a và b , vậy để áp dụng hệ thức VI- ÉT thì cần Tìm tớch của a v à b.

T ừ $a+b=9 \Rightarrow (a+b)^2 = 81 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 81 \Leftrightarrow ab = \dfrac{81-(a^2+b^2)}{2} = 20$

Suy ra : a, b là nghiệm của Phương trình cú dạng : $x^2 - 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 5 \end{array}\right.$

Vậy: Nếu a = 4 thì b = 5

nếu a = 5 thì b = 4

2)Biết tích: ab = 36 do đó cần Tìm tổng : a + b

Cách 1: Đ ặt c = −b ta cú : a + c = 5 và a.c = −36

Suy ra a,c là nghiệm của Phương trình : $x^2 - 5x - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -4 \\ x_2 = 9 \end{array}\right.$

Do đó nếu a = −4 thì c = 9 nờn b = −9

nếu a = 9 thì c = −4 nờn b = 4

Cỏch 2: Từ $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \Rightarrow (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab = 169$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = 13^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b = -13 \\ a+b = 13 \end{array}\right.$$

*) Với $a+b=-13$ và ab = 36, nên a, b là nghiệm của Phương trình :

$$x^2+13x+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=-9 \end{array}\right.$$

Vậy a $=-4$ thì b = -9

*) Với $a+b=13$ và ab = 36, nên a, b là nghiệm của Phương trình : $x^2-13x+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=9 \end{array}\right.$

Vậy a = 9 thì b = 4

3) Đó biết ab = 30, do đó cần Tìm a + b:

T ừ: $a^2 + b^2 = 61 \Rightarrow (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 61+2.30 = 121 = 11^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=-11 \\ a+b=11 \end{array}\right.$

*) Nếu $a+b=-11$ và ab = 30 thì a, b là hai nghiệm của Phương trình:

$$x^2+11x+30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-5 \\ x_2=-6 \end{array}\right.$$

Vậy nếu a $=-5$ thì b = -6 ; nếu a $=-6$ thì b = -5

*) Nếu $a+b=11$ và ab = 30 thì a, b là hai nghiệm của Phương trình :

$$x^2-11x+30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=6 \end{array}\right.$$

Vậy nếu a = 5 thì b = 6 ; nếu a = 6 thì b = 5.

IV. Tìm điều kiện của tham số để Phương trình bậc hai có một nghiệm x = x_1 cho trước .Tìm nghiệm thứ 2

Cách giải:

- Tìm điều kiện để Phương trình có nghiệm x= x_1 cho trước có hai cách làm:

+) ***Cách 1***:- Lập điều kiện để Phương trình bậc 2 đã cho có 2 nghiệm: $\Delta \geq 0$ (hoặc $\Delta' \geq 0$) (*)

- Thay x = x_1 vào Phương trình đã cho ,tìm được giá trị của tham số
- Đối chiếu giá trị vừa tìm được của tham số với điều kiện(*) để kết luận

+) ***Cách 2***: - Không cần lập điều kiện $\Delta \geq 0$ (hoặc $\Delta' \geq 0$) mà ta thay luôn x = x_1 vào Phương trình đã cho, tìm được giá trị của tham số

- Sau đó thay giá trị tìm được của tham số vào Phương trình và giải Phương trình

Chú ý : Nếu sau khi thay giá trị của tham số vào Phương trình , mà Phương trình bậc hai này có
$\Delta < 0$ thì kết luận không có giá trị nào của tham số để Phương trình có nghiệm x_1 cho trước.

- Để tìm nghiệm thứ 2 ta có 3 cách làm:

+) ***Cách 1***: Thay giá trị của tham số tìm được vào Phương trình rồi giải Phương trình (như cách 2 trình bầy ở trên)

+) ***Cách 2*** :Thay giá trị của tham số tìm được vào công thức tổng 2 nghiệm sẽ tìm được nghiệm thứ 2

+) ***Cách 3***: thay giá trị của tham số tìm được vào công thức tích hai nghiệm,từ đó tìm được nghiệm thứ2

V. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA CÁC BIỂU THỨC NGHIỆM

Đối các bài toán dạng này điều quan trọng nhất là các **em** phải biết biến đổi biểu thức nghiệm đó cho về biểu thức cú chứa tổng nghiệm x_1+x_2 và tích nghiệm x_1x_2 để áp dụng hệ thức VI-ÉT rồi tính giá trị của biểu thức

1.Phương pháp: Biến đổi biểu thức để làm xuất hiện : (x_1+x_2) ***và*** x_1x_2

Dạng 1. $x_1^2+x_2^2=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

Dạng 2. $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]$

Dạng 3. $x_1^4+x_2^4=(x_1^2)^2+(x_2^2)^2=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1^2x_2^2$

Dạng 4. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

Dạng 5. $x_1-x_2=?$ Ta biết $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2 \Rightarrow x_1-x_2=\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

Dạng 6. $x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)=\left(\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}.(x_1+x_2)\right)$

Dạng 7. $x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=(x_1-x_2)\left[(x_1+x_2)^2-x_1x_2\right]=.......$

Dạng 8. $x_1^4-x_2^4=(x_1^2+x_2^2)(x_1^2-x_2^2)=......$

Dạng 9. $x_1^6+x_2^6=(x_1^2)^3+(x_2^2)^3=(x_1^2+x_2^2)(x_1^4-x_1^2x_2^2+x_2^4)=........$

Dạng 10. $x_1^6-x_2^6=(x_1^2)^3-(x_2^2)^3=(x_1^2-x_2^2)\left[(x_1^2)^2+x_1^2.x_2^2+(x_2^2)^2\right]=...$

Dạng 11. $x_1^5+x_2^5=(x_1^3+x_2^3)(x_1^2+x_2^2)-x_1^2.x_2^2(x_1+x_2)$

Dạng12: $(x_1-a)(x_2-a)=x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2=p-aS+a^2$

Dạng13 $\dfrac{1}{x_1-a}+\dfrac{1}{x_2-a}=\dfrac{x_1+x_2-2a}{(x_1-a)(x_2-a)}=\dfrac{S-2a}{p-aS+a^2}$

2. Bài tập áp dụng: *Không giải Phương trình, tính giá trị của biểu thức nghiệm*

a) Cho Phương trình : $x^2-8x+15=0$ Không giải Phương trình, hãy tính

1. $x_1^2+x_2^2$ (34) 2. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ $\left(\dfrac{8}{15}\right)$

3. $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$ $\left(\dfrac{34}{15}\right)$ 4. $(x_1+x_2)^2$ (46)

b) Cho Phương trình : $8x^2-72x+64=0$ Không giải Phương trình, hãy tính:

1. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ $\left(\dfrac{9}{8}\right)$ 2. $x_1^2+x_2^2$ (65)

c) Cho Phương trình : $x^2-14x+29=0$ Không giải Phương trình, hãy tính:

1. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ $\left(\frac{14}{29}\right)$ 2. $x_1^2+x_2^2$ (138)

d) Cho Phương trình : $2x^2-3x+1=0$ Không giải Phương trình, hãy tính:

1. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ (3) 2. $\frac{1-x_1}{x_1}+\frac{1-x_2}{x_2}$ (1)

3. $x_1^2+x_2^2$ (1) 4. $\frac{x_1}{x_2+1}+\frac{x_2}{x_1+1}$ $\left(\frac{5}{6}\right)$

5. $\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}$

e) Cho Phương trình $x^2-4\sqrt{3}x+8=0$ có 2 nghiệm x_1 ; x_2, không giải Phương trình, tính

$$Q=\frac{6x_1^2+10x_1x_2+6x_2^2}{5x_1x_2^3+5x_1^3x_2}$$

HD: $Q=\frac{6x_1^2+10x_1x_2+6x_2^2}{5x_1x_2^3+5x_1^3x_2}=\frac{6(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{5x_1x_2\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]}=\frac{6.(4\sqrt{3})^2-2.8}{5.8\left[(4\sqrt{3})^2-2.8\right]}=\frac{17}{80}$

VI. TÌM HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA HAI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH SAO CHO HAI NGHIỆM NÀY KHÔNG PHỤ THUỘC (HAY ĐỘC LẬP) VỚI THAM SỐ

Để làm các bài toán loại này,các **em** làm lần lượt theo các bước sau:

1- Đặt điều kiện cho tham số để Phương trình đó cho có hai nghiệm x_1 và x_2

(thường là a $\neq$ 0 và $\Delta \geq 0$)

2- Áp dụng hệ thức VI-ET: $x_1+x_2=\frac{-b}{a};x_1.x_2=\frac{c}{a}$

3- Sau đó dựa vào hệ thức VI-ET ***rút*** tham số theo tổng nghiệm, theo tích nghiệm sau đó đồng nhất các vế ta sẽ được một biểu thức chứa nghiệm không phụ thuộc vào tham số.Đó chính là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1 và x_2 không phụ thuộc vào *tham số m.*

Vớ dụ 1: *Cho Phương trình : $(m-1)x^2-2mx+m-4=0$ (1) cú 2 nghiệm $x_1;x_2$. Lập hệ thức liên hệ giữa $x_1;x_2$ sao cho không phụ thuộc vào m.*

(Bài này đã cho PT có hai nghiệmx_1 ;x_2 nên ta không biện luận bước 1)

Giải:

Bước2: Theo hệ th ức VI- ET ta có :

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m-1} \\ x_1.x_2=\dfrac{m-4}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2+\dfrac{2}{m-1}(1) \\ x_1.x_2=1-\dfrac{3}{m-1}(2) \end{cases}$$

Bước2: ***Rút*** *m* từ (1) ta có :

$$\frac{2}{m-1}=x_1+x_2-2 \Leftrightarrow m-1=\frac{2}{x_1+x_2-2} \qquad (3)$$

Rút *m* từ (2) ta có :

$$\frac{3}{m-1}=1-x_1x_2 \Leftrightarrow m-1=\frac{3}{1-x_1x_2} \qquad (4)$$

Bước 3: Đồng nhất các vế của (3) và (4) ta có:

$$\frac{2}{x_1+x_2-2}=\frac{3}{1-x_1x_2} \Leftrightarrow 2(1-x_1x_2)=3(x_1+x_2-2) \Leftrightarrow 3(x_1+x_2)+2x_1x_2-8=0$$

Vớ dụ 2: Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của Phương trình : $(m-1)x^2-2mx+m-4=0$. Chứng minh rằng biểu thức $A=3(x_1+x_2)+2x_1x_2-8$ không phụ thuộc giá trị của *m*.

Theo hệ thức VI- ET ta có :

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m-1} \\ x_1.x_2=\dfrac{m-4}{m-1} \end{cases}$$ ĐK:($m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$) ;Thay vào *A* ta có:

$$A=3(x_1+x_2)+2x_1x_2-8=3.\frac{2m}{m-1}+2.\frac{m-4}{m-1}-8=\frac{6m+2m-8-8(m-1)}{m-1}=\frac{0}{m-1}=0$$

Vậy A = 0 với mọi $m\neq 1$. Do đó biểu thức A không phụ thuộc vào *m*

Bài tập áp dụng:

s1. Cho Phương trình : $x^2-(m+2)x+(2m-1)=0$. Hãy lập hệ thức liên hệ giữa $x_1;x_2$ sao cho $x_1;x_2$ độc lập đối với *m*.

Hướng dẫn:

B1: Dễ thấy $\Delta=(m+2)^2-4(2m-1)=m^2-4m+8=(m-2)^2+4>0$. Do đó Phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

B2: Theo hệ thức VI- ET ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=m+2 \\ x_1.x_2=2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=x_1+x_2-2(1) \\ m=\dfrac{x_1x_2+1}{2}(2) \end{cases}$$

B3: Từ (1) và (2) ta có:

$$x_1+x_2-2=\frac{x_1x_2+1}{2}\Leftrightarrow 2\left(x_1+x_2\right)-x_1x_2-5=0$$

Cho Phương trình : $x^2+\left(4m+1\right)x+2\left(m-4\right)=0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 sao cho chúng không phụ thuộc vào *m*.

Hướng dẫn: Dễ thấy $\Delta=(4m+1)^2-4.2(m-4)=16m^2+33>0$ Do đó Phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

Theo hệ thức VI-ET ta có

$$\begin{cases}x_1+x_2=-(4m+1)\\x_1.x_2=2(m-4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m=-(x_1+x_2)-1(1)\\4m=2x_1x_2+16(2)\end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$-(x_1+x_2)-1=2x_1x_2+16\Leftrightarrow 2x_1x_2+(x_1+x_2)+17=0$$

VII. TÌM GIÁ TRỊ THAM SỐ CỦA PHƯƠNG TRÌNH THOẢ MÃN BIỂU THỨC CHỨA NGHIỆM ĐÃ CHO

Đối với các bài toán dạng này các em làm như sau:

- Đặt điều kiện cho tham số để Phương trình đó cho có hai nghiệm x_1 và x_2

(thường là a ≠ 0 và Δ ≥ 0)

- Từ biểu thức nghiệm đó cho, áp dụng hệ thức VI-ET để giải Phương trình (có ẩn là tham số).
- Đối chiếu với điều kiện xác định của tham số để xác định giá trị cần Tìm.

Ví dụ 1: Cho Phương trình : $mx^2-6\left(m-1\right)x+9\left(m-3\right)=0$

Tìm giá trị của tham số *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $x_1+x_2=x_1.x_2$

Bài giải: Điều kiện để Phương trình có 2 nghiệm x_1 và x_2 l à :

$$\begin{cases}m\neq 0\\\Delta'=\left[3\left(m-21\right)\right]^2-9(m-3)m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\\Delta'=9\left(m^2-2m+1\right)-9m^2+27\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\\Delta'=9\left(m-1\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\m\geq -1\end{cases}$$

Theo hệ thức VI- ET ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{6(m-1)}{m}\\x_1x_2=\dfrac{9(m-3)}{m}\end{cases}$ và từ giả thiết: $x_1+x_2=x_1x_2$. Suy ra:

$$\frac{6(m-1)}{m}=\frac{9(m-3)}{m}\Leftrightarrow 6(m-1)=9(m-3)\Leftrightarrow 6m-6=9m-27\Leftrightarrow 3m=21\Leftrightarrow m=7$$

(thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy với m = 7 thì Phương trình đó cho có 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $x_1+x_2=x_1.x_2$

Vớ dụ 2: Cho Phương trình : $x^2-(2m+1)x+m^2+2=0$.

Tìm *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $3x_1x_2-5(x_1+x_2)+7=0$

Bài giải: Điều kiện để Phương trình có 2 nghiệm $x_1 \& x_2$ là :

$\Delta' = (2m+1)^2 - 4(m^2+2) \geq 0$

$\Leftrightarrow 4m^2+4m+1-4m^2-8 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4m-7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{7}{4}$

Theo hệ thức VI-ET ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+1 \\ x_1x_2=m^2+2 \end{cases}$ và từ giả thiết $3x_1x_2-5(x_1+x_2)+7=0$. Suy ra

$3(m^2+2)-5(2m+1)+7=0$

$\Leftrightarrow 3m^2+6-10m-5+7=0$

$\Leftrightarrow 3m^2-10m+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2(TM) \\ m=\dfrac{4}{3}(KTM) \end{array}\right.$

Vậy với m = 2 thì Phương trình cú 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức : $3x_1x_2-5(x_1+x_2)+7=0$

Bài tập áp dụng

1. Cho Phương trình : $mx^2+2(m-4)x+m+7=0$

   Tìm *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức : $x_1-2x_2=0$

2. Cho Phương trình : $x^2+(m-1)x+5m-6=0$

   Tìm *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $4x_1+3x_2=1$

3. Cho Phương trình : $3x^2-(3m-2)x-(3m+1)=0$.

   Tìm *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức : $3x_1-5x_2=6$

Hướng dẫn cách giải:

Đối với các bài tập dạng này ta thấy có một điều khác biệt so với bài tập ở Ví dụ 1 và ví dụ 2 ở chỗ:

+ Trong ví dụ thì biểu thức nghiệm đó chứa sẵn tổng nghiệm x_1+x_2 và tích nghiệm x_1x_2 nên ta có thể vận dụng trực tiếp hệ thức VI-ÉT để Tìm tham số *m*.

+ Cũng trong 3 bài tập trên thì các biểu thức nghiệm lại không cho sẵn như vậy, do đó vấn đề đặt ra ở đây là làm thế nào để từ biểu thức đó cho biến đổi về biểu thức có chứa tổng nghiệm x_1+x_2 và tích nghiệm x_1x_2 rồi từ đó vận dụng tương tự cách làm đó trình bày ở Ví dụ 1 và ví dụ 2.

BT1: - ĐKX Đ: $m \neq 0 \,\&\, m \leq \frac{16}{15}$

-Theo VI-ET: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-(m-4)}{m} \\ x_1x_2 = \frac{m+7}{m} \end{cases}$ (1)

- Từ $x_1 - 2x_2 = 0$ Suy ra: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3x_2 \\ 2(x_1 + x_2) = 3x_1 \end{cases} \Rightarrow 2(x_1 + x_2)^2 = 9x_1x_2$ (2)

- Thế (1) vào (2) ta đưa được về Phương trình sau: $m^2 + 127m - 128 = 0 \Rightarrow m_1 = 1; m_2 = -128$

BT2: - ĐKXĐ: $\Delta = m^2 - 22m + 25 \geq 0 \Leftrightarrow 11 - \sqrt{96} \leq m \leq 11 + \sqrt{96}$

- Theo VI-ET: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1x_2 = 5m - 6 \end{cases}$ (1)

- Từ : $4x_1 + 3x_2 = 1$. Suy ra: $\begin{cases} x_1 = 1 - 3(x_1 + x_2) \\ x_2 = 4(x_1 + x_2) - 1 \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 = \left[1 - 3(x_1 + x_2)\right].\left[4(x_1 + x_2) - 1\right]$ (2)

$\Leftrightarrow x_1x_2 = 7(x_1 + x_2) - 12(x_1 + x_2)^2 - 1$

- Thế (1) vào (2) ta có Phương trình : $12m(m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$ (thoả mãn ĐKXĐ)

BT3: - Vì $\Delta = (3m-2)^2 + 4.3(3m+1) = 9m^2 + 24m + 16 = (3m+4)^2 \geq 0$ với mọi số thực m nên Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

- -Theo VI-ET: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3m-2}{3} \\ x_1x_2 = \frac{-(3m+1)}{3} \end{cases}$ (1)

- Từ giả thiết: $3x_1 - 5x_2 = 6$. Suy ra: $\begin{cases} 8x_1 = 5(x_1 + x_2) + 6 \\ 8x_2 = 3(x_1 + x_2) - 6 \end{cases} \Rightarrow 64x_1x_2 = \left[5(x_1 + x_2) + 6\right].\left[3(x_1 + x_2) - 6\right]$

$\Leftrightarrow 64x_1x_2 = 15(x_1 + x_2)^2 - 12(x_1 + x_2) - 36$

(2)

- Thế (1) vào (2) ta được Phương trình: $m(45m + 96) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -\frac{32}{15} \end{array}\right.$ (thoả mãn)

VIII. XÁC ĐỊNH DẤU CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Cho Phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (a ≠ 0) .Hãy Tìm điều kiện để Phương trình có 2 nghiệm: ***trái dấu, cùng dấu, cùng dương, cùng âm ….***

Ta lập bảng xột dấu sau:

Dấu nghiệm	x_1	x_2	$S = x_1 + x_2$	$P = x_1x_2$	Δ	***Điều kiện chung***
trỏi dấu	±	∓		P < 0	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0$; P < 0.

cựng dấu,	$\pm$	$\pm$		$P > 0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0$; $P > 0$
cùng dương,	$+$	$+$	$S > 0$	$P > 0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0$; $P > 0$; $S > 0$
cựng õm	$-$	$-$	$S < 0$	$P > 0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0$; $P > 0$; $S < 0$.

Vớ dụ: *Xác định tham số m sao cho Phương trình:*

$2x^2-(3m+1)x+m^2-m-6=0$ cú 2 nghiệm trỏi dấu.

Để Phương trình có 2 nghiệm trái dấu thì

$$\begin{cases}\Delta \geq 0\\ P<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=(3m+1)^2-4.2.(m^2-m-6)\geq 0\\ P=\dfrac{m^2-m-6}{2}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=(m-7)^2\geq 0 \forall m\\ P=(m-3)(m+2)<0\end{cases} \Leftrightarrow -2<m<3$$

Vậy với $-2<m<3$ thì Phương trình cú 2 nghiệm trái dấu.

Bài tập tham khảo:

1. $mx^2-2(m+2)x+3(m-2)=0$ có 2 nghiệm cùng dấu.
2. $3mx^2+2(2m+1)x+m=0$ có 2 nghiệm âm.
3. $(m-1)x^2+2x+m=0$ có ít nhất một nghiệm không âm.

IX. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT HOẶC GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC NGHIỆM

Áp dụng tính chất sau về bất đẳng thức: trong mọi trường hợp nếu ta luôn phân tích được:

$C=\left[\begin{array}{l}A+m\\ k-B\end{array}\right.$ (trong đó A, B là các biểu thức không âm ; m, k là hằng số) (*)

Thì ta thấy : $C\geq m$ (vì $A\geq 0$) $\Rightarrow \min C=m \Leftrightarrow A=0$

$C\leq k$ (vì $B\geq 0$) $\Rightarrow \max C=k \Leftrightarrow B=0$

__Ví dụ 1:__ Cho Phương trình : $x^2+(2m-1)x-m=0$

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của Phương trình. Tìm *m* để :

$A=x_1^2+x_2^2-6x_1x_2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài giải: Theo VI-ET: $\begin{cases}x_1+x_2=-(2m-1)\\ x_1x_2=-m\end{cases}$

Theo đ ề b ài : $A=x_1^2+x_2^2-6x_1x_2=(x_1+x_2)^2-8x_1x_2$

$$=\left(2m-1\right)^2+8m$$
$$=4m^2-12m+1$$
$$=(2m-3)^2-8\geq -8$$

Suy ra: $\min A=-8 \Leftrightarrow 2m-3=0 \;\; hay \;\; m=\dfrac{3}{2}$

Ví dụ 2: Cho Phương trình : $x^2-mx+m-1=0$

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của Phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B=\frac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2\left(x_1x_2+1\right)}$$

Ta có: Theo hệ thức VI-ET thì : $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow B=\frac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2\left(x_1x_2+1\right)}=\frac{2x_1x_2+3}{(x_1+x_2)^2+2}=\frac{2(m-1)+3}{m^2+2}=\frac{2m+1}{m^2+2}$$

Cách 1: Thêm bớt để đưa về dạng như phần (*) đó hướng dẫn
Ta biến đổi B như sau:

$$B=\frac{m^2+2-\left(m^2-2m+1\right)}{m^2+2}=1-\frac{\left(m-1\right)^2}{m^2+2}$$

Vì $\left(m-1\right)^2\geq 0 \Rightarrow \dfrac{\left(m-1\right)^2}{m^2+2}\geq 0 \Rightarrow B\leq 1$

Vậy $\max B=1 \Leftrightarrow m=1$

Với cách thêm bớt khác ta lại có:

$$B=\frac{\frac{1}{2}m^2+2m+1-\frac{1}{2}m^2}{m^2+2}=\frac{\frac{1}{2}\left(m^2+4m+4\right)-\frac{1}{2}\left(m^2+2\right)}{m^2+2}=\frac{\left(m+2\right)^2}{2\left(m^2+2\right)}-\frac{1}{2}$$

Vì $\left(m+2\right)^2\geq 0 \Rightarrow \dfrac{\left(m+2\right)^2}{2\left(m^2+2\right)}\geq 0 \Rightarrow B\geq -\dfrac{1}{2}$

Vậy $\min B=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m=-2$

Cỏch 2: Đưa về giải Phương trình bậc 2 với ẩn là *m* và *B* là tham số, ta sẽ Tìm điều kiện cho tham số *B* để Phương trình đó cho luôn có nghiệm với mọi *m*.

$$B=\frac{2m+1}{m^2+2} \Leftrightarrow Bm^2-2m+2B-1=0 \qquad \text{(Với } m \text{ là ẩn, } B \text{ là tham số)} \qquad (**)$$

Ta có: $\Delta=1-B(2B-1)=1-2B^2+B$

Để Phương trình (**) luôn có nghiệm với mọi m thì $\Delta\geq 0$

hay $\quad -2B^2+B+1\geq 0 \Leftrightarrow 2B^2-B-1\leq 0 \Leftrightarrow \left(2B+1\right)\left(B-1\right)\leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2B+1\le 0 \\ B-1\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2B+1\ge 0 \\ B-1\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B\le -\frac{1}{2} \\ B\ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} B\ge -\frac{1}{2} \\ B\le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le B\le 1$$

Vậy: $\max B=1 \Leftrightarrow m=1$

$\min B=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow m=-2$

Bài tập áp dụng

1. Cho Phương trình : $x^2+(4m+1)x+2(m-4)=0$.Tìm m để biểu thức $A=(x_1-x_2)^2$ có giỏ trị nhỏ nhất.

2. Cho Phương trình $x^2-2(m-1)x-3-m=0$. Tìm m sao cho nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2\ge 10$.

3. Cho Phương trình : $x^2-2(m-4)x+m^2-8=0$ xác định m để Phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn

a) $A=x_1+x_2-3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất

b) $B=x_1^2+x_2^2-x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất

4. Cho Phương trình : $x^2-(m-1)x-m^2+m-2=0$. Với giá trị nào của m, biểu thức $C=x_1^2+x_2^2$ dạt giá trị nhỏ nhất.

5. Cho Phương trình $x^2+(m+1)+m=0$. Xác định m để biểu thức $E=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập

Bài tập 1:

Biến đổi các Phương trình sau thành Phương trình bậc hai rồi giải

a) $10x^2 + 17x + 3 = 2(2x - 1) - 15$ b) $x^2 + 7x - 3 = x(x - 1) - 1$

c) $2x^2 - 5x - 3 = (x+ 1)(x - 1) + 3$ d) $5x^2 - x - 3 = 2x(x - 1) - 1 + x^2$

e) $-6x^2 + x - 3 = -3x(x - 1) - 11$ f) $- 4x^2 + x(x - 1) - 3 = x(x +3) + 5$

g) $x^2 - x - 3(2x + 3) = - x(x - 2) - 1$ h) $-x^2 - 4x - 3(2x - 7) = - 2x(x + 2) - 7$

i) $8x^2 - x - 3x(2x - 3) = - x(x - 2)$ k) $3(2x + 3) = - x(x - 2) - 1$

Bài tập 2: Cho Phương trình: $x^2 - 2(3m + 2)x + 2m^2 - 3m + 5 = 0$

a) Giải Phương trình với m = - 2;

b) Tìm các giá trị của m để Phương trình có một nghiệm x = -1

c) Tìm các giá trị của m để Phương trình trên có nghiệm kép.

Bài tập 3 Cho Phương trình: $x^2 - 2(m - 2)x + m^2 - 3m + 5 = 0$
a) Giải Phương trình với $m = 3$;
b) Tìm các giá trị của m để Phương trình có một nghiệm $x = -4$;
c) Tìm các giá trị của m để Phương trình trên có nghiệm kép.

Bài tập 4:
Cho Phương trình: $x^2 - 2(m - 2)x + 2m^2 + 3m = 0$
a) Giải Phương trình với $m = -2$;
b) Tìm các giá trị của m để Phương trình có một nghiệm $x = -3$
c) Tìm các giá trị của m để Phương trình trên có nghiệm kép.

Bài tập 5: Cho Phương trình: $x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 3 = 0$
a) Giải Phương trình với $m = -1$ và $m = 3$
b) Tìm m để Phương trình có một nghiệm $x = 4$
c) Tìm m để Phương trình có hai nghiệm phân biệt
d) Tìm m để Phương trình có hai nghiệm thoã mãn điều kiện $x_1 = x_2$

Bài tập 6:
Cho Phương trình : $(m + 1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$
a) Giải Phương trình với $m = -2$
b) Với giá trị nào của m thì Phương trình có hai nghiệm phân biệt
c) Tìm m để Phương trình có hai nghiệm thoã mãn điều kiện $x_1 = 2x_2$

Bài tập 7:
Cho Phương trình : $2x^2 - 6x + (m + 7) = 0$
a) Giải Phương trình với $m = -3$
b) Với giá trị nào của m thì Phương trình có một nghiệm $x = -4$
c) Với giá trị nào của m thì Phương trình đã cho vô nghiệm
d) Tìm m để Phương trình có hai nghiệm thoã mãn điều kiện $x_1 = -2x_2$

Bài tập 8:
Cho Phương trình : $x^2 - 2(m - 1)x + m + 1 = 0$
a) Giải Phương trình với $m = -4$
b) Với giá trị nào của m thì Phương trình có hai nghiệm phân biệt
d) Tìm m để Phương trình có hai nghiệm thoã mãn điều kiện $x_1 = 3x_2$

Bài tập 9:
Biết rằng Phương trình : $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 5m - 2 = 0$ (Với m là tham số) có một nghiệm
$x = 1$. Tìm nghiệm còn lại

Bài tập 10:
Biết rằng Phương trình : $x^2 - 2(3m + 1)x + 2m^2 - 2m - 5 = 0$ (Với m là tham số) có một nghiệm
$x = -1$. Tìm nghiệm còn lại
$x = -1$. Tìm nghiệm còn lại.

Bài tập 11: Cho Phương trình: $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$
a) Tìm m để Phương trình có nghiệm kép

b) Tìm m để Phương trình có hai nghiệm trái dấu
c)Tìm hệ thức giữa hai nghiệm của Phương trình không phụ thuộc vào m

Bài tập 12: Cho Phương trình bậc hai
$(m - 2)x^2 - 2(m + 2)x + 2(m - 1) = 0$
a) Tìm m để Phương trình có một nghiệm $x = - 2$
b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m
c) Khi Phương trình có một nghiệm $x = -1$ tìm giá trị của m và tìm nghiệm còn lại

Bài tập 13:Cho Phương trình: $x^2 - 2(m- 1)x + m^2 - 3m = 0$
a) Tìm m để Phương trình có một nghiệm $x = - 2$. Tìm nghiệm còn lại
b) Tìm m để Phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thảo mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 8$
c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x_1^2 + x_2^2$

Bài tập 14: Cho Phương trình: $mx^2 - (m + 3)x + 2m + 1 = 0$
a) Tìm m để Phương trình có hiệu hai nghiệm bằng 2
b) Tìm hệ thức liên hệ giữa $x_1$và x_2 không phụ thuộc m

Bài tập 15: Cho Phương trình: $x^2 - (2a- 1)x - 4a - 3 = 0$
a) Chứng minh rằng Phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của a
b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào a
c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$

Bài tập 16: Cho Phương trình: $x^2 - 2(m+4)x + m^2 - 8 = 0$
a) Tìm m để $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất
b) Tìm m để $B = x_1 + x_2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất
c) Tìm m để $C = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$

Bài tập 17: Tìm giá trị của m để các nghiệm x_1, x_2 của Phương trình

$mx^2 - 2(m - 2)x + (m - 3) = 0$ thoả mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 1$

Bài tập 18:

Cho Phương trình $x^2 - 2(m - 2)x + (m^2 + 2m - 3) = 0$. Tìm m để Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt thoả mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5}$

Bài tập 19:

Cho Phương trình: $mx^2 - 2(m + 1)x + (m - 4) = 0$ (m là tham số).

a) Xác định m để các nghiệm x_1; x_2 của Phương trình thoả mãn $x_1 + 4x_2 = 3$

b) Tìm một hệ thức giữa x_1; x_2 mà không phụ thuộc vào m

Bài tập 20:

a) Với giá trị nào m thì hai Phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung. Tìm nghiệm chung đó?

$x^2 - (m + 4)x + m + 5 = 0$ (1)

$x^2 - (m + 2)x + m + 1 = 0$ (2)

b) Tìm giá trị của m để nghiệm của Phương trình (1) là nghiệm của Phương trình (2) và ngược lại.

----

d. Một số Phương trình thường gặp:

1. Phương trình tích: Dạng: $A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$

Ví dụ: Giải Phương trình: $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$. Phân tích vế trái thành nhân tử bằng Phương pháp nhẩm nghiệm.(nghiệm thuộc ước của 6)ta được:

$$(x-2)(2x^2+5x-3) = 0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \\ x_3 = -3 \end{array}\right.$$

Bài tập:

Bài 1: $x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12 = 0$

Bài 2: $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$

2.Phương trình chứa ẩn ở mẫu:

Ví du: Giải và biện luận Phương trình sau: $\dfrac{1+x^2}{1+mx} = 1 - x$ (*)

ĐKXĐ: $1 + mx \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{m} (m \neq 0)$

Khi đó Phương trình (*) $\Leftrightarrow 1 + x^2 = (1-x)(1+mx) \Leftrightarrow x^2 - mx^2 + x - mx = 0$

$$\Leftrightarrow (1-m)x^2 + (1-m)x = 0 \Leftrightarrow x[(1-m)x + 1 - m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ (1-m)x + 1 - m = 0 \Leftrightarrow (1-m)x = m - 1 \end{array}\right.$$

Nếu $m \neq 1$; thì Phương trình có nghiệm : $\left|\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{m-1}{1-m} = -1 \end{array}\right.$

Nếu $m = 1$ thì Phương trình có nghiệm: $x = 0$.

Bài tập:

Bài 1: $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{x+2}{3x - x^2} = \dfrac{10}{x(x^2-9)}$

Bài 2: $\dfrac{5}{x-1} - \dfrac{4}{3 - 6x + 3x^2} = 3$

3. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyêt đối

Ví dụ: Giải Phương trình: $|3x-2| + |3x-1| = 3$

Ta có thể giải như sau: Lập bảng xét vế trái:

x		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	
$\lvert 3x-2\rvert$	$-3x+2$		$-3x+2$		$3x-2$
$\lvert 3x-1\rvert$	$-3x+1$		$3x-1$		$3x-1$
Vế trái cộng lại	$-6x+3$		$0x+1$		$6x-3$

Vậy: + Với $x \le \frac{1}{3}$ thì Phương trình (1) $\Leftrightarrow -6x+3=3 \Leftrightarrow -6x=0 \Leftrightarrow x=0$ (thoả mãn)

+ Với $\frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}$ thì Phương trình (1) $\Leftrightarrow 0x+1=3$ Phương trình vô nghiệm.

+ Với $x \ge \frac{2}{3}$ thì Phươngtrình (1) $\Leftrightarrow 6x-3=3 \Leftrightarrow 6x=6 \Leftrightarrow x=1$ thoả mãn.

Bài tập:

Bài 1: $\lvert x-2\rvert + \lvert 2x+1\rvert = 5$

Bài 2: $\lvert \lvert x\rvert + 3\rvert + 2x = 4$

4. Phương trình vô tỉ:

Ví dụ: a) Giải Phương trình: $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = \sqrt{1-2x}$

PP: + ĐKXĐ: $\begin{cases} x+4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -4 \\ 1-x \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1 \\ 1-2x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x \le \frac{1}{2}$

+ Bình Phương hai vế để làm mất căn.

b) Giải Phương trình: $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 2$

PP: + ĐKXĐ: $2x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$

+ Tạo ra bình Phương của một tổng noặc một hiệu của biểu thức dưới căn để đưa ra ngoài căn.

Do thiếu 2 lần tích nên ta nhân cả hai vế của Phương trình với $\sqrt{2}$.

+ Xét xem biểu thức dưới căn dương hay không để đặt trong dấu gía trị tuyệt đối rồi giải Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Bài tập:

Bài 1: $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+2x+1} = 3$

Bài 2: $\sqrt{x+2\sqrt{x-3}-2} + \sqrt{x-2\sqrt{x-3}-2} = 3$

Dạng IV

Giải bài toán bằng cách lập Phương trình.

I, Lí thuyết cần nhớ:

*** Bước 1:** *+ Lập PT hoặc hệ Phương trình;*
(nên lập bảng để timPhương trình)
- Chọn ẩn, tìm đơn vị và ĐK cho ẩn.
- Biểu diễn mối quan hệ còn lại qua ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập HPT.

*** Bước 2**: *Giải PT hoặc HPT.*

*** Bước 3**: *Đối chiếu với ĐK để trả lời.*

II, Bài tập và hướng dẫn:

1) Toán chuyển động:

Bài 1. Hai ô tô cùng khởi hành một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 160 km, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của mỗi ô tô biết rằng nếu ô tô đi từ A tăng vận tốc thêm 10 km/h sẽ bằng hai lần vận tốc ôtô đi từ B.

Bài 2: Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc 9km/h . Khi đi từ B về A người ấy đi đường khác dài hơn 6 km, với vận tốc 12km/h. nên thời gian ít hơn thời gian khi đI là 20 phút. Tính quãng đường AB?

Bài 3. Hai ca nô cùng khởi hành từ hai bến A, B cách nhau 85 km , đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 1 giờ 40 phút.Tính vận tốc riêng của mỗi ca nô biết rằng vận tốc của ca nô xuôi dòng lớn hơn vận tốc của ca nô ngược dòng là 9 km/h (có cả vận tốc dòng nước) và vận tốc dòng nước là 3 km/h.

2) Toán thêm bớt một lượng

Bài 5. Hai lớp 9A và 9B có tổng cộng 70 HS. nếu chuyển 5 HS từ lớp 9A sang lớp 9B thì số HS ở hai lớp bằng nhau. Tính số HS mỗi lớp.

Bài 6: Hai thùng đựng dầu: Thùng thứ nhất có 120 lít,thùng thứ hai có 90 lít. Sau khi kấy ra ở thùng thứ nhát một lượng dầu gấp ba lượng dầu lấy ra ở thùng thứ hai, thì lượng dầu còn lại trong thùng thứ hai gấp đôi lượng dầu còn lại trong thùng thứ nhất. Hỏi đã lấy ra bao nhiêu lít dầu ở mỗi thùng?

3) Toán phần trăm:

Bài 7. Hai trường A, B có 250 HS lớp 9 dự thi vào lớp 10, kết quả có 210 HS đã trúng tuyển. Tính riêng tỉ lệ đỗ thì trường A đạt 80%, trường B đạt 90%. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu HS lớp 9 dự thi vào lớp 10.

4) Toán làm chung làm riêng:

Bài 8. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước sau 2 giờ 55 phút thì đầy bể. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất cần ít thời gian hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể.

Bài 9. Hai tổ cùng làm chung một công việc hoàn thành sau 15 giờ. nếu tổ một làm trong 5 giờ, tổ hai làm trong 3 giờ thì được 30% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ hoàn thành trong bao lâu.

5) Toán nồng độ dung dịch:

Kiến thức: Biết rằng m lít chất tan trong M lít dung dịchthì nồng độ phàn trăm là $\frac{m}{M}.100\%$

Bài 10: Khi thêm 200g Axít vào dung dịch Axít thì dung dịch mới có nồng độ A xít là 50%. Lại thêm 300gam nước vào dung dịch mới ,ta được dung dịch A xít có nồng độ là40%.Tính nồng độ A xít trong dung dịch đầu tiên.

HD: Khối lượng nước trong dung dịch đầu tiên là *x* gam, khối lượng A xít trong dung dịch đầu tiên là *y* gam Sau khi thêm, 200 gam A xít vào dung dịch A xít ta cólượng A xít là: (y + 200) gam và nồng độ là 50% Do đó tacó: $\frac{y+200}{y+200+x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x - y = 200$ (1)

Sau khi thêm 300 gam nước vào dung dịch thì khối lượng nước là: (x + 300) gam và nồng độ là 40%(=2/5) nên ta có: $\frac{y+200}{y+200+x+300} = \frac{2}{5} \Rightarrow 2x - 3y = 0$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta được x = 600; y = 400 Vậy nông độ A xít là: $\frac{400}{600+400} = 40\%$

6)Toán nhiệt lượng:

Kiến thức: Biết răng: + m Kg nước giảm t^0C thì toả ra một nhiệt lượng Q = m.t (Kcal).
+ m Kg nước tăng t^0C thì thu vào một nhiệt lượng Q = m.t (Kcal).

Bài 11: Phải dùng bao nhiêu lít nước sôi 100^0C và bao nhiêu lít nước lạnh 20^0C để có hỗn hợp 100lít nước ở nhiệt độ 40^0C.

HD: Gọi khối lượng nước sôi là x Kg thì khối lượng nước lạnh là: 100 – x (kg)
Nhiệt lương nước sôi toả ra khi hạ xuống đến 40^0C là: x(100 – 40) = 60x (Kcal)
Nhiệt lượng nước lạnh tăng từ 20^0C -đến 40^0C là: (100 – x).20. (Kcal)
Vì nhiệt lượng thu vào bằng nhiệt lượng toả ra nên ta có : 60x = (100 – x).20
Giải ra ta có: x = 25.Vậy khối lượng nước sôi là 25Kg; nước lạnh là 75 Kg tương đương với 25lít và 75 lít.

7)Các dạng toán khác:

Bài 12. Một thửa ruộng có chu vi 200m . nếu tăng chiều dài thêm 5m, giảm chiều rộng đi 5m thì diện tích giảm đi 75 m^2 . Tính diện tích thửa ruộng đó.

Bài 13. Một phòng họp có 360 ghế được xếp thành từng hàng và mỗi hàng có số ghế ngồi bằng nhau. Nhưng do số người đến họp là 400 nên phải kê thêm 1 hàng và mỗi hàng phải kê thêm 1 ghế mới đủ chỗ. Tính xem lúc đầu phòng họp có bao nhiêu hàng ghế và mỗi hàng có bao nhiêu ghế.

-------------------------------------&&&&--

Dạng V

Bài tập Hình tổng hợp

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại
H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M,N,P.
Xét tứ giác CEHD ta có: C/M:

1. Tứ giác CEHD, nội tiếp .
2. Bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.
3. AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.
4. H và M đối xứng nhau qua BC.
5. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Bài 2. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn
ngoại tiếp tam giác AHE.

1. Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp .
2. Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh ED = $\frac{1}{2}$BC.
4. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
5. Tính độ dài DE biết DH = 2 Cm, AH = 6 Cm.

Bài 3 Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1. Chứng minh AC + BD = CD.
2. Chứng minh $\angle COD = 90^0$.
3. Chứng minh AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.
4. Chứng minh OC // BM
5. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
6. Chứng minh MN $\perp$ AB.
7. Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4 Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc
A , O là trung điểm của IK.

1. Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
3. Tính bán kính đường tròn (O) Biết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm.

Bài 5 Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ AC ⊥ MB, BD ⊥ MA, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

1. Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
2. Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
3. Chứng minh OI.OM = R^2; OI. IM = IA^2.
4. Chứng minh OAHB là hình thoi.
5. Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
6. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

Bài 6 Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

1. Chứng minh tam giác BEC cân.
2. Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.
3. Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).
4. Chứng minh BE = BH + DE.

Bài 7 Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao
cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

1. Chứng minh rằng tứ giác APMO nội tiếp được một đường tròn.
2. Chứng minh BM // OP.
3. Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.
4. Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài 8 Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

1) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.
2) Chứng minh rằng: AI^2 = IM . IB.
3) Chứng minh BAF là tam giác cân.
4) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.
5) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Bài 9 Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh AC. AE không đổi.
2. Chứng minh $\angle$ ABD = $\angle$ DFB.
3. Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.

Bài 10 Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn sao cho AM < MB. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AB và S là giao điểm của hai tia BM, M'A. Gọi P là chân đương
vuông góc từ S đến AB.

1. Chứng minh bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn
2. Gọi S' là giao điểm của MA và SP. Chứng minh rằng tam giác PS'M cân.
3. Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn .

Bài 11. Cho tam giác ABC (AB = AC). Cạnh AB, BC, CA tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm D, E, F . BF cắt (O) tại I , DI cắt BC tại M. Chứng minh :

1. Tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. DF // BC. **3**. Tứ giác BDFC nội tiếp. **4**. $\frac{BD}{CB} = \frac{BM}{CF}$

Bài 12 Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến
tại N của đường tròn ở P. Chứng minh :

1. Tứ giác OMNP nội tiếp.
2. Tứ giác CMPO là hình bình hành.
3. CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
4. Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.

Bài 13 Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điển A , Vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, Nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

1. Chứng minh AFHE là hình chữ nhật.
2. BEFC là tứ giác nội tiếp.
3. AE. AB = AF. AC.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

Bài 14 Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC = 10 Cm, CB = 40 Cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K.
Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M. N theo thứ tự là giao điểm của EA,
EB với các nửa đường tròn (I), (K).

1. Chứng minh EC = MN.
2. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).
3. Tính MN.
4. Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn

Bài 15 Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M không trùng B. C, H) ; từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB. AC.

1. Chứng minh APMQ là tứ giác nội tiếp và hãy xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
2. Chứng minh rằng MP + MQ = AH.

Bài 18 Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B) ; trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn ; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

1. Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.
3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID, Chứng minh KCOH là tứ giác nội tiếp .

Bài 19. Cho đường tròn (O) đường kính AC. Trên bán kính OC lấy điểm B tuỳ ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. Nối CD, Kẻ BI vuông góc với CD.

1. Chứng minh tứ giác BMDI nội tiếp .
2. Chứng minh tứ giác ADBE là hình thoi.
3. Chứng minh BI // AD.
4. Chứng minh I, B, E thẳng hàng.
5. Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O’).

Bài 20. Cho đường tròn (O; R) và (O’; R’) có R > R’ tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O’). DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O’) là F, BD cắt (O’) tại G. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác MDGC nội tiếp .
2. Bốn điểm M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn
3. Tứ giác ADBE là hình thoi.
4. B, E, F thẳng hàng
5. DF, EG, AB đồng quy.

6. MF = 1/2 DE.
7. MF là tiếp tuyến của (O’).

Bài 21. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA . Vẽ đường tron tâm I đi qua A, trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q.

1. Chứng minh rằng các đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A.
2. Chứng minh IP // OQ.
3. Chứng minh rằng AP = PQ.
4. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.

Bài 22. Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

1. Chứng minh BHCD là tứ giác nội tiếp .
2. Tính góc CHK.
3. Chứng minh KC. KD = KH.KB
4. Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào?

Bài 23. Cho tam giác ABC vuông ở A. Dựng ở miền ngoài tam giác ABC các hình vuông ABHK, ACDE.

1. Chứng minh ba điểm H, A, D thẳng hàng.
2. Đường thẳng HD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại F, chứng minh FBC là tam giác vuông cân.
3. Cho biết $\angle ABC > 45^0$; gọi M là giao điểm của BF và ED, Chứng minh 5 điểm b, k, e, m, c cùng nằm trên một đường tròn.
4. Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 24. Cho tam giác nhọn ABC có $\angle B = 45^0$. Vẽ đường tròn đường kính AC có tâm O, đường tròn này cắt BA và BC tại D và E.

1. Chứng minh AE = EB.
2. Gọi H là giao điểm của CD và AE, Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.
3. Chứng minh OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Bài 25. Cho đường tròn (O), BC là dây bất kì (BC< 2R). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C chúng cắt nhau tại A. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AC, AB. Gọi giao điểm của BM, IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.

1. Chứng minh tam giác ABC cân. **2**. Các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp .

3. Chứng minh $MI^2 = MH.MK$. **4**. Chứng minh $PQ \perp MI$.

Bài 26. Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Vẽ dây cung $CD \perp AB$ ở H. Gọi M là điểm chính giữa của cung CB, I là giao điểm của CB và OM. K là giao điểm của AM và CB. Chứng minh :

1. $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$ **2**. AM là tia phân giác của $\angle CMD$. **3**. Tứ giác OHCI nội tiếp

4. Chứng minh đường vuông góc kẻ từ M đến AC cũng là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

Bài 27 Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài đường tròn . Các tiếp tuyến với đường tròn (O) kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn (O) tại B và C. Gọi M là điểm tuỳ ý trên đường tròn (M khác B, C), từ M kẻ MH $\perp$ BC, MK $\perp$ CA, MI $\perp$ AB. Chứng minh :

Tứ giác ABOC nội tiếp. **2**. $\angle$BAO = $\angle$ BCO. **3**. ΔMIH ~ ΔMHK. **4**. MI.MK = MH^2.

Bài 28 Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; E là điểm đối xứng của H qua BC; F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC.

1. Chứng minh tứ giác BHCF là hình bình hành.
2. E, F nằm trên đường tròn (O).
3. Chứng minh tứ giác BCFE là hình thang cân.
4. Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

Bài 29 BC là một dây cung của đường tròn (O; R) (BC $\neq$ 2R). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong tam giác ABC. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H.

1. Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC.
2. Gọi A' là trung điểm của BC, Chứng minh AH = 2OA'.
3. Gọi A_1 là trung điểm của EF, Chứng minh R.AA_1 = AA'. OA'.
4. Chứng minh R(EF + FD + DE) = $2S_{ABC}$ suy ra vị trí của A để tổng EF + FD + DE đạt giá trị lớn nhất.

Bài 30 Cho tam giác ABC nội tiếp (O; R), tia phân giác của góc BAC cắt (O) tại M. Vẽ đường cao AH và bán kính OA.

1. Chứng minh AM là phân giác của góc OAH.
2. Giả sử $\angle$B > $\angle$C. Chứng minh $\angle$OAH = $\angle$B - $\angle$C.
3. Cho $\angle$BAC = 60^0 và $\angle$OAH = 20^0. Tính: $\angle$B và $\angle$C của tam giác ABC.

********** Hết **********