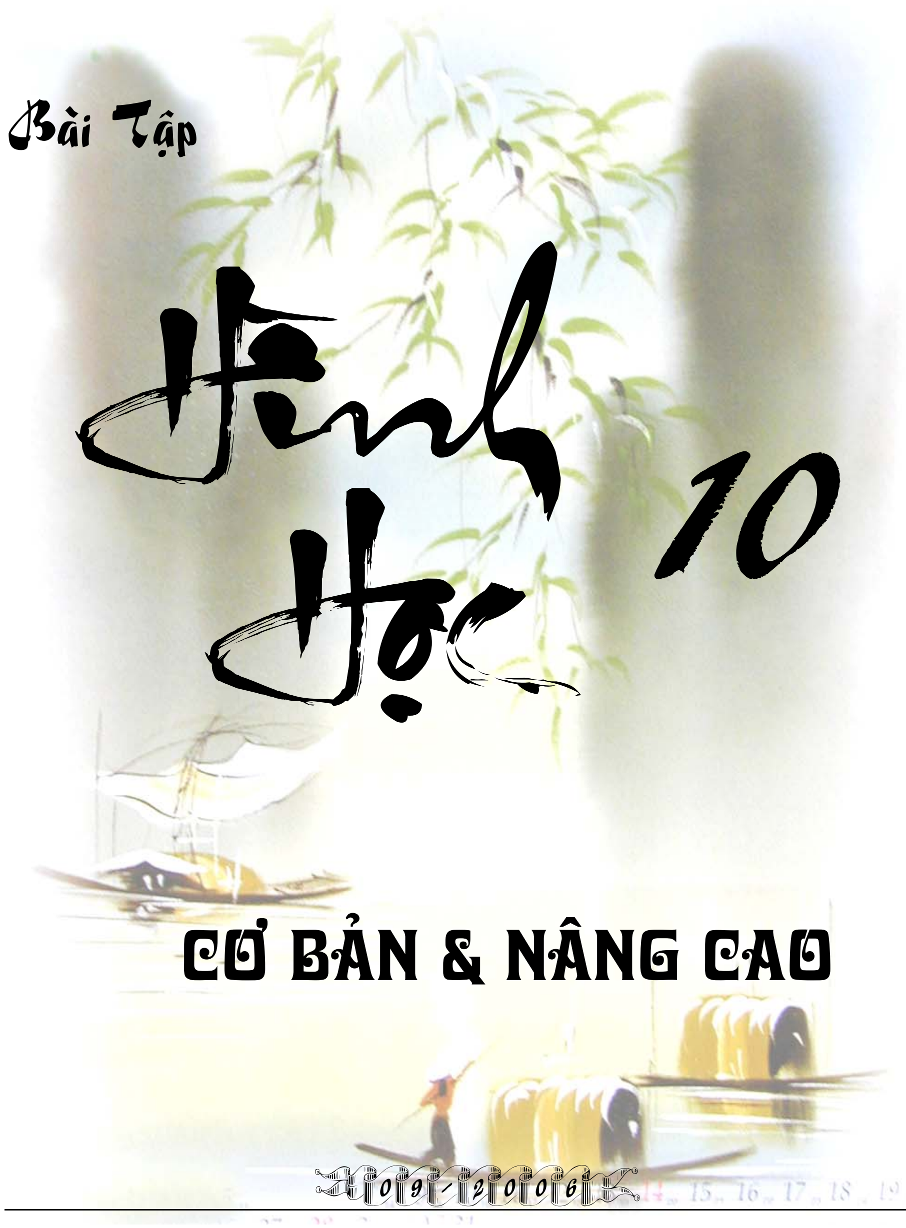
Vũ Mạnh Hùng

Trường THPT Nguyễn Hữu Huân



Bài Tập

Hình Học 10

CƠ BẢN & NÂNG CAO

09-2006

112 Cho ΔABC với $\widehat{A} = 120^o$, AB = 6cm, AC = 10cm. Tính BC, bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC và diện tích ΔABC.

113 Cho ΔABC với $\widehat{A} = 60^o$, AB = 5cm, BC = 7cm. Tính AC, R, r, đường cao AH.

114 Cho ΔABC với $\widehat{A} = 120^o$, BC = 7 cm, AC = 5 cm. Tính AB, R, r, trung tuyến AM, độ dài phân giác trong AD.

115 Cho ΔABC có AB = 3 cm, BC = 5 cm, CA = 6 cm. Tính diện tích ΔABC, chiều cao AH và R.

116 Cho ΔABC vuông tại A có AB = 5, AC = 12, đường cao AH.

①. Tính bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC.

②. Vẽ đường phân giác trong AD của ΔABC. Tính DB, DC, AD.

117 Cho ΔABC với AB = 8cm và $\widehat{A} = 60^o$ nội tiếp trong đường tròn (O) bán kính $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. Tính độ dài các cạnh BC, AC và diện tích ΔABC.

118 Cho ΔABC với $\widehat{A} = 60^o$ ($\widehat{B} > \widehat{C}$), bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp: $R = \frac{13\sqrt{3}}{3}$ cm , $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm. Tính độ dài các cạnh và diện tích ΔABC.

119 Cho ΔABC với $\widehat{B} = 60^o$, đường cao $CH = \frac{7\sqrt{3}}{2}$, nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = \frac{13\sqrt{3}}{3}$. Tính độ dài các cạnh và diện tích ΔABC.

98. Trong ΔABC biết $AB = c$, $BC = a$, $\widehat{B} = \beta$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM:MB = 3:2$. Tính khoảng cách từ M đến trung điểm cạnh AC.

99. Cho ΔABC có $AB = c$, $AC = b$ $(b > c)$, trung tuyến AM vuông góc với AB. Tính BC.

100. Cho ΔABC vuông tại A, kéo dài BC về phía C một đoạn $CD = AB = 3$ cm, biết $\widehat{CAD} = 30^o$. Tính các cạnh tam giác.

101. Cho ΔABC với $AC = 13$ cm, $AB = 7$ cm, $BC = 15$ cm. Tính $\widehat{B}$, bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC và độ dài đường cao BH.

102. Cho ΔABC với $\widehat{A} = 120^o$, $BC = 7$ cm, $AC = 5$ cm. Tính AB, bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp ΔABC.

103. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 60^o$, $BC = 7$ cm và diện tích $S = 10\sqrt{3}$ cm^2. Tính AB, AC.

104. Cho ΔABC có $AC = 2$ cm, $AB = 3$cm, $BC = 4$ cm. Tính $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$.

105. Cho hình bình hành ABCD có $AB = 5$ cm, $AD = 8$ cm, $\widehat{A} = 60^o$.

①. Tính độ dài 2 đường chéo BD, AC và diện tích của hình bình hành.

②. Tính trung tuyến BM và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABD.

106. Cho ΔABC có $BC = 2\sqrt{3}$, $CA = 2\sqrt{2}$, $AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

①. Tính giá trị các góc A, B và độ dài đường cao AH của tam giác.

②. Tính độ dài phân giác trong AE của góc A.

107. Cho ΔABC với $\widehat{A} = 120^o$, $\widehat{B} = 45^o$, $AC = 2\sqrt{2}$ cm.

①. Tính BA, BC, R, r , S.

②. Gọi I là tâm đ.tròn nội tiếp ΔABC, tính bán kính đ.tròn ngoại tiếp ΔBIC

108. Cho ΔABC biết: $\dfrac{\sin A}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sin B}{2} = \dfrac{\sin C}{1+\sqrt{3}}$.

①. Tính các góc của ΔABC. ②. Nếu $AC = 4$cm. Tính R, S.

109. Cho $a = x^2 + x + 1$, $b = 2x + 1$, $c = x^2 - 1$. Định x để a, b, c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Với x tìm được, chứng minh rằng tam giác có 1 góc bằng 120^o.

110. Cho ΔABC với $\widehat{A} = 60^o$, $AB = 5$, $AC = 8$.

①. Tính BC, diện tích ΔABC và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

②. Đường tròn đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại M, N. Tính MN.

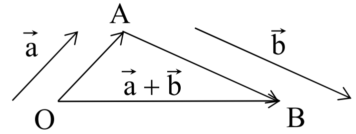
111. Cho ΔABC có $AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{3}$, $CA = \sqrt{6} + \sqrt{2}$. Tính góc A, bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC và đường cao AH.

Chương 1

VECTO

Vectơ

▲ *Tổng của hai vectơ* $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$, được định nghĩa như sau: Từ một điểm O tùy ý, vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, rồi từ A vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.



▲ *Hiệu của hai vectơ* $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$, là một vectơ được định bởi:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

▲ *Tích của số k với vectơ* $\vec{a}$, kí hiệu $k\vec{a}$, là một vectơ cùng phương với $\vec{a}$ và:

- Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
- $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$

▲ *Điều kiện để hai vectơ cùng phương*: Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$:

$$\vec{b} \text{ cùng phương với } \vec{a} \Leftrightarrow \exists k: \vec{b} = k\vec{a}$$

▲ $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

▲ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ với OC là đường chéo hình bình hành cạnh OA, OB.

▲ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.

▲ Nếu M là trung điểm đoạn AB và O là 1 điểm tuỳ ý thì:

✦ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$. ✦ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$.

▲ A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

▲ G là trọng tâm ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

▲ Nếu $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ thì: $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = 0$.

▲ So sánh 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$:

✦ Nếu $AB \not\parallel CD$: Không so sánh.

✦ Nếu $AB \parallel CD$ và $AB = k.CD$: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD} & \text{khi } \overrightarrow{AB} \nearrow\nearrow \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AB} = -k.\overrightarrow{CD} & \text{khi } \overrightarrow{AB} \nearrow\swarrow \overrightarrow{CD} \end{cases}$.

▲ Tìm hệ thức liên hệ giữa 4 điểm M, A, B, C với A, B, C thẳng hàng:

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1-k}.$$

1 Cho hình bình hành ABCD và $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BD}$. Chứng minh :

①. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ ②. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE}$

③. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC}$

2 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng phương và $|\vec{c}| < |\vec{b}| < |\vec{a}|$. Khẳng định $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \,/\!/\, \vec{a}$ có đúng không?

3 Cho hình bình hành ABCD tâm O và M là 1 điểm tuỳ ý. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$$

4 Chứng minh trong hình bình hành ABCD tìm được duy nhất 1 điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

5 Cho lục giác đều ABCDEF. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}$.

6 Cho tứ giác ABCD và M, N lần lượt là trung điểm của đoạn AB và DC. Chứng minh $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{MN}$.

7 Cho ΔABC với M là trung điểm của AB, E là trung điểm của MC, AE cắt BC tại F, đường thẳng qua M song song với AE cắt BC tại H. Chứng minh:

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{FC}.$$

8 Cho ΔABC với D là trung điểm của AC, E là trung điểm của BD, AE cắt BC tại M. Chứng minh: $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BM}$.

9 Nếu M là điểm trên đoạn AB với AM:MB = 2:3 và O là 1 điểm tuỳ ý. Chứng minh: $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$.

10 Cho ΔABC và ΔA′B′C′ trọng tâm tương ứng G và G′. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{GG'} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}).$$

11 Cho ΔABC với các trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}.$$

12 Cho ΔABC trung tuyến AK, BM. Phân tích theo $\vec{a} = \overrightarrow{AK}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{BM}$ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$.

13 Cho ΔABC với trung tuyến AM, BN, CP và G là trọng tâm.

①. Chứng minh nếu O là 1 điểm tuỳ ý thì:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG}.$$

②. Biểu diễn $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{CA}$.

14 Trên cạnh Ox của góc $\widehat{xOy}$ lấy 2 điểm A và B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$. Qua A, B kẻ các đường thẳng song song cắt Oy lần lượt tại C, D với $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$. Phân tích $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

84 Cho hai đường tròn đồng tâm. Chứng minh tổng bình phương khoảng cách từ 1 điểm của đường tròn này đến 2 điểm mút của đường kính của đường tròn kia không phụ thuộc vào vị trí của điểm và đường kính.

85 Cho đường tròn tâm O bán kính R, điểm M nằm trên 1 đường kính của đường tròn với MO = a, AB là 1 dây cung bất kì song song với đường kính này. Tính $MA^2 + MB^2$.

86 Xác định tập hợp các điểm M thoả $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$, trong đó A, B là 2 điểm cố định và k ≠ 0 là hằng số.

87 Cho ΔABC vuông tại C. Xác định tập hợp các điểm M thoả:

$$MA^2 + MB^2 = 2MC^2.$$

④. Diện tích

88 Cho ΔABC đều, N là 1 điểm trên cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{3}AC$. Tính tỉ số các bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABN và ΔABC.

89 Cho ΔABC với $\widehat{A} = \alpha$, BA = c, AC = b. Trên cạnh AC và AB lấy hai điểm M, N với M là trung điểm cạnh AC và $dt(\Delta AMN) = \frac{1}{3}dt(\Delta ABC)$. Tính độ dài đoạn MN.

90 Cho ΔABC với AB = 2cm, trung tuyến BD = 1cm, $\widehat{BDA} = 30^o$. Tính AD, BC và diện tích ΔABC.

91 Đường tròn bán kính R đi qua 2 đỉnh A, B của ΔABC và tiếp xúc với AC tại A. Tính diện tích ΔABC nếu $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$.

92 $dt(\Delta ABC) = 15\sqrt{3}$ cm^2, $\widehat{A} = 120^o$, $\widehat{B} > \widehat{C}$. Khoảng cách từ A đến tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác là 2cm. Tính độ dài trung tuyến BM của ΔABC.

93 Tính diện tích hình thoi ABCD nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC và ΔABD là R và r.

⑤. Tổng Hợp

94 Cho ΔABC đều, K và M là hai điểm trên AC và AB sao cho AK:KC = 2:1, AM:MB = 1:2. Chứng minh KM bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

95 Trong hình bình hành ABCD với AB = a, BC = b, $\widehat{B} = \alpha$. Tính khoảng cách giữa tâm của hai đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và ΔDAB.

96 Cho ΔABC với $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{C} = \beta$, AC = b. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho BD = 3DC. Qua B và D kẻ đường tròn tiếp xúc với AC. Tính bán kính đường tròn này.

97 Chứng minh trong ΔABC ta có $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ với G là trọng tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

69. Cho ΔABC, đường tròn nội tiếp trong tam giác tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại M, D, N. Tính độ dài đoạn MD nếu NA=2, NC=3, $\widehat{C} = 60^o$.

70. Đường tròn nội tiếp trong ΔKLM tiếp xúc với KM tại A. Tính độ dài đoạn AL nếu AK = 10, AM = 4, $\widehat{L} = 60^o$.

71. Cho ΔABC với $\widehat{B} = 60^o$, AB + BC = 11cm (AB > BC). Bán kính đường tròn nội tiếp trong ΔABC là $2:\sqrt{3}$ cm. Tính độ dài đường cao AH.

72. Cho ΔABC cân tại A với $\widehat{A} = \alpha$. Đường tròn tâm trên BC bán kính r tiếp xúc với các cạnh AB, AC. Tiếp tuyến tại 1 điểm trên đường tròn cắt AB, AC tại M, N với MN = 2b. Tính BM, CN.

73. Cho ΔABC, đường tròn nội tiếp trong tam giác tiếp xúc với cạnh BC tại M. Tính độ dài 2 cạnh AB, AC nếu BM = 6cm, MC = 8cm và bán kính đường tròn nội tiếp là 4cm.

②. Định Lí Hàm Số Sin

74. Chứng minh nếu một tam giác có a:cosA = b:cosB thì tam giác đó cân.

75. Chứng minh trong ΔABC:

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0.$$

76. ΔABC cân tại A với $\widehat{A} = 30^o$, AB = AC = 5cm. Đường thẳng qua B và tâm O đường tròn ngoại tiếp ΔABC cắt AC tại D. Tính BD.

77. Cho ΔABC, đường tròn bán kính r qua A, B cắt BC tại D. Tìm bán kính đường tròn qua 3 điểm A, D, C nếu AB = c, AC = b.

78. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tìm bán kính đường tròn đi qua trung điểm cạnh AB, tâm hình vuông và đỉnh C.

79. Trong đường tròn bán kính R kẻ hai dây cung MN, PQ vuông góc. Tính khoảng cách MP nếu NQ = a.

80. Trong ΔABC với BC = a, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$. Tìm bán kính đường tròn tiếp xúc với AC tại A và tiếp xúc với BC.

81. Cho ΔABC với BC = a, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$. Đường phân giác góc A cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại K. Tính AK.

③. Độ dài trung tuyến

82. Trong ΔABC với M là trung điểm cạnh AB. Tính CM nếu AC = 6, BC = 4, $\widehat{C} = 120^o$.

83. Cho đ.tròn tâm O đường kính AB = 2R. Trên AB lấy 2 điểm M, N sao cho AM = MN = NB. Chứng minh với mọi điểm P trên đường tròn $PM^2 + PN^2$ không đổi.

15. Cho tứ giác ABCD với $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$. Phân tích $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DA}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

16. Cho hình bình hành ABCD với H là trung điểm của AD, F và M là 2 điểm trên BC sao cho BF = MC = $\frac{1}{4}$BC. Phân tích theo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ các vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MH}$, $\overrightarrow{AF}$.

17. Cho hình bình hành ABCD tâm O với H là trung điểm của OD, AH cắt CD tại F. Phân tích $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AF}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

18. Trong hình thang ABCD tỉ số độ dài 2 cạnh đáy AD và BC bằng m. Đặt $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Phân tích theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

19. Cho hình thang ABCD đáy AB và CD, đường trung bình MP và O là trung điểm của MP với $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Phân tích theo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{MP}$.

20. Cho ΔABC với AB = 10cm, BC = 8cm, CA = 5cm. Đường tròn nội tiếp trong ΔABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA tương ứng tại M, N, P.

①. Tìm độ dài các đoạn AM, BN, CP.

②. Nếu $\overrightarrow{CN} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AP} = \vec{b}$. Phân tích $\overrightarrow{BA}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

21. Cho tứ giác ABCD với $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$.

①. Phân tích $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$ theo $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

②. Gọi Q là trọng tâm của ΔBCD. Phân tích $\overrightarrow{AQ}$ theo $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

22. Cho ΔABC với $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Gọi P, Q, R là 3 điểm sao cho $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Phân tính theo $\vec{a}$, $\vec{b}$ các vectơ $\overrightarrow{RQ}$ và $\overrightarrow{RP}$. Suy ra P, Q, R thẳng hàng.

23. Cho 3 vectơ khác $\vec{0}$ từng cặp không cùng phương $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Tính $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ nếu $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng phương, $\vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{a}$ cùng phương.

24. Trong ΔABC cho các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \beta\overrightarrow{CM}$.

Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Phân tích $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{BN}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

25. Trong ΔABC lấy 2 điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$.

①. Tìm quan hệ giữa α và β để $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

②. Nếu α và β chọn sao cho $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương. Đặt $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{b}$, phân tích $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

26. Cho hình thang cân ABCD đáy $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, cạnh xiên $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, góc giữa AB và AD là 60^o. Phân tích theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$ các vectơ $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$.

27. Trên đường thẳng ℓ cho 3 điểm P, Q, R và trên đường thẳng m cho 3 điểm P', Q', R' sao cho $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{P'Q'} = k\overrightarrow{Q'R'}$. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn PP', QQ', RR' nằm trên 1 đường thẳng.

28. Cho ΔABC. Trên các đường thẳng BC, CA, AB cho tương ứng các cặp điểm (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) sao cho $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}$. Chứng minh rằng:

$$BC:A_1A_2 = CA:B_1B_2 = AB:C_1C_2.$$

29. Trong ΔABC kẻ đường phân giác CC' (C' là chân đường phân giác). Phân tích $\overrightarrow{CC'}$ theo $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

30. Điểm I là tâm đường tròn nội tiếp trong ΔABC. Chứng minh rằng :

$$BC.\overrightarrow{IA} + CA.\overrightarrow{IB} + AB.\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

31. Cho ΔABC, tìm tập hợp các điểm M sao cho:

①. $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$. ②. $|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$.

32. Cho hình bình hành ABCD và $k > 0$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

①. $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k^2$. ②. $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}| = k$.

33. Cho hình lục giác đều ABCDEF.

①. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF}$ qua các vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AE}$.

②. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 3|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}|$$

③. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}|$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

34. Cho ΔABC trung tuyến CM. Đường thẳng $\ell /\!/ CM$ cắt các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng tại A', B', C'. Chứng minh: $\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

35. Tứ giác ABCD có 2 đường chéo AC, BD vuông góc cắt nhau tại M nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng IMJO là hình bình hành.

36. Cho ΔABC trọng tâm G. Phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

37. Cho hình bình hành ABCD, gọi M và N lần lượt là trung điểm của cạnh CB, CD. Tính $\overrightarrow{AC}$ nếu $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{b}$.

38. Cho hình bình hành ABCD, gọi M và N lần lượt là 2 điểm sao cho $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. Tính $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ nếu $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{b}$.

Hệ thức lượng trong tam giác

a, b, c: độ dài các cạnh đối diện các đỉnh A, B, C.

h_a, h_b, h_c: độ dài các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C.

m_a, m_b, m_c: độ dài các trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C.

R, r: bán kính các đường tròn ngoại, nội tiếp ΔABC.

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$: nửa chu vi.

S: diện tích tam giác.

- Định lí cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- Định lí sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
- Độ dài trung tuyến: $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.

Chú ý: Từ công thức tính độ dài trung tuyến: $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

trong đó M là trung điểm của BC.

- Diện tích tam giác:

①. $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ ②. $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$

③. $S = \dfrac{abc}{4R}$ ④. $S = pr$ ⑤. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Héron)

①. Định Lí cosin:

61. Giả sử a và b là độ dài cạnh hình bình hành, d_1, d_2 là độ dài hai đường chéo. Chứng minh $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

62. Chứng minh trong ΔABC nếu $a = 2b\cos C$ thì tam giác đó cân.

63. Trong ΔABC biết AC = 13cm, AB + BC = 22cm, $\widehat{B} = 60^o$. Tính AB, BC.

64. Trong ΔABC biết AB = 3cm, AC = 5cm, $\widehat{A} = 120^o$. Tính độ dài đường phân giác trong BD và các đoạn AD, CD.

65. Trong ΔABC biết $\widehat{B} = 120^o$, AB = 6cm, AC = 10cm. Tính BC.

66. Tính độ dài phân giác trong của góc A trong ΔABC biết BC = 18cm, AC = 15cm, AB = 12cm.

67. Cho ΔABC đều cạnh a. Trên các đoạn BC và AB lấy lần lượt hai điểm D, E sao cho $BD = \frac{1}{3}a$, AE = DE. Tính CE.

68. Cho tứ giác lồi ABCD với E, F, H, G lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA và O là giao điểm của EH, FG. Tìm độ dài các đường chéo của tứ giác ABCD nếu EH = a, FG = b, $\widehat{FOH} = 60^o$.

50 Cho ΔABC với A(5;0), B(0;1), C(3;3). Tìm các góc trong của tam giác.

51 Cho ΔABC với A(1;1), B(0;2), C(2;–1). Trong các góc trong của tam giác có góc tù không ?

52 Trong mpOxy lập phương trình tập hợp những điểm M cách đều 2 điểm A(3;–1), B(–3;5).

53 Trong mpOxy cho 2 điểm A(2;2), B(5;–3). Lập phương trình tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}^2$.

54 Cho A(–2;1), B(4;–2).

①. Tìm tập hợp các điểm M sao cho MA:MB = 1:2.

②. Tìm tập hợp tâm của những đường tròn đi qua A, B.

55 Cho 2 điểm A(3;–2), B(– 4;3).

①. Lập phương trình đường tròn (C) đường kính AB.

②. Lập phương trình tiếp tuyến với (C) tại A.

56 Cho đường tròn tâm I(–3;2) và điểm A(1;1) trên đường tròn. Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn tại A.

57 Lập phương trình tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}^2$ trong đó A(0;5), B(– 4;3) và I là trung điểm đoạn AB.

58 Cho 3 điểm A(3;–5), B(–3;3), C(–1;–2).

①. Chứng minh rằng A, B, C là các đỉnh của 1 tam giác. Tìm toạ độ điểm D sao cho ABDC là hình bình hành.

②. Tìm toạ độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

③. Tính chu vi và diện tích ΔABC.

④. Tìm toạ độ trọng tâm G, toạ độ trực tâm H của ΔABC, toạ độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh I, H, G thẳng hàng.

⑤. Tìm giao điểm của đường phân giác ngoài góc A với BC.

59 Cho 2 điểm A(1;3), B(3;1). Tìm toạ độ điểm C sao cho ΔABC đều.

60 Cho ΔABC vuông tại A, với AB = 3a, AC = 4a. Gọi M, N là 2 điểm sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Tìm trên CA điểm K sao cho $BK \perp MN$.

39 Cho ΔABC, gọi M, N là 2 điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC}$, I và J lần lượt là trung điểm của đoạn MN và BC.

①. Phân tích $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{IJ}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

②. Phân tích $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo $\vec{m} = \overrightarrow{IJ}$, $\vec{n} = \overrightarrow{MN}$.

40 Cho đường tròn tâm O và 2 dây cung AB, CD vuông góc và cắt nhau tại E.

①. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OE}$.

②. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng OIEJ là hình bình hành.

③. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 2a$ (a > 0)

41 Từ 1 điểm M ngoài đường tròn tâm O, kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Phân tích $\overrightarrow{MO}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$ nếu $\widehat{AMB} = 2\alpha$.

42 Cho hình bình hành ABCD, gọi M, N là 2 điểm sao cho $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{ND} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, G là trọng tâm ΔBMN. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

①. Tính $\overrightarrow{AN}$ theo $\vec{b}$ và $\vec{c}$. ②. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

③. Nếu I là 1 điểm sao cho $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$. Xác định k để A, G, I thẳng hàng.

43 Cho ΔABC trọng tâm G, P là 1 điểm sao cho $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

①. Tính $\overrightarrow{CP}$ theo $\vec{b}$, $\vec{c}$, k. Định k để C, P, G thẳng hàng.

②. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

44 Cho ΔABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AM và P là điểm sao cho $\overrightarrow{CM} = 3\,\overrightarrow{CP}$

①. Chứng minh rằng $\overrightarrow{NB} + 5\overrightarrow{NC} = 6\overrightarrow{NP}$.

②. Gọi K là điểm sao cho $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AB}$. Tính $\overrightarrow{PK}$, $\overrightarrow{NK}$ theo $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Định k để N, K, P thẳng hàng.

45 Cho hình bình hành ABCD, gọi M và N lần lượt là 2 điểm sao cho $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

①. Tính $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ theo $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

②. I, J là 2 điểm sao cho $\overrightarrow{CI} = \alpha\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BJ} = \beta\overrightarrow{BI}$. Định α, β sao cho J là trọng tâm ΔAMN.

46 Cho ΔABC, M và N là 2 điểm sao cho $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

①. Định k để C, M, N thẳng hàng.

②. Định k để MN qua trung điểm I của AC. Tính IM:IN.

47 Cho ΔABC, E và F là 2 điểm sao cho $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{EA}$, FA = – 2FB.

①. Tính $\overrightarrow{EF}$ theo $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

②. I là trung điểm của EF, AI ∩ BC = K. Xác định điểm K và tính AI:AK.

48 Cho ΔABC và $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ với M là điểm bất kì.

①. Chứng minh rằng $\vec{v}$ là vectơ không đổi.

②. Dựng $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. AD cắt BC tại E, chứng minh rằng $2\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$.

③. Dựng $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$. Gọi P là trung điểm của CN, chứng minh rằng MP đi qua 1 điểm cố định khi M thay đổi.

Trục Toạ Độ & Hệ Trục Toạ Độ

1 ***Trục toạ độ (trục, trục số)***:

- Trục là 1 đường thẳng trên đó có xác định 1 điểm O và 1 vectơ đơn vị $\vec{i}$, kí hiệu $(O,\vec{i})$. Trục còn được kí hiệu là $x'Ox$ hoặc Ox.
- Toạ độ của điểm và vectơ trên trục:

  + x là toạ độ của điểm M ⇔ $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i}$.

  + a là toạ độ của $\vec{a}$ ⇔ $\vec{a} = a.\vec{i}$.
- Độ dài đại số của $\overrightarrow{AB}$ trên trục, kí hiệu $\overline{AB}$, là toạ độ của $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{i}$

$$\overline{AB} = \begin{cases} |\overrightarrow{AB}| & \text{nếu } \overrightarrow{AB} /\!/ \vec{i} \\ -|\overrightarrow{AB}| & \text{nếu } \overrightarrow{AB} /\!/ \vec{i} \end{cases}$$

- Hệ thức Chasles: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

2 ***Hệ Trục toạ độ***:

- Toạ độ điểm và vectơ:

  + $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$. + $\vec{a} = (a_1;a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1.\vec{i} + a_2.\vec{j}$.

Trong đó $\vec{i} = (1;0)$, $\vec{j} = (0;1)$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy.

Giả sử $\vec{a} = (a_1;a_2)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2)$.

- <u>Vectơ bằng nhau – Toạ độ vectơ tổng, hiệu, tích vectơ với 1 số:</u>
  - $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$.
  - $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$. • $k\vec{a} = (ka_1;ka_2)$.
- <u>Toạ độ của $\overrightarrow{AB}$:</u> $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- <u>Hai vectơ cùng phương</u>: $\vec{a} /\!/ \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$ $(b_1b_2 \neq 0)$.

31 Cho ΔABC vuông tại A. Từ điểm I trên cạnh BC kẻ IN//AB cắt AC tại N và IM//AC cắt AB tại M. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ và biết $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}$.

①. Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \dfrac{k}{k-1}\vec{v} + \dfrac{1}{k-1}\vec{u}$

②. Tìm k theo $|\vec{u}|$ và $|\vec{v}|$ để $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AO}$ (O là trung điểm của cạnh BC).

32 Cho $\vec{a} = (-1;2)$. Tìm toạ độ vectơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ biết $|\vec{b}| = \sqrt{10}$.

33 Cho $\vec{a} = (2;-3)$. Tìm toạ độ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ biết $\vec{a}.\vec{b} = -26$.

34 Cho $\vec{a} = (-2;1)$. Tìm toạ độ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$ biết $|\vec{b}| = \sqrt{5}$.

35 Tìm x, y để các điểm A(2;0), B(0;2), C(0;7), D(x;y) là các đỉnh liên tiếp của hình thang cân.

36 Chứng minh ΔABC với A(1;3), B(–3;1), C(–2;–1) là tam giác vuông. Tìm D để ABCD là hình chữ nhật.

37 Cho A(5;–1), B(–1;3).

①. Tìm trên trục tung điểm P sao cho góc $\widehat{APB}$ vuông.

②. Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất.

38 Cho ΔABC với A(–3;6), B(9;–10), C(–5;4). Xác định tâm I và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

39 Chứng minh A(1;–1), B(5;1), C(3;5), D(–1;3) là các đỉnh của 1 hình vuông

40 Xác định toạ độ điểm M đối xứng với điểm N(1;4) qua đường thẳng đi qua hai điểm A(– 4;–1), B(5;2).

41 Cho 2 đỉnh đối diện của hình vuông ABCD: A(3;4), C(1;–2). Tìm hai đỉnh còn lại.

42 Cho 2 đỉnh kề nhau của hình vuông ABCD: A(–1;–3), B(3;5). Tìm 2 đỉnh còn lại.

43 Cho ΔABC với A(2;– 4), B(1;3), C(11;2), tìm toạ độ trực tâm H.

44 Cho ΔABC với A(–2;6), B(6;2), C(1;–3), tìm toạ độ chân đường cao CH và tính độ dài đường cao này.

45 Cho ΔABC với $\overrightarrow{AB} = (3;-4)$, $\overrightarrow{BC} = (1;5)$. Tính độ dài đường cao CH.

46 Cho ΔABC với A(3;–5), B(1;–3), C(2;–2), tìm toạ độ chân các đường phân giác trong và ngoài góc B.

47 Cho ΔABC cân tại A, biết $\widehat{A} = 120^o$, B(–1;2), C(4;1). Tìm toạ độ đỉnh A.

48 Cho hình thoi ABCD với A(1;3), B(–1;–1). Tìm toạ độ C, D nếu đường thẳng CD đi qua điểm M(6;7).

49 Cho h.thoi ABCD với B(1;–3), D(0;4), $\widehat{A} = 60^o$. Tìm toạ độ các đỉnh A, C.

①. Tính $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{PN}$. ②. Xác định k để AM ⊥ PN.

23 Cho hình vuông ABCD có cạnh a = 5cm.

①. Xác định điểm I và J sao cho : $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$, $3\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$.

②. Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$. Suy ra tính tích vô hướng $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AC}$.

③. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{BD} = 0$.

24 Cho ΔABC với các đường trung tuyến AM, BN, CP. Các đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

①. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BE}$.

②. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

25 Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là giao điểm hai đường chéo.

①. Tính AC^2, BD^2, $AC^2 + BD^2$ biết AB = a, AD = b, $\widehat{BAD} = \varphi$.

②. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AE^2 - BE^2 = \frac{1}{4}(AC^2 - BD^2)$.

26 Cho ΔABC vuông tại A có AB = 6cm, AC = 8cm. Gọi M, N là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

①. Biểu diễn $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Tính $|\overrightarrow{AN}|$.

②. Tinh $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$. Suy ra giá trị cạnh MN.

27 A′, B′, C′ là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của ΔABC. Hãy tính:
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}$.

28 Cho ΔABC đều, gọi M, N là 2 điểm sao cho $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$.

①. Phân tích $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ theo $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

②. P là 1 điểm sao cho $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$. Xác định k để PN ⊥ PM.

③. G là trọng tâm của ΔABC, phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$.

④. Tìm tập hợp các điểm I sao cho: $(\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IB})(\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}) = 0$.

29 Cho ΔABC với AB = 5 cm, AC = 7 cm, BC = 8 cm.

①. Tính giá trị góc $\widehat{B}$.

②. Gọi M, N là 2 điểm sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. Tính độ dài MN.

③. Tìm điểm D trên AC sao cho BD ⊥ MN.

30 Cho ΔABC với $\widehat{A} = 120^o$, AB = 3 cm, AC = 5 cm.

①. Tính độ dài cạnh BC và trung tuyến BM.

②. N là 1 điểm sao cho $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Xác định k để AN ⊥ BM.

- Toạ độ trung điểm M của đoạn AB : $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.
- Toạ độ trọng tâm G của ΔABC: $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

49 Cho $\vec{a} = (2;-3)$, $\vec{b} = (5;4)$, $\vec{c} = (-2;-1)$. Tính toạ độ của $4\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$.

50 Cho $\vec{a} = (2;-3)$, $\vec{b} = (1;2)$, $\vec{c} = (9;4)$. Tìm p, q để $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$.

51 Cho $\vec{a} = (x;2y)$, $\vec{b} = (-2y;3x)$ và $\vec{c} = (4;-2)$. Xác định x, y để $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

52 Cho $\vec{a} = (3;-1)$, $\vec{b} = (1;-2)$, $\vec{c} = (-1;7)$. Biểu diễn $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

53 Cho 3 điểm A(–3;2), B(2;–1), C(5; 12).

①. Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$.

②. Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng. Tìm điểm D sao cho ABDC là hình bình hành.

54 Cho A(–1;2), B(–3;–1). Tìm toạ độ điểm M đối xứng với B qua A.

55 Cho M(4;1), N(2;–1), P(3;–2) là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA của ΔABC. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác.

56 Cho ΔABC có A(–1;1), B(–3;–7), đỉnh C ở trên trục hoành, trọng tâm G ở trên trục tung. Tìm toạ độ của C, G.

57 Cho A(3;–2), B(6;4). Đoạn AB được chia thành 3 phần bằng nhau, tìm toạ độ các điểm chia.

58 Chứng minh các điểm A(1;2), B(–2;–3), C(7;12) nằm trên 1 đường thẳng.

59 Chứng minh tứ giác ABCD với A(–1;2), B(2;3), C(6;1), D(–6;–3) là hình thang.

60 Cho 2 vectơ không cùng phương $\vec{a}$, $\vec{b}$. Tìm x sao cho các vectơ $\vec{c} = (x-2)\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{d} = (2x+1)\vec{a} - \vec{b}$ cùng phương.

61 Cho $\vec{a} = (3;5)$, $\vec{b} = (3;-2)$ và điểm I(2;–3). Nếu $\overrightarrow{IM} = \vec{a} + t\vec{b}$. Định t để O, M, I thẳng hàng.

Chương II

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ & ỨNG DỤNG

Tích vô hướng của hai vectơ

- *Định nghĩa*: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$.
  - $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.
  - $\vec{a}.\vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}| & \text{nếu } \vec{a} \nearrow\nearrow \vec{b} \\ -|\vec{a}||\vec{b}| & \text{nếu } \vec{a} \nearrow\swarrow \vec{b} \end{cases}$.
  - $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
  - $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.ch_{\vec{a}}\vec{b}$.
- *Biểu thức toạ độ*: $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
- *Độ dài (môđun) của vectơ*: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
- *Khoảng cách giữa 2 điểm*: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- *Góc của 2 vectơ*: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

1 Cho ΔABC vuông tại A và BC= a, $\widehat{B} = 60^o$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA}$.

2 Cho ΔABC vuông cân tại A với BC = a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$.

3 Cho ΔABC, trên cạnh BC lấy 2 điểm E, F sao cho BE = EF = FC. Đặt $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{EB} = \vec{b}$

①. Biểu thị $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

②. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ nếu $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^o$.

4 Cho ΔABC với $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$. Chứng minh $2\vec{a}.\vec{c} = \vec{a}^2 + \vec{c}^2 - \vec{b}^2$

5 Xác định hình dạng của ΔABC nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2$.

6 Cho ΔABC vuông cân tại A. Tính cosin góc tù tạo bởi các trung tuyến của tam giác kẻ từ B và C.

7 Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^o$ và $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$.

8 Cho $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$.

9 Cho $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ và $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Tìm góc của 2 vectơ

$$\vec{c} = 4\vec{a} + \vec{b} \text{ và } \vec{d} = -\tfrac{1}{4}\vec{a} + \tfrac{7}{4}\vec{b}.$$

10 Các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thoả $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ và $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$. Tính $\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}$.

11 Tính góc của 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nếu biết $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$ và hai vectơ $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc với nhau.

12 Tính góc của 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $7\vec{a} - 5\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc với $7\vec{a} - 2\vec{b}$.

13 Các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 120^o. Tìm x nếu $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ và vectơ $\vec{a} + x\vec{b}$ vuông góc với vectơ $\vec{a} - \vec{b}$.

14 Cho 4 điểm tuỳ ý A, B, C, D. Chứng minh $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

15 Cho hai hình vuông cùng hướng OABC và OA′B′C′ và M là trung điểm của AC′. Chứng minh rằng OM ⊥ A′C

16 Cho ΔABC với $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Phân tích $\overrightarrow{BM}$ theo $\vec{b}$ và $\vec{c}$ trong đó M là chân đường cao kẻ từ B.

17 Cho hình thang cân ABCD đáy lớn AB, góc nhọn ở đáy là 60^o. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Biểu diễn $\overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$. Tìm quan hệ giữa $|\vec{a}|$ và $|\vec{b}|$ để AC ⊥ BD.

18 Cho hình bình hành ABCD có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Trên cạnh AD lấy 1 điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

①. Chứng minh rằng $3\overrightarrow{BM} = 2\vec{b} - 3\vec{a}$.

②. Cho $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^o$. Tính $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}$

③. Gọi N = AC ∩ BM. Chứng minh $5\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC}$.

19 Cho ΔABC có đường cao CH và thoả hệ thức $\overrightarrow{CA}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.

①. Chứng minh rằng ΔABC vuông tại C.

②. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của HC và HB. Chứng minh: AI ⊥ CJ.

20 Cho ΔABC có AB = 3a, AC = 4a, BC = 5a.

①. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.

②. Gọi E, F là 2 điểm sao cho $\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$. Gọi I là trung điểm của đoạn EF. Chứng minh rằng AI ⊥ BC.

21 Cho ΔABC với AB = 8, AC = 3, $\widehat{BAC} = 60^o$. Gọi E, F là 2 điểm sao cho $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

①. Chứng minh $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB})$.

②. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, suy ra độ dài đoạn BC.

③. I là một điểm trên BC sao cho BI = x. Xác định x để AI ⊥ EF.

④. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

22 Cho ΔABC đều, gọi M, N, P là các điểm sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$. Đặt $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = AC$.