

- ⑤. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$.
 ⑥. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$.
 ⑦. $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C-A}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \sin A + \sin B + \sin C$.
 ⑧. $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2}$.

61 Chứng minh ΔABC vuông tại A nếu và chỉ nếu $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$.

62 Chứng minh biểu thức $\sin(250^\circ + \alpha)\cos(200^\circ - \alpha) - \cos 240^\circ \cos(220^\circ - 2\alpha)$ không phụ thuộc vào α .

63 Chứng minh: ①. $\sin 84^\circ \sin 24^\circ \sin 48^\circ \sin 12^\circ = \frac{1}{16}$.

②. $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ = \frac{1}{2} \frac{\sin 25^\circ}{\sin 5^\circ}$.

③. $\sin 10\alpha \sin 8\alpha + \sin 8\alpha \sin 6\alpha - \sin 4\alpha \sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha \sin 6\alpha \sin 10\alpha$.

④. $2\cos^2 2\alpha \cos \alpha - \cos 5\alpha \cos 4\alpha - \cos 4\alpha \cos 3\alpha = 2\cos \alpha \sin 2\alpha \sin 6\alpha$.

64 ΔABC có $4A = 2B = C$. Chứng minh rằng:

①. $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ②. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{5}{4}$.

65 Chứng minh mệnh đề sau: «Điều kiện cần và đủ để một trong các góc của ΔABC bằng 60° là $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$ ».

66 Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều nếu các góc của nó thoả:

①. $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{8}$. ②. $\cos A \cos B \cos C = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

67 Chứng minh rằng ΔABC cân nếu các góc của nó thoả hệ thức:

$$\tan^2 A + \tan^2 B = 2 \tan^2 \frac{A+B}{2}$$

68 Chứng minh rằng ΔABC vuông hoặc cân nếu:

$$a \cos B - b \cos A = a \sin A - b \sin B$$

trong đó a, b, c lần lượt là các cạnh đối diện với các góc A, B, C.

69 Tính số đo góc C của ΔABC biết $\sin A + \sin B + \sin C - 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = 2\sin \frac{C}{2}$.

70 Tìm các góc của ΔABC nếu: $\sin A + \sin B - \cos C = \frac{3}{2}$.

71 Nếu A, B, C là 3 góc của ΔABC . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{3} \cos A + 3(\cos B + \cos C)$$



C Ó B Á N & N Ă N G C A O

$$\begin{aligned} \textcircled{9}. \frac{1}{\sin 18^\circ} - \frac{1}{\cos 36^\circ} &= 2. & \textcircled{10}. \tan \alpha + \cot \alpha + \tan 3\alpha + \cot 3\alpha &= \frac{8 \cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}. \\ \textcircled{11}. \frac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} &= \tan 3\alpha. & \textcircled{12}. \frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2 \sin^2 2\alpha} &= 2 \sin \alpha. \\ \textcircled{13}. \frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} &= \cot \frac{15\alpha}{2}. \\ \textcircled{14}. \frac{2 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{2(\cos \alpha + \cos 3\alpha)} &= \tan 2\alpha \cos \alpha. & \textcircled{15}. \frac{\cot^2 \frac{\alpha}{2} - \cot^2 \frac{3\alpha}{2}}{1 + \cot^2 \frac{3\alpha}{2}} &= 8 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha. \\ \textcircled{16}. \frac{\cos 28^\circ \cos 56^\circ}{\sin 2^\circ} + \frac{\cos 2^\circ \cos 4^\circ}{\sin 28^\circ} &= \frac{\sqrt{3} \sin 38^\circ}{4 \sin 2^\circ \sin 28^\circ}. \\ \textcircled{17}. 16 \cos^3 \alpha \cdot \sin^2 \alpha &= 2 \cos \alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha. \\ \textcircled{18}. (\cos \alpha - \cos \beta)^2 - (\sin \alpha - \sin \beta)^2 &= -4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \cos(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

58 Đơn giản biểu thức:

$$\begin{aligned} \textcircled{1}. \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} & \quad \textcircled{2}. \frac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha} & \quad \textcircled{3}. \frac{\cos m\alpha - \cos n\alpha}{\sin n\alpha - \sin m\alpha} \\ \textcircled{4}. \frac{\cos 3\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin 3\alpha + \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} & \quad \textcircled{5}. \frac{2(\sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1)}{\cos \alpha - \sin \alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha} \\ \textcircled{6}. \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} & \quad \textcircled{7}. \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \sin 6\alpha}{\sin 4\alpha + 2 \sin^2 2\alpha - 1} \\ \textcircled{8}. \frac{\sin(2\alpha + 2\pi) + 2 \sin(4\alpha - \pi) + \sin(6\alpha + 4\pi)}{\cos(6\pi - 2\alpha) + 2 \cos(4\alpha - \pi) + \cos(6\alpha - 4\pi)} \\ \textcircled{9}. \frac{\sin(2\alpha + \beta) + \sin(2\alpha - \beta) - \cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)}{\cos(2\alpha + \beta) + \cos(2\alpha - \beta) - \sin(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha)} \end{aligned}$$

59 Biến đổi thành tích:

$$\begin{aligned} \textcircled{1}. 3 - 4 \cos^2 \alpha. & \quad \textcircled{2}. \sqrt{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} - \sqrt{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} \quad (0 < \alpha \leq \pi). \\ \textcircled{3}. 6 \sin^2 2\alpha - 1 - \cos 4\alpha. & \quad \textcircled{4}. 2 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 4\alpha - 3 \\ \textcircled{5}. \sin 6\alpha - 2\sqrt{3} \cos^2 3\alpha + \sqrt{3}. & \quad \textcircled{6}. \cos^2 \frac{m\alpha}{2} - \sin^2 \frac{n\alpha}{2} \\ \textcircled{7}. 1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha - \tan 2\alpha. & \quad \textcircled{8}. \cos 22\alpha + 3 \cos 18\alpha + 3 \cos 14\alpha + \cos 10\alpha. \end{aligned}$$

60 Chứng minh trong ΔABC :

$$\begin{aligned} \textcircled{1}. \sin A + \sin B + \sin C &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \\ \textcircled{2}. \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 4 \sin A \sin B \sin C. \\ \textcircled{3}. \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= 2 + 2 \cos A \cos B \cos C. \\ \textcircled{4}. \cos A + \cos B + \cos C &= 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

51 Chứng minh:

①. $\sin 5^\circ \sin 55^\circ \sin 65^\circ = \frac{1}{4} \sin 15^\circ$. ②. $\cos 5^\circ \cos 55^\circ \cos 65^\circ = \frac{1}{4} \cos 15^\circ$.

③. $\cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}) \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \sin \frac{3\alpha}{2}$.

④. $4 \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$. ⑤. $1 - 2 \sin 50^\circ = \frac{1}{2 \cos 160^\circ}$.

⑥. $\frac{\sin(80^\circ + 4\alpha)}{4 \sin(20^\circ + \alpha) \sin(70^\circ - \alpha)} = \cos(40^\circ + 2\alpha)$.

⑦. $\sin^2 \alpha + \cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) \cos(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \frac{1}{4}$.

⑧. $\sin^2 2\alpha - \cos(\frac{\pi}{3} - 2\alpha) \sin(2\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$. ⑨. $\sin \alpha \sin 3\alpha = \sin^2 2\alpha - \sin^2 \alpha$.

⑩. $\cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

⑪. $\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 4\alpha \sin \alpha - \cos 3\alpha \cos 2\alpha = 0$.

52 Đơn giản biểu thức:

①. $\sin \alpha \sin(x - \alpha) + \sin^2(\frac{x}{2} - \alpha)$. ③. $\sin^2 2\alpha + \sin^2 \beta + \cos(2\alpha + \beta) \cos(2\alpha - \beta)$.

②. $\sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) - \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha)$.

④. $\sin^3 \alpha \cos 3\alpha + \cos^3 \alpha \sin 3\alpha$. ⑤. $\sin 3\alpha \sin^3 \alpha + \cos 3\alpha \cos^3 \alpha$.

53 Chứng minh rằng biểu thức:

$$A = \cos^2(x - a) + \sin^2(x - b) - 2 \cos(x - a) \sin(x - b) \sin(a - b)$$

độc lập đối với x.

① **Công thức biến đổi tổng thành tích:**

54 Nếu $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{21}{65}$, $\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{27}{65}$ và $\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

Tính $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\cos(\alpha + \beta)$.

55 Tính $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ nếu $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{27}{65}$, $\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{7}{9}$, $\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

56 Tính giá trị biểu thức $\frac{\sin 4\alpha + \sin 10\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + 1 - 2 \sin^2 4\alpha}$ nếu $\sin \alpha - \cos \alpha = m$.

57 Chứng minh:

①. $\sin 495^\circ - \sin 795^\circ + \sin 1095^\circ = 0$.

②. $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{5\alpha}{2} \cos 4\alpha$.

③. $\sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha + \sin 12\alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \sin \frac{21\alpha}{2}$.

④. $\cos 2\alpha - \cos 3\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha = -4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \cos \frac{7\alpha}{2}$.

⑤. $\sin 14\alpha - \sin 5\alpha - \sin 16\alpha + \sin 7\alpha = 4 \sin \frac{9\alpha}{2} \sin \alpha \sin \frac{21\alpha}{2}$.

⑥. $\cos \alpha + \sin \alpha + \cos 3\alpha + \sin 3\alpha = 2\sqrt{2} \cos \alpha \sin(\frac{\pi}{4} + 2\alpha)$.

⑦. $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin 30^\circ$. ⑧. $\cot 70^\circ + 4 \cos 70^\circ = \sqrt{3}$.

Mệnh đề là một câu có đặc tính đúng hay sai và phải thoả 2 điều kiện:
Mỗi mệnh đề đều phải hoặc đúng, hoặc sai.
Mỗi mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

+ **Phủ định của mệnh đề A**, kí hiệu \bar{A} :

Nếu A đúng thì \bar{A} sai, nếu A sai thì \bar{A} đúng.

+ **Mệnh đề kéo theo**: Mệnh đề "Nếu A thì B" gọi là mệnh đề kéo theo, kí hiệu $A \Rightarrow B$:

$A \Rightarrow B$ sai nếu A đúng, B sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

$B \Rightarrow A$ gọi là mệnh đề đảo của $A \Rightarrow B$.

+ **Mệnh đề tương đương**: Mệnh đề "A nếu và chỉ nếu B" gọi là mệnh đề tương đương, kí hiệu $A \Leftrightarrow B$:

$A \Leftrightarrow B$ đúng nếu A và B cùng đúng hoặc cùng sai.

* **Mệnh đề "A hoặc B"** được kí hiệu là $A \vee B$, mệnh đề này sai nếu A và B đều sai, các trường hợp còn lại đều đúng.

* **Mệnh đề "A và B"** được kí hiệu là $A \wedge B$, mệnh đề này đúng nếu A và B đều đúng, các trường hợp còn lại đều sai.

* Phủ định của mệnh đề $A \vee B$ là mệnh đề $\bar{A} \wedge \bar{B}$: $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$

* Phủ định của mệnh đề $A \wedge B$ là mệnh đề $\bar{A} \vee \bar{B}$: $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$

* Phủ định của mệnh đề $A \Rightarrow B$ là mệnh đề $A \wedge \bar{B}$: $\overline{A \Rightarrow B} = A \wedge \bar{B}$

+ **Mệnh đề chứa biến**: là 1 câu chứa một hay nhiều yếu tố không xác định và câu đó trở thành 1 mệnh đề khi thay các yếu tố không xác định bằng những yếu tố xác định, yếu tố không xác định gọi là biến.

+ **Mệnh đề "Với mọi x, P(x) đúng"**, kí hiệu $\forall x, P(x)$.

+ **Mệnh đề "Tồn tại x để P(x) đúng"**, kí hiệu $\exists x, P(x)$.

$$\overline{\forall x, A(x)} = \exists x, \bar{A}(x)$$

$$\overline{\exists x, A(x)} = \forall x, \bar{A}(x)$$

+ **Điều kiện cần, điều kiện đủ**:

* Nếu mệnh đề $A \Rightarrow B$ là 1 định lí thì ta nói:

"A là điều kiện đủ để có B".

"B là điều kiện cần để có A".

Lúc đó ta có thể phát biểu định lí $A \Rightarrow B$ dưới dạng:

"Để có B điều kiện đủ là A" hoặc "Điều kiện đủ để có B là A".

"Để có A điều kiện cần là B" hoặc "Điều kiện cần để có A là B".

* Nếu $A \Rightarrow B$ là một định lí và $B \Rightarrow A$ cũng là một định lí thì $B \Rightarrow A$ gọi là định lí đảo của định lí $A \Rightarrow B$, lúc đó $A \Rightarrow B$ gọi là định lí thuận, trong trường hợp này $A \Leftrightarrow B$ đúng và ta có thể nói:

"A là điều kiện cần và đủ để có B"

"B là điều kiện cần và đủ để có A".



1. Câu nào trong các câu sau là mệnh đề. Xét tính đúng sai của các mệnh đề và tìm mệnh đề phủ định của chúng:

- ①. $4.2 = 6$. ②. $y + 5 > 2$. ③. Bạn hãy ngồi xuống. ④. $3 + \sqrt{2}$.
- ⑤. 23 là số nguyên tố. ⑥. $2x + 4y = 7$. ⑦. Bạn bao nhiêu tuổi?
- ⑧. 12 chia hết cho 3 và 7. ⑨. Điểm A nằm trên đường thẳng AB.

2. Đặt các kí hiệu \forall, \exists trước các mệnh đề chứa biến để được mệnh đề đúng:

- ①. $x + 2 > 3$. ②. $a + 3 = 3 + a$. ③. 15 là bội số của x.
- ④. $(x - 2)^2 > -1$. ⑤. $x + 1 > y$. ⑥. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
- ⑦. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$. ⑧. $x^2 > 0$. ⑨. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
- ⑩. $(x - 2)^2 = 1$. ⑪. $(x + y)z = xz + yz$. ⑫. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

3. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau và tìm mệnh đề phủ định của chúng:

- ①. $2 < 3$. ②. $2 = 2$. ③. 1 là số nguyên tố. ④. 15 không chia hết cho 5.
- ⑤. Ngũ giác đều bất kì có các đường chéo bằng nhau.
- ⑥. Mọi số tự nhiên đều chẵn. ⑦. Mọi tứ giác đều nội tiếp được đường tròn.
- ⑧. Có một số là bội số của 5.

4. Cặp mệnh đề sau có phải là phủ định của nhau không? Nếu không thì sửa lại để chúng là phủ định của nhau:

- ①. $5 < 6; 5 > 6$. ②. a là số chẵn; a là số lẻ. ③. x là số âm; x là số dương.
- ④. Đường thẳng a cắt đ. thẳng b; Đường thẳng a song song với đ. thẳng b.
- ⑤. Có 1 số là ước số của 15; Có 1 số không là ước số của 15.
- ⑥. Mọi hình thang đều nội tiếp được đường tròn;

Mọi hình thang đều không nội tiếp được đường tròn.

5. Điền vào chỗ trống liên từ "và", "hoặc" để được mệnh đề đúng:

- ①. $\pi < 4 \dots \pi > 5$. ②. $ab = 0$ khi $a = 0 \dots b = 0$.
- ③. $ab \neq 0$ khi $a \neq 0 \dots b \neq 0$. ④. $ab > 0$ khi $a > 0 \dots b > 0 \dots a < 0 \dots b < 0$.

6. Điền vào chỗ trống từ "điều kiện cần" hay "điều kiện đủ" hay "điều kiện cần và đủ" để được mệnh đề đúng:

- ①. Đề tích của 2 số là chẵn, là một trong hai số đó chẵn.
- ②. Đề 1 tam giác là cân, là tất cả các đường cao của nó đều bằng nhau.
- ③. ... để 1 số chia hết cho 8 là số đó chia hết cho 4 và cho 2.
- ④. ... để $ab = 0$ là $a = 0$. ⑤. ... để $x^2 > 0$ là $x \neq 0$.
- ⑥. Đề 1 tứ giác là hình vuông, là tất cả các góc của nó đều vuông.

7. Phát biểu các định lí sau sử dụng khái niệm điều kiện cần:

- ①. Nếu 2 cung trên 1 đường tròn bằng nhau thì 2 dây tương ứng bằng nhau
- ②. Nếu tứ giác T là một h. bình hành thì nó có 2 cạnh đối diện bằng nhau.
- ③. Nếu điểm M cách đều 2 cạnh của góc \widehat{xOy} thì M nằm trên đường phân

giác của \widehat{xOy} .

⑩. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 1$. ⑫. $\sqrt{32\cos^4 15^\circ} - 10 - 8\sqrt{3}$.

⑪. $\cos \alpha \sqrt{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha} + \sin \alpha \sqrt{\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$.

48. Chứng minh:

①. $\tan 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$. ②. $\frac{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \cot^4 \alpha$.

③. $\cos^2 \alpha - \sin^2 2\alpha = \cos^2 \alpha \cos 2\alpha - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

④. $3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 8\sin^4 \alpha$. ⑤. $\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{3}{8}$.

⑥. $8\cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} = 1$. ⑦. $\cos \frac{3\pi}{5} \cos \frac{6\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

⑧. $\sin 18^\circ \sin 54^\circ = \frac{1}{4}$. ⑨. $\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ = \frac{1}{8}$.

⑩. $\cos \frac{\pi}{33} \cos \frac{2\pi}{33} \cos \frac{4\pi}{33} \cos \frac{8\pi}{33} \cos \frac{16\pi}{33} = \frac{1}{32}$. ⑪. $\tan 142^\circ 30' = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$.

⑫. $\cos 50^\circ + 8\cos 200^\circ \cos 220^\circ \cos 80^\circ = 2\sin^2 65^\circ$.

⑬. $\cos 4\alpha \cdot \tan 2\alpha = \sin 4\alpha - \tan 2\alpha$. ⑭. $\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cot \alpha = -1$.

⑮. $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4\sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$. ⑯. $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

⑰. $8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ = 1$. ⑱. $\cot \alpha - \tan \alpha = 2\cot 2\alpha$.

⑲. $\sin^6 \frac{\alpha}{2} - \cos^6 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \alpha - 4}{4} \cos \alpha$. ⑳. $\frac{\cos 2\alpha \tan \alpha - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha \cot \alpha + \sin 2\alpha} = -\tan^2 \alpha$.

㉑. $\frac{\tan 3\alpha}{\tan \alpha} = \frac{3 - \tan^2 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha}$. ㉒. $\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha = \frac{1}{64}\cos 8\alpha + \frac{7}{16}\cos 4\alpha + \frac{35}{64}$.

㉓. $8 + 4\tan \frac{\pi}{8} + 2\tan \frac{\pi}{16} + \tan \frac{\pi}{32} = \cot \frac{\pi}{32}$.

㉔. $\frac{\cos(3\pi - 2\alpha)}{2\sin^2(\frac{5\pi}{4} + \alpha)} = \tan(\alpha - \frac{5\pi}{4})$. ㉕. $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + 3\alpha)}{1 - \sin(3\alpha - \pi)} = \cot(\frac{5\pi}{4} + \frac{3\alpha}{2})$.

III Công thức biến đổi

1 Công thức biến đổi tích thành tổng

49. Tính:

①. $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$ nếu $\sin x = \frac{4}{5}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$). ②. $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}$ nếu $\sin(\frac{5\pi}{2} - x) = \frac{3}{5}$.

③. $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$ nếu $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{4}{3}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$).

④. $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$ nếu $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos \beta = -\frac{1}{2}$.

50. Tính:

①. $\cos \frac{11\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}$. ②. $\sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10}$.

③. $\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{4\pi}{7}$. ④. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$.

⑤. $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 60^\circ \tan 80^\circ$. ⑥. $\sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{7\pi}{30} \sin \frac{13\pi}{30} \sin \frac{19\pi}{30} \sin \frac{25\pi}{30}$.

⑦. $\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$. ⑧. $\frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} - 2(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha)$.

- 35** Tìm góc α thoả $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nếu $\tan 2\alpha = -\frac{12}{5}$.
- 36** Tìm x nếu biết $\tan \alpha = x + 1$, $\tan \beta = x - 1$, $\tan(2\alpha + 2\beta) = \frac{4x}{3}$.
- 37** Tìm m, M sao cho $\forall \alpha$, $m \leq \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \leq M$ và hiệu $M - m$ nhỏ nhất
- 38** Chứng minh nếu $\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{50}}$, $\tan \beta = \frac{1}{3}$ với $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ thì $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$.
- 39** Nếu a, b là 2 góc nhọn thoả $\begin{cases} 3\sin^2 a + 2\sin^2 b = 1 \\ 3\sin 2a - 2\sin 2b = 0 \end{cases}$. Chứng minh $a + 2b = \frac{\pi}{2}$
- 40** Chứng minh biểu thức $\frac{p\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{p\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha}$ (p : hằng số) không phụ thuộc vào α .
- 41** Định m để biểu thức sau không phụ thuộc vào α :
- $\cos 2\alpha - m\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha + 1$.
 - $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + m(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + (m + 1)\sin^2 2\alpha$.
 - $m(2m\sin \alpha - 1) - 4(m^2 - 1)\sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2(m + 1)\cos^2 \alpha - 2\sin \alpha$.
 - $m(\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha) + (2m - 1)(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) + \cos 2\alpha + 4$.
- 42** Định p, q để biểu thức $p(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - q(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ không phụ thuộc α .
- 43** Chứng minh nếu $\tan \alpha \cdot \tan \beta = 1$ thì $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ và $\cos 2\alpha = -\cos 2\beta$.
- 44** Chứng minh nếu A và B là 2 góc nhọn của 1 tam giác vuông thì:
 $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \cdot \sin B$.
- 45** Chứng minh rằng trong ΔABC :
$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \right)$$
- 46** Tính không dùng bảng:
- $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$.
 - $\sin^2 70^\circ \sin^2 50^\circ \sin^2 10^\circ$.
 - $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$.
- 47** Đơn giản biểu thức:
- $\frac{\sqrt{2\sin \alpha - \sin 2\alpha}}{\sqrt{2\sin \alpha + \sin 2\alpha}}$ ($\pi < \alpha < 2\pi$).
 - $\frac{2\cos \alpha - \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha + \cos^2 \alpha}$.
 - $\frac{\tan^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$.
 - $\frac{2\sin^2 \alpha}{1 + \cos(\pi - 2\alpha)} - \sin^2 \alpha$.
 - $\frac{1 + \cot 2\alpha \cdot \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.
 - $\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\cos(6\alpha - \pi)}{\cos 2\alpha}$.
 - $\frac{\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}}{\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).
 - $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.
 - $5\sin^4 2x - 4\sin^2 2x \cos^2 2x - \cos^4 2x + 3\cos 4x$.

- 8** Phát biểu các định lí sau sử dụng khái niệm điều kiện đủ:
- Nếu 2 tam giác bằng nhau thì chúng có ít nhất 1 cạnh bằng nhau.
 - Nếu tứ giác T là một h.thoi thì nó có 2 đường chéo vuông góc với nhau.
 - Nếu số a tận cùng bằng chữ số 0 thì nó chia hết cho 5.
- 9** Hãy sửa lại (nếu cần) các mệnh đề sau để được mệnh đề đúng:
- Đề 2 tam giác là bằng nhau, điều kiện cần và đủ là các góc tương ứng của chúng bằng nhau.
 - Đề tứ giác T là hình bình hành, điều kiện đủ là nó có 2 cạnh đối diện bằng nhau.
 - Điều kiện đủ để số a chia hết cho 5 là a tận cùng bằng chữ số 0 hoặc 5.
- 10** Các mệnh đề sau đúng hay sai, giải thích:
- Mọi số nguyên tố đều lẻ.
 - $\forall x, x^2 > x$.
 - $\forall n, n^2 + n + 41$ nguyên tố.
 - Nếu $xy > 4$ thì $x > 2$ và $y > 2$.
 - Một tổng bất kì chia hết cho 3 thì từng số hạng của tổng chia hết cho 3.
- 11** Chứng minh các mệnh đề sau bằng phản chứng:
- Nếu ab lẻ thì a và b đều lẻ.
 - Nếu $a^2 = b^2$ thì $a = b$ ($a, b > 0$).
 - Nếu $x^2 + y^2 = 0$ thì $x = y = 0$.
 - Nếu $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$
 - Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với 1 đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
 - Nếu $a + b < 2$ thì 1 trong 2 số a và b nhỏ hơn 1.
 - Nếu $a_1 a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$ thì ít nhất 1 trong 2 phương trình $x^2 + a_1 x + b_1 = 0$, $x^2 + a_2 x + b_2 = 0$ có nghiệm.
- 12** Phân tích các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng:
- 2 là số nguyên chẵn.
 - 5 là số dương hoặc là số nguyên.
 - 15 và 17 là hai số lẻ.
 - 2 là số dương còn $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.
 - $2 > 5$ hoặc $2 < 5$.
 - 3 và 5 là 2 số nguyên tố.
 - Số 5 lớn hơn 3, nhỏ hơn 7.
 - 2 là số hữu tỉ hoặc là số nguyên.
 - ΔABC và ΔDEF bằng nhau.
 - Hình thoi là hình vuông hoặc là tứ giác.
 - Hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau.
 - ΔABC và ΔDEF là hai tam giác vuông và bằng nhau.
 - 15 và 17 là hai số lẻ nguyên tố cùng nhau.
 - Số 15 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 4.
 - $4.5 = 2.10 = 19$.
 - Số 15 chia hết cho 4 hoặc 5.
 - Phương trình $x + 5 = 2$ có nghiệm còn ph. trình $x + 5 = x$ vô nghiệm.
 - Nếu ab là số chẵn thì a hoặc b là số chẵn.
 - Nếu $x > 2$ và $y > 2$ thì $xy > 4$.
 - Nếu một số tận cùng bằng 5 hoặc 0 thì nó chia hết cho 5.

13 Phủ định các mệnh đề (mệnh đề chứa biến) sau:

- ①. ΔABC vuông cân. ②. Số a lớn hơn hoặc nhỏ hơn 0. ③. $4 < x < 5$.
- ④. Hai góc A và B không bằng nhau mà cũng không bù nhau.
- ⑤. $\forall x, x < 3 \Rightarrow |x| < 3$.
- ⑥. Có 1 đường thẳng đi qua 1 điểm và vuông góc với 1 đ. thẳng cho trước.
- ⑦. Nếu $xy > 4$ thì $x > 2$ và $y > 2$. ⑧. Nếu a hoặc b chẵn thì ab chẵn.
- ⑨. Nếu số a chia hết cho 5 thì nó tận cùng bằng 0 hoặc 5.
- ⑩. Nếu tứ giác T là hình bình hành và có 2 đường chéo bằng nhau thì nó là hình chữ nhật.

Tập Hợp

+ Tập hợp con: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$.

Ta thường gặp một số tập con của tập \mathbb{R} sau đây:

- ▲ $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$: khoảng. ▲ $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$: đoạn.
- ▲ $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$, ▲ $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$: nửa khoảng.
- ▲ $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$, ▲ $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$,
- ▲ $[b; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq b\}$, ▲ $(b; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > b\}$, ...

Như vậy $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$,

+ Tập hợp bằng nhau: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$.

+ Phép giao: $A \cap B = \{x / x \in A \text{ và } x \in B\}$.

+ Phép hợp: $A \cup B = \{x / x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.

+ Hiệu của 2 tập hợp: $A \setminus B = \{x / x \in A \text{ và } x \notin B\}$.

+ Phần bù: Nếu $A \subset E$, $\complement_E A = E \setminus A$.

14 Các mệnh đề sau đúng hay sai:

- ①. $a = \{a\}$. ②. $a \in \{a\}$. ③. $\{a\} \subset \{a\}$. ④. $\emptyset \subset \emptyset$.
- ⑤. $\emptyset \in \emptyset$. ⑥. $\emptyset \in \{\emptyset\}$. ⑦. $\emptyset = \{0\}$. ⑧. $\emptyset \in \{0\}$.
- ⑨. $\emptyset = \{\emptyset\}$. ⑩. $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$.
- ⑪. $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$. ⑫. $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$.

15 Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập \emptyset :

- ①. Tập các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 9 = 0$.
- ②. Tập các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 9 = 0$.
- ③. Tập các số tự nhiên nhỏ hơn 0. ④. Tập các số nguyên nhỏ hơn 7.
- ⑤. Tập các số nguyên tố nhỏ hơn 7.
- ⑥. Tập các số nguyên tố lớn hơn 7 và nhỏ hơn 11.

16 Cho $A = \{x / x = \frac{n^2 - 1}{2}, n \in \mathbb{N}\}$. Số nào trong các số $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}, 4$ là phần tử của A .

- ③. $\frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)}{1 - \tan^2 \alpha \cdot \cot^2 \beta} = -\cos^2 \alpha \sin^2 \beta$.
- ④. $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan(\alpha + \beta)} + \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan(\alpha - \beta)} + 2 \tan^2 \alpha = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$.
- ⑤. $\tan(\alpha - \beta) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta = \tan \alpha - \tan \beta - \tan(\alpha - \beta)$.
- ⑥. $\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta - \frac{2 \cos(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} + 2 = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}$.
- ⑦. $\tan 6\alpha - \tan 4\alpha - \tan 2\alpha = \tan 6\alpha \cdot \tan 4\alpha \cdot \tan 2\alpha$.
- ⑧. $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ = \sqrt{3}$.
- ⑨. $\tan 830^\circ + \tan 770^\circ + \tan 740^\circ = \tan 470^\circ \cdot \tan 410^\circ \cdot \tan 380^\circ$.
- ⑩. $\cot 80^\circ \cdot \cot 70^\circ + \cot 70^\circ \cdot \cot 30^\circ + \cot 30^\circ \cdot \cot 80^\circ = 1$.
- ⑪. $\tan(\alpha - \beta) + \tan(\beta - \gamma) + \tan(\gamma - \alpha) = \tan(\alpha - \beta) \tan(\beta - \gamma) \tan(\gamma - \alpha)$.
- ⑫. $\frac{3 - \tan^2 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} = \tan(60^\circ + \alpha) \cdot \tan(60^\circ - \alpha)$.

27 Đơn giản biểu thức:

- ①. $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}$. ②. $\frac{\cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)}$.
- ③. $\sin(2x - \pi) \cos(x - 3\pi) + \sin(2x - \frac{9\pi}{2}) \cos(x + \frac{\pi}{2})$.

28 Tìm điều kiện của α và β để $\sin(\alpha + \beta) = 3 \sin(\alpha - \beta) \Rightarrow \tan \alpha = 2 \tan \beta$.

29 Chứng minh nếu $\sin(2\alpha + \beta) = 2 \sin \beta$ thì $\tan(\alpha + \beta) = 3 \tan \alpha$.

30 Tính $A = a \cdot \sin^2(\alpha + \beta) + b \cdot \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) + c \cdot \cos^2(\alpha + \beta)$ biết $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

II Công thức nhân

31 Tính:

- ①. $\sin 2\alpha$ nếu $\sin \alpha - \cos \alpha = m$. ②. $\sin \alpha$ nếu $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{7}{5}$.
- ③. $\tan 2\alpha$ nếu $\cos(\alpha - 90^\circ) = 0,2$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$).
- ④. $\cot 2\alpha$ nếu $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\frac{2}{3}$ ($270^\circ < \alpha < 360^\circ$).
- ⑤. $\sin \alpha, \cos \alpha$ nếu: ①. $\cos \frac{\alpha}{2} = 0,6$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$). ②. $\sin 2\alpha = -\frac{1}{3}$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$).
- ⑥. $\cos^8 x - \sin^8 x$ nếu $\cos 2x = m$. ⑦. $\sin^6 x + \cos^6 x$ nếu $\cos 2x = n$.

32 Chứng minh $\sin \alpha$ và $\tan \frac{\alpha}{2}$ có cùng dấu $\forall \alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

33 Tìm $\tan(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ nếu $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và α không thuộc về cung phần tư I.

34 Cho $\sin x = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ với $0^\circ < x < 90^\circ$. Tính $\cos 2x$ và suy ra giá trị của x . Trong trường hợp $90^\circ < x < 180^\circ$, tìm giá trị của x .

1 Công thức cộng

- 15** Tính: ①. $\sin(60^\circ - \alpha)$ nếu $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.
 ②. $\cos(70^\circ + \alpha)$ nếu $\sin(40^\circ + \alpha) = b$, $0 < \alpha < 45^\circ$.
 ③. $\tan(\alpha + 30^\circ)$ nếu $\cos \alpha = \frac{7}{25}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.
 ④. $\tan(\alpha - \beta)$ nếu $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.
 ⑤. $\sin(\alpha + \beta - \gamma)$ nếu $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \beta = \frac{8}{17}$, $\tan \gamma = \frac{4}{3}$, $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.
 ⑥. $\tan \frac{x}{2} \tan \frac{y}{2} + \tan \frac{y}{2} \tan \frac{z}{2} + \tan \frac{z}{2} \tan \frac{x}{2}$ nếu $x + y + z = \pi$.
- 16** Tìm $\tan \beta$ nếu $\cot(\alpha + \beta) = 2$ và $\tan \alpha = -3$.
- 17** Tìm $\alpha + \beta$ nếu $\cot \alpha = 4$, $\cot \beta = \frac{5}{3}$ và $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.
- 18** Chứng minh nếu $\tan \alpha = 5$, $\cot \beta = \frac{2}{3}$ và $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ thì $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.
- 19** Chứng minh nếu $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{21}}{14}$ và α, β là góc nhọn thì $\alpha + \beta = 60^\circ$.
- 20** Tìm x nếu biết $\tan \alpha = \frac{3+\sqrt{x}}{2}$, $\tan \beta = \frac{3-\sqrt{x}}{2}$ và $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.
- 21** Tìm $\alpha + \beta$ nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là nghiệm của phương trình $6x^2 - 5x + 1 = 0$.
- 22** Biết $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$. Tính $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta)$.
- 23** Nếu A, B, C là các góc của 1 tam giác với C tù. Chứng minh $\tan A \cdot \tan B < 1$.
- 24** Nếu A, B là các góc của 1 tam giác. Chứng minh nếu $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sin A}{\sin B}$ thì tam giác đó cân.

25 Giả sử A, B, C là các góc của 1 tam giác. Chứng minh :

- ①. $\sin A \cdot \sin B - \cos C = \cos A \cdot \cos B$. ②. $\frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \tan A + \tan B$.
- ③. $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$.
- ④. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.
- ⑤. $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$.
- ⑥. $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$.
- ⑦. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(\sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B + \sin A \sin B \cos C)$
- ⑧. $\frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} = 2$.

26 Chứng minh:

- ①. $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha \cos \beta}{2 \sin \alpha \sin \beta + \cos(\alpha + \beta)} = \tan(\beta - \alpha)$.
- ②. $\frac{\cos 63^\circ \cos 3^\circ - \cos 87^\circ \cos 27^\circ}{\cos 132^\circ \cos 72^\circ - \cos 42^\circ \cos 18^\circ} = -\tan 24^\circ$.

17 Liệt kê các phần tử của tập hợp:

- ①. $A = \{x / x = 3k \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ và } -7 < x < 12\}$.
 ②. $B = \{x / x = (\frac{1}{2})^n \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ và } x \geq \frac{1}{8}\}$.
 ③. $C = \{x \in \mathbb{Z} / |x| < 4\}$. ④. $D = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x \leq 5\}$.
 ⑤. $E = \{x \in \mathbb{Q} / 2x = 3\}$. ⑥. $F = \{x \in \mathbb{N} / 2x + 1 < 18\}$.
 ⑦. $G = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ có 2 chữ số và chữ số hàng chục của nó là 3}\}$.
 ⑧. $H = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 \leq 25\}$. ⑨. $I = \{x \in \mathbb{Z} / 2x^3 - 3x^2 - 5x = 0\}$.
 ⑩. $J = \{x \in \mathbb{R} / (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$.
 ⑪. $K = \{x \in \mathbb{N} / (x^2 - 2x - 3)(3x^2 + 4x) = 0\}$.
 ⑫. $L = \{x \in \mathbb{Q} / x^4 - 6x^2 + 5 = 0\}$. ⑬. $M = \{x \in \mathbb{N} / 0x = 0\}$
 ⑭. $N = \{(x;y) / 7x + 4y = 100, x, y \in \mathbb{N}\}$

18 Cho $M = \{2, 3, 4, 5, 6, 61\}$. Hãy xác định các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê:

- ①. $A = \{x \in M / 2x \in M\}$. ②. $B = \{x \in M / x - 1 \in M \text{ và } x + 1 \in M\}$.
 ③. $C = \{x \in M / x \text{ chẵn hoặc là bội số của } 3\}$.
 ④. $D = \{x \in M / \exists y \in M, x + y = 6\}$.
 ⑤. $E = \{x \in M / \forall y \in M, y \neq x, \text{ khi chia } x \text{ cho } y \text{ còn dư } 1\}$.

19 Cho $X = \{x / x = \frac{n-5}{n+1}, n \in \mathbb{Z}\}$. Xác định tập hợp $A = \{x \in X / x \in \mathbb{Z}\}$ bằng phương pháp liệt kê.

20 Cho $B = \{-35, -32\frac{1}{3}, -21, -4, 0, \frac{1}{4}, 3, 4, 8, 9, 16, 21\}$. Tìm các tập con của B có phần tử là số tự nhiên, số nguyên, số lẻ, số âm, số là bội số của 6.

21 Liệt kê các tập hợp con của của các tập hợp sau:

- ①. $A = \{1\}$. ②. $B = \{x / x^3 + x^2 - 6x = 0\}$. ③. $C = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 - 3 = 0\}$.

22 Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} / 0 < x^2 < 6\}$. A có bao nhiêu tập hợp con? Viết các tập hợp con của A có 0 phần tử, 1 phần tử, 2 phần tử.

23 Xét quan hệ " \subset " hay " $=$ " giữa các tập hợp sau:

- ①. $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ chẵn}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ chia hết cho } 12\}$.
 ②. $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / x - 2 = 0\}$.
 ③. $A = \{x / x^2 + 1 = 0\}$, $B = \{x / x^2 - 4 = 0\}$.
 ④. $A = \{x \in \mathbb{N} / (x^2 - 4)(x - x^2) = 0\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{Q} / (x^2 - 3x + 2)(x^4 - 3x^2) = 0\}$.
 ⑤. $A = \{x \in \mathbb{R} / |x| \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 - \pi x = 0\}$.
 ⑥. $A = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 + 4)(x^2 - 3x - 4) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / 2x^2 - 5 = 0\}$.

- ⑦. $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x^3 < 10\}$.
- ⑧. $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ là bội số của } 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ là bội số của } 4\}$.
- ⑨. $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ là số chẵn}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 \text{ là số chẵn}\}$.
24. Có bao nhiêu tập hợp X thỏa điều kiện: $\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
25. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, x\}$. Tìm x để $B \subset A$.
26. Cho $A = \{2, 5\}$, $B = \{5, x\}$, $C = \{x, y, 5\}$. Tìm x, y để $A = B = C$.
27. Cho $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, x\}$. Tìm x để $A = B$.
28. Xác định tập hợp X biết $\{1, 3, 5, 7\}$ và $\{3, 5, 7, 9\}$ là các tập hợp con của X và X là tập hợp con của $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
29. Cho đường tròn tâm O và điểm A . Một cát tuyến đi động qua A cắt đường tròn tại B và C . Gọi Δ là tập hợp các trung điểm của đoạn BC và \mathcal{C} là tập hợp các điểm trên đường tròn đường kính OA . Chứng minh $\Delta \subset \mathcal{C}$. Có thể xảy ra trường hợp $\Delta = \mathcal{C}$ không?
30. Có bao nhiêu tập con của tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ gồm 2 phần tử.
31. Cho $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
1. Tìm $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$.
 2. Tìm $A \cap \mathbb{N}$, $B \cap \mathbb{N}$, $A \cup \mathbb{N}$, $B \cup \mathbb{N}$, $(A \cap B) \cap \mathbb{N}$, $(A \cup B) \cap \mathbb{N}$.
32. Cho $X = \{x / x^2 + x - 20 = 0\}$, $Y = \{x / x^2 + x - 12 = 0\}$. Liệt kê các phần tử của $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$.
33. Cho hai tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 12 = 0 \text{ và } 2x^2 - 7x + 3 = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2 - 13x + 12 = 0 \text{ hoặc } x^2 - 3x = 0\}$.
1. Liệt kê các phần tử của A và B .
 2. Xác định các tập hợp $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
34. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ là ước số của } 18\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ là ước số của } 24\}$. Xác định $A \setminus B$, $A \setminus (A \setminus B)$.
35. Cho X là tập hợp các điểm cách đều 2 điểm cố định A và B , Y là tập hợp các điểm nhìn A và B dưới 1 góc vuông. Xác định $X \cap Y$.
36. Cho $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, 5\}$, $a \in \mathbb{R}$. Xác định $A \cap B$, $A \cup B$.
37. Cho $A = [-2; 8)$, $B = [5; +\infty)$. Tìm $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
38. Cho tập hợp A thỏa điều kiện:
 $A \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$ và $A \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$.
 Xác định tập hợp A .
39. Cho $A = \{1, 2\}$, $E = \{1, 2, 4, 6\}$. Tìm các tập hợp $B \subset E$ sao cho $A \cup B = E$.

8. Xác định dấu của tích số $\sin 2 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5$.
9. Tính giá trị các hàm số lượng giác khác biệt:
1. $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$).
 2. $\sin \alpha = -\frac{9}{11}$ ($\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$).
 3. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).
 4. $\cot \alpha = -3$ ($\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$).
 5. $\cos \alpha = \frac{35}{37}$.
 6. $\sin \alpha = -\frac{60}{61}$.
 7. $\tan \alpha = \frac{8}{15}$.
 8. $\cot \alpha = \frac{40}{9}$.
10. Tính $\tan \alpha + \cot \alpha$ nếu $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$).
11. Chứng minh:
1. $\frac{1 - \tan(90^\circ + \alpha)}{1 + \cot(360^\circ - \alpha)} = \frac{\tan(180^\circ + \alpha) + 1}{\cot(270^\circ - \alpha) - 1}$.
 2. $\frac{\cot(270^\circ - \alpha)}{1 - \tan^2(180^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\cot^2(360^\circ - \alpha) - 1}{\cot(180^\circ + \alpha)} = 1$.
 3. $\cot(180^\circ + \alpha) - \frac{\cos(270^\circ - \alpha)}{1 - \cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha}$.
 4. $\frac{\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + \tan^3(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cot^3(\frac{5\pi}{2} - \alpha) + \cot(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = \cot^4 \alpha$.
12. Đơn giản biểu thức:
1. $\frac{(\cot 44^\circ + \tan 226^\circ) \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cot 72^\circ \cdot \cot 18^\circ$.
 2. $\frac{\cos^2(90^\circ - \alpha) + \cot^2(90^\circ + \alpha) + 1}{\sin^2(270^\circ - \alpha) + \tan^2(270^\circ + \alpha) + 1}$.
 3. $\frac{\sin^2(90^\circ + \alpha) - \cos^2(90^\circ - \alpha)}{\tan^2(90^\circ + \alpha) - \cot^2(90^\circ - \alpha)}$.
 4. $\frac{\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{2} + \alpha)} \cdot \frac{1 - \tan^2(\pi - \alpha)}{\tan(\pi + \alpha)}$.
 5. $\frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin^2(\pi - \alpha)}{\cos^3(4\pi - \alpha)} + \frac{\cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha + \sin^2(\pi + \alpha)}{\cos \alpha(4 \sin \alpha + 1)}$.
 6. $\frac{\cos(90^\circ - \alpha) + \tan(90^\circ - \alpha) - \cot(180^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \cdot \cot(270^\circ - \alpha)}$.
13. Tính:
1. $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$.
 2. $\cos 0 + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \dots + \cos \frac{6\pi}{7}$.
 3. $\cos 95^\circ + \cos 94^\circ + \cos 93^\circ + \cos 85^\circ + \cos 86^\circ + \cos 87^\circ$.
 4. $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \dots \tan 89^\circ$.
14. Cho $3 \sin^4 x + 2 \cos^4 x = \frac{98}{81}$. Tính $A = 2 \sin^4 x + 3 \cos^4 x$.
- ⓑ. Công Thức Lượng Giác

23. $1 + \tan\alpha + \tan^2\alpha + \tan^3\alpha = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^3\alpha}$. 25. $\frac{\tan 2\alpha + \cot 3\beta}{\tan 3\beta + \cot 2\alpha} = \frac{\tan 2\alpha}{\tan 3\beta}$.

2. Đơn giản biểu thức:

①. $\cos^2\alpha(1 + \sin^2\alpha \cdot \tan^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot \tan^2\alpha)$.
 ②. $\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \cot\alpha\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \cot\alpha\right)$. ⑤. $1 - \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha - \frac{4\tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$.
 ③. $\cos\alpha\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha} + \tan\alpha\right)\left(1 - \frac{1}{\cos\alpha} + \tan\alpha\right)$. ⑥. $\frac{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + \tan^2\alpha - 1}$.
 ④. $\sin^2\alpha\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \cot\alpha\right)\left(1 - \frac{1}{\sin\alpha} + \cot\alpha\right)$. ⑦. $\frac{\cos^2\alpha}{1 - \tan\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{1 - \cot\alpha}$.
 ⑧. $\sqrt{(1 - \tan^2\alpha)(\cot^2\alpha - 1)}$. ⑨. $\sqrt{(1 - \sin\alpha\sin\beta)^2 - \cos^2\alpha\cos^2\beta}$.
 ⑩. $\sqrt{\frac{8}{1 + \cos\alpha} + \frac{8}{1 - \cos\alpha}}$. ⑪. $\sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$).
 ⑫. $\sqrt{\sin^2\alpha(1 - \cot\alpha) + \cos^2\alpha(1 - \tan\alpha)}$ ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$).
 ⑬. $\cos\alpha\sqrt{\tan^2\alpha - \sin^2\alpha} + \sin\alpha\sqrt{\cot^2\alpha - \cos^2\alpha}$ ($\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$).

3. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào α :

①. $\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha - 1} \cdot \frac{1 - \cot^2\alpha}{\cot\alpha}$. ②. $\frac{(1 + \sin\alpha)^2(\cos\alpha - \cot\alpha)}{(\cos\alpha + \cot\alpha)\cos^2\alpha}$.
 ③. $\frac{(\sin^2\alpha + \tan^2\alpha + 1)(\cos^2\alpha - \cot^2\alpha + 1)}{(\cos^2\alpha + \cot^2\alpha + 1)(\sin^2\alpha + \tan^2\alpha - 1)}$. ⑨. $\frac{1 - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$.
 ④. $2(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2 - (\sin^8\alpha + \cos^8\alpha)$.
 ⑤. $\frac{\tan^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cot^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$. ⑩. $\frac{1}{\cos^6\alpha} - \tan^6\alpha - \frac{3\tan^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.
 ⑥. $3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha)$.
 ⑦. $(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1)(\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 2)$.
 ⑧. $3(\sin^8\alpha - \cos^8\alpha) + 4(\cos^6\alpha - 2\sin^6\alpha) + 6\sin^4\alpha$.

4. Định p, q để biểu thức $A = p(\cos^8x - \sin^8x) + 4(\cos^6x - 2\sin^6x) + q\sin^4x$ không phụ thuộc vào x.

5. ①. Biết $\sin\alpha + \cos\alpha = a$. Tìm $|\sin\alpha - \cos\alpha|$, $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$, $\cos^7\alpha + \sin^7\alpha$

②. Biết $\tan\alpha + \cot\alpha = m$. Tìm $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$, $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha$.

6. Cho $\sin\alpha + \tan\alpha = \frac{3}{20}$, $\tan\alpha - \sin\alpha = \frac{27}{20}$. Tính $\cos\alpha$.

7. Cho $\tan x = 2$. Tính: $\frac{8\cos^3x - 2\sin^3x + \cos x}{2\cos x - \sin^3x}$.

40. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Tìm tất cả các tập X biết $X \subset A$ và $X \subset B$.

41. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ là bội số của } 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ là bội số của } 3\}$ và $C = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ là bội số của } 6\}$. Chứng minh $A \cap B = C$.

42. Cho 3 tập hợp $A = \{a, c, f\}$, $B = \{b, c, f, g, h\}$, $C = \{b, d, f, h\}$.

①. Xác định $A \cap B$, $B \cup C$, $C \setminus A$. ②. Viết các tập hợp con của $A \setminus C$.

③. Kiểm chứng rằng $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

④. So sánh $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ với $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

43. Cho 3 tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{R} / (x - 1)(x^2 - x - 6) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 < 5\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 4\}$.

①. Liệt kê các phần tử của A, B, C. ②. Xác định $B \setminus (A \cap C)$, $(B \cup C) \setminus A$

③. Xác định $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Nhận xét.

④. So sánh $B \setminus (A \cup C)$ và $(B \setminus A) \cap (B \setminus C)$.

44. Cho $X = \{(x; y) / 2x - 3y = 7\}$, $Y = \{(x; y) / 3x + 4y = 2\}$. Tìm $X \cap Y$.

45. Cho các tập hợp: $E = \{x \in \mathbb{N} / x < 10\}$, $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ lẻ và } x < 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$, $C = \{x / x = 2n \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ và } n < 4\}$.

①. Kiểm chứng rằng A, B, C là các tập hợp con của E.

②. Tìm $\bigcup_E(A \cap B)$, $(\bigcup_E A) \cup (\bigcup_E B)$. Nhận xét.

46. Cho $E = [-10; 4]$, $A = [-5; 1]$, $B = [-3; 2]$.

Tìm $\bigcup_E A$, $\bigcup_E B$, $\bigcup_E(A \cap B)$, $\bigcup_E A \cup \bigcup_E B$, $\bigcup_E(A \cup B)$, $\bigcup_E A \cap \bigcup_E B$.

47. Cho $A = (-1; 3]$ và $B = [m; +\infty)$. Tìm $A \cap B$, $A \cup B$.

48. Cho $A = (-\infty; 2m - 3)$ và $B = (m + 1; +\infty)$. Tìm $A \cap B$, $A \cup B$.

49. Cho 2 khoảng $A = (m; m + 1)$ và $B = (-2; 1)$. Tìm m để $A \cup B$ là một khoảng. Hãy xác định khoảng đó.

50. Cho $A = \{x / x = 4n + 2, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x / x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$. Tìm $A \cap B$.

❗ Sai gần đúng và sai số

51. Một hình lập phương có thể tích là $V = 180,57 \pm 0,05$ (cm³). Xác định các chữ số chắc. Viết thể tích gần đúng dưới dạng chuẩn.

52. Một tam giác có 3 cạnh đo được như sau:

$a = 6,3 \pm 0,1$ (cm); $b = 10 \pm 0,2$ (cm); $c = 15 \pm 0,1$ (cm).

Tính chu vi tam giác và viết kết quả gần đúng dưới dạng chuẩn.

1. Tập xác định của hàm số

Hàm số	$y = P(x)$	$y = P(x):Q(x)$	$y = \sqrt{P(x)}$	$y = P(x):\sqrt{Q(x)}$	$y = \sqrt[3]{P(x)}$
Tập xác định	\mathbb{R}	$Q(x) \neq 0$	$P(x) \geq 0$	$Q(x) > 0$	\mathbb{R}

1 Tìm tập xác định của các hàm số:

- ①. $y = \sqrt{x^2 - x^3}$. ②. $y = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x^2 - 4}$. ③. $y = \sqrt{x^3 - x^2}$.
 ④. $y = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3}$. ⑤. $y = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}} - \frac{x-3}{x^2 + 2x - 3}$.
 ⑥. $y = \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3-4x}}{x}$. ⑦. $y = \frac{x-2}{|x|+4} + \sqrt{x-x^2}$.
 ⑧. $y = \frac{|x|}{|x-3|+|x+3|}$. ⑨. $y = \frac{x+1}{|x|-1} + \sqrt{x^2 - |x|}$. ⑩. $y = \frac{2x-1}{\sqrt{|x|-4}}$.
 ⑪. $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{|x^2 - 2x| + |x-1|}$. ⑫. $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x|x|+4}$. ⑬. $y = \frac{\sqrt{|x|x|+4}}{x}$.

2 Biện luận theo m tập xác định của hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 3}$.

3 Định m để tập xác định của các hàm số sau là \mathbb{R} :

- ①. $y = \frac{x+1}{x^2 - m + 6}$. ②. $y = \frac{2x+1}{mx^2 + 4}$.
 ③. $y = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2mx + 4}$. ④. $y = \frac{x^2 - 1}{mx^2 + 2mx + 4}$.

4 Xác định a để tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x - a} + \sqrt{2a - 1 - x}$ là một đoạn có độ dài bằng 1.

5 Cho hàm số $f(x) = \sqrt{a+2-x} + \frac{2}{\sqrt{x-2a+3}}$.

- ①. Tìm tập xác định của hàm số.
 ②. Xác định a để tập xác định của hàm số chứa đoạn $[-1; 1]$.

6 Định a để các hàm số sau xác định trên $[-1; 0)$:

- ①. $y = \frac{x+2a}{x-a+1}$. ②. $y = \frac{1}{\sqrt{x-a}} + \sqrt{-x+2a+6}$.

7 Định a để các hàm số sau xác định $\forall x > 2$:

- ①. $y = \sqrt{x-a} + \sqrt{2x-a-1}$. ②. $y = \sqrt{2x-3a+4} + \frac{x-a}{x+a-1}$.

- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$
- $1 + \sin\alpha = 2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$
- $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$
- $1 - \sin\alpha = 2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$
- $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$

A. Các Hệ Thức Cơ Bản

1 Chứng minh:

- ①. $\cos^2x(2\sin^2x + \cos^2x) = 1 - \sin^4x$.
 ②. $(\cos x + 1 + \sin x)(\cos x - 1 + \sin x) = 2\sin x \cos x$.
 ③. $(1 - \sin x + \cos x)^2 = 2(1 - \sin x)(1 + \cos x)$.
 ④. $\sin^2x(1 + \cot^2x) = 3\cos^2x(1 + \tan^2x) - 2$.
 ⑤. $\cos^4x - \sin^4x = \cos^2x(1 - \tan x)(1 + \tan x)$.
 ⑥. $\cos^2\alpha(2\tan\alpha + 1)(\tan\alpha + 2) - 5\sin\alpha\cos\alpha = 2$.
 ⑦. $\sin^3\alpha(1 + \cot\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \tan\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$.
 ⑧. $3(\sin^4x + \cos^4x) - 2(\sin^6x + \cos^6x) = 1$.
 ⑨. $\tan x - \cot x = \frac{1 - 2\cos^2x}{\sin x \cos x}$. ⑩. $\frac{1 - 2\sin^2x}{1 + 2\sin x \cos x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$.
 ⑪. $2 + \frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$. ⑫. $\frac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha} = \tan^6\alpha$.
 ⑬. $(1 + \frac{1}{\cos\alpha} + \tan\alpha)(1 - \frac{1}{\cos\alpha} + \tan\alpha) = 2\tan\alpha$.
 ⑭. $\frac{\cos^3\alpha + \sin^3\alpha}{1 - \sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha + \sin\alpha$. ⑮. $1 - \frac{\sin^2\alpha}{1 + \cot\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{1 + \tan\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$.
 ⑯. $\frac{\cos\alpha}{(1 + \sin\alpha)(\cot\alpha - \cos\alpha)} = \frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$. ⑰. $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \sin^4\alpha(1 + \tan^2\alpha)$.
 ⑱. $(\frac{\sqrt{\tan\alpha} + \sqrt{\cot\alpha}}{\sin\alpha + \cos\alpha})^2 = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$. ⑲. $\frac{\sin^3\alpha}{\tan\alpha - \sin\alpha} = \cos\alpha(1 + \cos\alpha)$.
 ⑳. $(1 + \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha})(1 + \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}) = \frac{4}{\sin^2\alpha}$. ㉑. $\frac{\sin^4x + \cos^4x - 1}{\sin^6x + \cos^6x - 1} = \frac{2}{3}$.
 ㉒. $\sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} = \frac{2}{|\cos\alpha|}$. ㉓. $\cot^2\alpha - \cot^2\beta = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

GÓC LƯỢNG GIÁC & CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. Các hệ thức cơ bản:

- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad (\alpha \neq k\frac{\pi}{2})$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi)$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi)$

II. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt:

	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\alpha$
cos	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
sin	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
tan	$\cot \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$
cot	$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$

III. Công thức cộng:

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

IV. Công thức nhân:

①. Công thức nhân đôi:

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2\sin a \cos a$
- $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

②. Công thức hạ bậc:

- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

V. Công thức biến đổi:

①. Công thức biến đổi tích thành tổng:

- $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$
- $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$
- $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

②. Công thức biến đổi tổng thành tích:

II. Tính đơn điệu của hàm số:

Giả sử $x_1 \neq x_2$, xét hiệu số $f(x_2) - f(x_1)$ suy ra tỉ số $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$,

+ Nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$: hàm số đồng biến trên $(a; b)$

+ Nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$: hàm số nghịch biến trên $(a; b)$

8. Xét sự biến thiên của hàm số:

- ①. $y = x^2 - 2x + 5$. ②. $y = -2x^2 + x + 1$. ③. $y = \sqrt{2 - x}$.
 ④. $y = \sqrt{2x - x^2}$. ⑤. $y = \sqrt{x^2 - 1}$. ⑥. $y = \frac{2}{x - 1}$. ⑦. $y = \frac{x - 1}{2x + 1}$.

III. Tính chẵn lẻ của hàm số: Để xét tính chẵn lẻ của hàm số, làm theo các bước:

+ Tìm tập xác định D.

+ Nếu D không là tập đối xứng: hàm số không chẵn, không lẻ.

Nếu D là tập đối xứng, xét $f(-x)$:

Nếu $\forall x, f(-x) = f(x)$: hàm số chẵn

Nếu $\forall x, f(-x) = -f(x)$: hàm số lẻ

Nếu $\exists x: f(-x) \neq \pm f(x)$: hàm số không có tính chẵn lẻ.

9. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số:

- ①. $y = x^2 - 2|x| + 2$. ②. $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$. ③. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
 ④. $y = |2x + 1| - |2x - 1|$. ⑤. $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{1 - x}$.
 ⑥. $y = \sqrt{x(x - 1)} + \sqrt{x(x + 1)}$. ⑦. $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2} + \sqrt[3]{(x - 1)^2}$.
 ⑧. $y = \frac{x|x|}{|x - 2| - |x + 2|}$. ⑨. $y = \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x^2}$.
 ⑩. $y = \begin{cases} 1 + x & \text{nếu } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$. ⑪. $y = \frac{x - m}{x^2 + 3mx}$. ⑫. $y = \frac{x^2 - m}{x^2 + 3mx}$.
 ⑬. $y = \sqrt{x^2 - 2|x|}$. ⑭. $y = 3x^2 - x - 2$. ⑮. $y = \sqrt{2 - x}$.

IV. Hàm số bậc nhất và bậc hai.

10. Vẽ đồ thị rồi lập bảng biến thiên của các hàm số:

- ①. $y = 3x - 2$. ②. $y = 1 - 2x$. ③. $y = -3x$. ④. $y = \frac{1}{2}(x - 1)$.
 ⑤. $y = \frac{1}{3}(3 - x)$. ⑥. $y = 2x + |x - 2|$. ⑦. $y = |x - 3| + |x + 5|$.
 ⑧. $y = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 5 - 3x & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$. ⑨. $y = \begin{cases} x - 2 & \text{nếu } x > 3 \\ 3 - 2x & \text{nếu } x \leq 3 \end{cases}$.

- 11** Tìm a để 3 đường thẳng $y = 2x - 1$, $y = 3 - x$, $y = ax + 2$ đồng qui.
- 12** Tìm a, b sao cho đồ thị hàm số $y = ax + b$:
- Đi qua 2 điểm $A(-1;3)$, $B(2;1)$.
 - Đi qua điểm $A(1;3)$ và song song với đường thẳng $y = -2x + 1$.
 - Đi qua điểm $B(3;2)$ và vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - 3$.
- 13** Vẽ đồ thị rồi lập bảng biến thiên của các hàm số:
- $y = 2x - x^2$.
 - $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$.
 - $y = 2x^2 - x - 1$.
 - $y = x^2 - 2|x + 1|$.
 - $y = x^2 + 2|x| - 3$.
 - $y = |x^2 - 4x + 3|$.
 - $y = |-x^2 + 2x + 3|$.
 - $y = |x - 1|(2x + 1)$.
 - $y = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{nếu } x < 1 \\ -x + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$.
 - $y = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{nếu } x \geq -1 \\ 2x - 3 & \text{nếu } x < -1 \end{cases}$.
- 14** Tìm a, b sao cho đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + 1$:
- Đi qua 2 điểm $M(1;-1)$, $N(2;-3)$.
 - Đi qua điểm $A(-2;3)$ và có trục đối xứng $x = \frac{2}{3}$.
 - Đi qua điểm $B(3;1)$ và đỉnh có tung độ -1 .
- 15** Tìm a, b, c sao cho đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$:
- Có đỉnh $S(3;-1)$ và đi qua điểm $A(6,8)$.
 - Cắt trục hoành tại điểm $M(-1;0)$, cắt trục tung tại điểm $N(0;3)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$.
 - Đi qua 3 điểm $A(2;0)$, $B(1;3)$, $C(-1;-3)$.
 - Đi qua 2 điểm $M(4;7)$, $N(-2;-5)$ và tiếp xúc với đ.thẳng $y = 2x - 10$.
- 16** Xác định a, b, c sao cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{8}$ khi $x = \frac{1}{4}$ và nhận giá trị bằng -5 khi $x = 2$.
- 17** Tìm a, b sao cho đồ thị hàm số $y = ax + b$ tiếp xúc với cả hai parabol:
 $y = 8 - 3x - 2x^2$ và $y = 2 + 9x - 2x^2$.
- 18** Dùng đồ thị biện luận theo m số nghiệm của phương trình $-x^2 + 4x + m = 0$
- 19** Vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - |x|$. Dùng đồ thị biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^2 - 2|x| - 1 = m$.
- 20** Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 - 3|x| + \frac{5}{2}$. Định m để phương trình $x^2 - 6|x| + 5 - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.



• Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{s^2}$

▲ Số trung vị của 1 mẫu gồm N số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm (hoặc không tăng), kí hiệu M_e , là số đứng giữa dãy nếu N lẻ và là trung bình cộng của 2 số đứng giữa dãy nếu N chẵn.

▲ Một của mẫu số liệu cho dưới dạng bảng phân bố tần số, kí hiệu M_o , là giá trị có tần số lớn nhất (có thể có nhiều một).

- 1** Điểm trong 1 bài thi của 36 học sinh được ghi như sau:
- | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 4 | 15 | 12 | 10 | 10 | 6 | 17 | 8 | 6 | 12 | 11 | 7 |
| 12 | 5 | 14 | 11 | 7 | 10 | 10 | 17 | 15 | 5 | 4 | 8 |
| 11 | 8 | 10 | 7 | 8 | 11 | 8 | 14 | 10 | 6 | 10 | 10 |
- Lập bảng phân bố tần số.
 - Lập bảng phân bố tần số ghép lớp bằng cách chia điểm số thành 5 lớp: $[3;5]$, $[6;8]$, ... (mỗi lớp có độ dài bằng 3).
- 2** Cho các số liệu thống kê:
- | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 111 | 112 | 112 | 113 | 114 | 114 | 115 | 114 | 115 | 116 |
| 112 | 113 | 113 | 114 | 115 | 114 | 116 | 117 | 113 | 115 |
- Lập bảng phân bố tần số - tần suất.
 - Vẽ biểu đồ tần số hình cột.
 - Tìm số trung vị và một.
 - Tìm số trung bình và độ lệch chuẩn.
- 3** Chiều cao của 500 học sinh trong 1 trường:
- | | | | | | |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Chiều cao cm | [150;154) | [154;158) | [158;162) | [162;166) | [166;170] |
| Tần số | 25 | 50 | 200 | 175 | 50 |
- Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.
 - Vẽ đường gấp khúc tần suất.
 - Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.
- 4** Khảo sát dân số 1 thành phố tùy theo số tuổi ta có bảng kết quả:
- | | | | |
|--------|----------|----------------|----------|
| Dân số | dưới 20t | từ 20t đến 60t | trên 60t |
| 40 100 | 11 800 | 23 800 | 4 500 |
- Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.
- 5** Điểm Toán x và điểm Lí y của 1 học sinh như sau:
- | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| x | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 |
| y | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | |
- Tính số trung bình và độ lệch chuẩn của điểm Toán và Lí. Nhận xét.



1. Trình bày một mẫu số liệu:

Cho một mẫu số liệu $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ có kích thước N gồm k ($k \leq N$) giá trị khác nhau.

▲ **Bảng phân bố tần số:** gồm 2 dòng (hoặc 2 cột):

- Dòng (cột) đầu ghi các giá trị x_i theo thứ tự tăng dần.
- Dòng (cột) thứ hai ghi tần số n_i (số lần xuất hiện) của mỗi giá trị x_i .

▲ **Bảng phân bố tần số - tần suất:**

• Trong bảng phân bố tần số bổ sung một dòng (cột) thứ ba ghi tần suất f_i (tỉ số % giữa tần số n_i và kích thước mẫu N).

▲ **Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:** Khi số liệu được chia thành nhiều khoảng $[a_1; a_2), [a_2; a_3), \dots, [a_k; a_{k+1}]$ hay đoạn, mỗi khoảng hay đoạn này gọi là 1 lớp, ta có bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp.

2. Biểu đồ:

▲ **Biểu đồ tần số - tần suất hình cột** (dùng cho bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp):

- Vẽ hai đường thẳng vuông góc.
- Trên trục hoành đánh dấu các khoảng $[a_i; a_{i+1})$ xác định các lớp, trên trục tung ghi tần số (tần suất).
- Vẽ các hình chữ nhật có:
 - Đáy nằm trên trục hoành có kích thước bằng chiều dài của lớp,
 - Chiều cao bằng với tần số (tần suất) tương ứng với lớp đó.

▲ **Đường gấp khúc tần số, tần suất:**

- Vẽ 2 đường thẳng vuông góc.

• Vẽ các điểm $M_i(x_i; y_i)$ với $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ là giá trị đại diện của lớp $[a_i; a_{i+1})$, $y_i = n_i$

(hoặc $y_i = f_i$).

- Nối các điểm M_i ta được đường gấp khúc tần số (tần suất).

▲ **Biểu đồ tần suất hình quạt:**

- Vẽ 1 hình tròn.
- Chia hình tròn thành những hình quạt có góc ở tâm tỉ lệ với tần suất của lớp.

3. Các số đặc trưng của mẫu số liệu:

▲ Đối với mẫu số liệu $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ kích thước N:

• **Số trung bình:** $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$. • **Phương sai:** $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

• **Độ lệch chuẩn:** $s = \sqrt{s^2}$.

▲ Đối với mẫu số liệu cho dưới dạng một bảng phân bố tần số - tần suất:

• **Số trung bình:** $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \sum_{i=1}^k f_i x_i$.

• **Phương sai:** $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

trong đó $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ là giá trị đại diện của lớp $[a_i; a_{i+1})$.

I. Phương trình tương đương.

1 Các phương trình sau có tương đương hay không ?

- $x^2 = x^3$ và $x = 1$.
- $\sqrt{x} = 1$ và $x^2 = 1$.
- $x + 2 = 0$ và $(x^2 + 1)(x + 2) = 0$.
- $x^2 + 2x + 1 = 0$ và $x + 1 = 0$.
- $\frac{x-2}{x^2-5x+6} = 1$ và $x-2 = x^2-5x+6$.
- $4x + 1 - \frac{1}{x-3} = 11 - x - \frac{1}{x-3}$ và $4x + 1 = 11 - x$.
- $x - 1 = 5x - 2$ và $(x - 1)^2 = (5x - 2)^2$.
- $x + 12 + \sqrt{x} = 18 - x + \sqrt{x}$ và $x + 12 = 18 - x$.
- $2x - 3 = 5 - 2x$ và $\frac{2x-3}{x-1} = \frac{5-2x}{x-1}$.
- $\sqrt{x^2-2} = \sqrt{x^2+2x-4}$ và $x^2-2 = x^2+2x-4$.
- $(3x-2)\sqrt{1-x} = (6-x)\sqrt{1-x}$ và $3x-2 = 6-x$.
- $\sqrt{x}\sqrt{x+1} = \sqrt{2}$ và $\sqrt{x(x+1)} = \sqrt{2}$.

II. Phương trình dạng $ax + b = 0$.

Cách giải:

$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$

- Nếu $a \neq 0$: $x = -\frac{b}{a}$.
- Nếu $a = 0$: phương trình có dạng $0x = -b$.
 - + $b \neq 0$: phương trình vô nghiệm.
 - + $b = 0$: phương trình luôn nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

2 Giải các phương trình sau:

- $(3x + 7) - (2x + 5) = 3$.
- $2x + 5 = (3x - 1) - (x - 6)$.
- $(2x + 5) = (3x + 2) - (x - 6)$.

3 Giải và biện luận các phương trình sau:

- $(a + 1)x = (a + 1)^2$.
- $(a^2 - 4)x = a^3 + 8$.
- $(a + 2)x = 4 - a^2$.
- $m(mx - 3) = 2 - x$.
- $m(x - 4m) + x + 3 = 2 - mx$.
- $m(3x - m) = x - 2$.
- $m(mx - 1) = (2m + 3)x + 1$.
- $m^2(1 - x) = m(x + 2) + 3$.
- $m(mx - 1) = 4(m - 1)x - 2$.
- $m^2(x - 1) = m(2x + 1)$.
- $m(m^2x - 1) = 1 - x$.
- $m^2(1 - mx) = 4(2x + m + 3)$.
- $\frac{m^2x + 1}{2} - \frac{m^2x + 3}{3} = \frac{m + 9x}{6}$.
- $x - \frac{a}{1-a} = 1 - \frac{x-1}{a-1}$.
- $x - 2(1 - \frac{1}{a}) = \frac{2(x+1)}{3a}$.

4. Cho phương trình $m^2(x - 1) = 4(x - m - 3)$.

- ①. Định m để phương trình có nghiệm $x = 3$.
- ②. Định m để phương trình vô nghiệm.

5. Định a, b để phương trình $(a + b - 5)x = 2a - b - 1$ luôn thoả $\forall x$.

III. Phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Cách giải: Δ Nếu $a = 0$: phương trình có dạng $bx + c = 0$.

Δ Nếu $a \neq 0$: Tính $\Delta = b^2 - 4ac$.

- * $\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm.
- * $\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- * $\Delta > 0$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Chú ý 1: 1. Nếu $b = 2b'$: tính $\Delta' = b'^2 - ac$.

- * $\Delta' < 0$: Phương trình vô nghiệm.
- * $\Delta' = 0$: Phương trình có nghiệm kép $x_0 = -\frac{b'}{a}$.
- * $\Delta' > 0$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

2. Nếu $a + b + c = 0$: Phương trình có 2 nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$.

3. Nếu $a - b + c = 0$: Phương trình có 2 nghiệm $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$.

Chú ý 2: 1. Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm $x_{1,2}$ thì:
 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2. Nếu biết 1 nghiệm của phương trình là x_0 thì:

$$ax^2 + bx + c = (x - x_0)(ax + \frac{c}{-x_0}).$$

2. Định lý Viète:

• Nếu x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thì:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

• Đảo lại, nếu có 2 số x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = S, x_1 \cdot x_2 = P$ thì x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

3. Dấu các nghiệm số của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$:

▪ Phương trình có 2 nghiệm trái dấu ($x_1 < 0 < x_2$) $\Leftrightarrow P < 0$.

▪ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu ($x_1 \cdot x_2 > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

• Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt ($x_1 > x_2 > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

• Phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt ($x_1 < x_2 < 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

①. $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}$.

②. $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4$.

③. $3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 7$.

④. $\sqrt{x+10} - \sqrt{x+3} = \sqrt{4x-23}$.

⑤. $\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} = \sqrt{9x+7} - \sqrt{x-2}$.

⑥. $\sqrt{4x^2+9x+5} - \sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{x^2-1}$.

⑦. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 4x - 15 + 4\sqrt{x^2-4}$.

⑧. $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

⑨. $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} - x^2 + 4x - 6 = 0$.

⑩. $\sqrt{x-6} + \sqrt{3-x} = x^2$.

⑪. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5}$.

⑫. $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$.

41. Giải các bất phương trình:

①. $\sqrt{x+7} < x$.

②. $x + 1 \geq \sqrt{2+x}$.

③. $\sqrt{2x^2-3x-5} \leq x - 1$.

④. $\sqrt{x^2+3x+3} < 2x + 1$.

⑤. $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 2x + 3$.

⑥. $\sqrt{x-6} \cdot \sqrt{x-12} < x - 1$.

⑦. $\sqrt{6x^2-12x+7} \leq x^2 - 2x$.

⑧. $\sqrt{\frac{1-x}{2x-5}} < 3$.

⑨. $\sqrt{\frac{2x^2+7x-4}{x+4}} < \frac{1}{2}$.

⑩. $\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2}$.

42. Giải các bất phương trình:

①. $x \leq \sqrt{2-x}$.

②. $\sqrt{2x+14} > x + 3$.

③. $\sqrt{x^2-2x} > 4 - x$.

④. $\sqrt{x^2-5x-24} \geq x + 2$.

⑤. $\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6 - x$.

⑥. $x + 4 \leq \sqrt{-x^2-8x-12}$.

⑦. $\sqrt{x^2-4x+5} > 2x^2 - 8x$.

⑧. $\sqrt{\frac{1}{4}-x} \geq x + \frac{1}{2}$.

⑨. $(x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2+5x+28}$.

⑩. $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$.

⑪. $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$.

⑫. $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x - 2$.

43. Giải các bất phương trình:

①. $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2 - 9$.

②. $(x+1)\sqrt{x^2+1} > x^2 - 1$.

③. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} < \sqrt{x-2}$.

④. $\sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x}$.

⑤. $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1$.

⑥. $(x-2)\sqrt{x^2+1} > x^2 + 2$.

⑦. $(x-12)\sqrt{x-3} \leq 0$.

⑧. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$.

⑨. $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$.

⑩. $\frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}} \leq 3x + 2$.



$$\bullet \sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases} \quad \bullet \sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A \geq 0 \\ A < B^2 \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{A} \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases} \quad \bullet \sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$$

35 Giải các phương trình:

①. $|x^2 - 3x - 5| = 2x - 1$. ②. $x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$.
 ③. $x^2 + 4x - |x + 2| - 8 = 0$. ④. $|x^2 - 9| + |x + 2| = 5$.
 ⑤. $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 5x + 6| = 1$.

36 Giải các bất phương trình:

①. $|x^2 - 4x| < 5$. ②. $2x^2 - |x - 2| \geq 9x - 9$.
 ③. $|x^2 - 3x| + x - 2 < 0$. ④. $|3x^2 + 5x - 8| < x^2 - 1$.
 ⑤. $x^2 + 6x - 4|x + 3| - 12 > 0$. ⑥. $|x^2 + 6x + 8| \leq -x^2 - 6x - 8$.

37 Giải các bất phương trình:

①. $|2x^2 - 9x + 15| \geq 20$. ②. $|x - 6| \geq x^2 - 5x + 9$.
 ③. $|x^2 - 3x + 2| \geq x + 2$. ④. $|x^2 + 3x| \geq 2 - x^2$.
 ⑤. $x^2 - 4x - 2|x - 2| + 1 \leq 0$. ⑥. $|x^2 - 3x + 2| > 3x - x^2 - 2$.

38 Giải các bất phương trình:

①. $|2x^2 - x - 10| > |x^2 - 8x - 22|$. ②. $|x^2 - 2x + a| \leq |x^2 - 3x - a|$.
 ③. $|x^2 - 5|x| + 4| \geq |2x^2 - 3|x| + 1|$.
 ④. $x^2 - 8x - \frac{3}{|x - 4|} + 18 \leq 0$. ⑤. $x^2 + 10x - \frac{5}{|x + 5|} + 4 > 0$.
 ⑥. $\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1$. ⑦. $\frac{|x^2 - 2x| + 4}{x^2 + |x + 2|} \geq 1$. ⑧. $\left| \frac{2 - 3|x|}{1 + |x|} \right| > 1$.
 ⑨. $\frac{4}{|x + 1| - 2} \geq |x - 1|$. ⑩. $\frac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6} \geq 2$. ⑪. $\frac{|x^2 - 2x| - 1 - 2x}{x^2 - 2 + |x^2 + 3x|} \geq 0$.

39 Giải các phương trình:

①. $2\sqrt{x + 5} = x + 2$. ②. $\sqrt{2x^2 + 8x + 7} - 2 = x$. ③. $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4$.
 ④. $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 3x + 4$. ⑤. $\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{2x + 6} = x + 3$.
 ⑥. $(x + 1)\sqrt{x^2 + x - 2} = 2x + 2$. ⑦. $(x + 1)\sqrt{16x + 17} = 8x^2 - 15x - 23$.
 ⑧. $\frac{x - 2}{\sqrt{2x - 7}} = x - 6$. ⑨. $\frac{x + 3}{\sqrt{x - 1}} = \sqrt{3x + 1}$.

40 Giải các phương trình:

6 Giải và biện luận các phương trình:

①. $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$. ②. $(m^2 - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 1 = 0$.
 ③. $(x - 2)(mx + 2 - m) = 0$. ④. $x^2 - (m + 1)x + 2m - 2 = 0$.

7 Cho phương trình $(m - 3)x^2 - 2(m + 2)x + m + 1 = 0$.

①. Định m để phương trình có nghiệm. Tính nghiệm x_2 khi biết $x_1 = 2$.
 ②. Định m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 10$.

③. Tìm hệ thức giữa 2 nghiệm x_1, x_2 độc lập đối với m.

8 Cho phương trình $(m^2 - 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3 = 0$.

①. Định m để phương trình có 1 nghiệm, tìm nghiệm này.
 ②. Định m để ph. trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = -6$.

9 Cho phương trình: $mx^2 + 2mx - 2 + m = 0$.

①. Định m để phương trình vô nghiệm.
 ②. Định m để phương trình có ít nhất 1 nghiệm dương.
 ③. Định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq -1$. Lập phương

trình bậc hai có nghiệm là: $\frac{1}{x_1 + 1}, \frac{1}{x_2 + 1}$.

10 Cho phương trình $(m - 2)x^2 + 2(m + 1)x + m - 1 = 0$.

①. Định m để phương trình có 2 nghiệm cùng dấu.
 ②. Định m để phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm dương.
 ③. Định m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^3 + x_2^3 = 64$.

11 Cho phương trình $x^2 + 2(m + 3)x + m^2 + 3 = 0$.

①. Định m để phương trình có 1 nghiệm bằng -2 . Tìm nghiệm còn lại.
 ②. Định m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 . Chứng minh $x_1^2 + x_2^2 \geq 8$.

12 Định m để ph. trình $-4x^4 + 2(m + 1)x^2 - 2m - 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

13 Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ có 2 nghiệm

x_1, x_2 thỏa: $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} > 7$.

14 Cho phương trình $2x^2 + 2(2m + 1)x + 2m^2 + m - 1 = 0$.

①. Định m để phương trình có đúng 1 nghiệm dương.
 ②. Định m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2$ nhỏ nhất.

15 Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 10 = 0$ có nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + 10x_1 x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

16 Định m để ph. trình $2x^2 + 2(m + 1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$ có nghiệm. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình, tìm giá trị lớn nhất của $A = |x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2)|$.

17 Cho phương trình $a^2x^2 - 2ax + 1 - b^2 = 0$

- ①. Xác định a, b để phương trình có 1 nghiệm.
- ②. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

18 ①. Định m để phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + 2x_2 = 1$.

②. Định m để phương trình $(m+3)x^2 - 3mx + 2m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $2x_1 - x_2 = 3$.

③. Xác định k để phương trình $3x^2 - (3k-2)x - 3k - 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $3x_1 - 5x_2 = 6$.

④. Xác định c để phương trình $x^2 - 2x + c = 0$ có nghiệm x_1, x_2 thỏa điều kiện $7x_2 - 4x_1 = 47$.

⑤. Định m để phương trình $3x^2 - 2(m+2)x + 1 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $|x_1 - x_2| = 2$.

19 Cho phương trình $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = a$.

- ①. Giải phương trình khi $a = 10$.
- ②. Định a để phương trình có đúng 3 nghiệm.

20 Nếu α và β là nghiệm của phương trình $x^2 + 4x - 1 = 0$. Không giải phương trình này, tính giá trị của:

- ①. $\alpha^2 + \beta^2$.
- ②. $\alpha^3 + \beta^3$.
- ③. $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$.
- ④. $\frac{1}{(2\alpha+1)^2} + \frac{1}{(2\beta+1)^2}$.

21 Nếu x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + 4x - 1 = 0$. Không giải phương trình tính $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$.

22 Nếu x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$. Không giải phương trình lập phương trình bậc hai mới có nghiệm là:

- ①. $x_1 + 1, x_2 + 1$.
- ②. $x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2$.
- ③. $2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 2x_2$.
- ④. $(x_1 + x_2)^2, (x_1 - x_2)^2$.
- ⑤. $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$.
- ⑥. $\frac{x_1}{x_2 - 1}, \frac{x_2}{x_1 - 1}$.

23 ①. Giải phương trình $x^2 + px + 35 = 0$ nếu tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 74.

②. Giải phương trình $x^2 - x - q = 0$ nếu tổng lập phương các nghiệm của nó bằng 19.

24 ①. Với giá trị nào của k thì tổng 2 nghiệm của ph. trình $x^2 - 2k(x-1) - 1 = 0$ bằng tổng bình phương 2 nghiệm.

②. Với giá trị nào của a thì tỉ số 2 nghiệm của ph. trình $x^2 - (2a+1)x + a^2 = 0$ bằng $\frac{1}{4}$.

26 Định m để các phương trình sau có nghiệm:

- ①. $x^2 - 2(m-1)x + 2m + 1 = 0$.
- ②. $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$.

27 Định m để phương trình $(m-2)x^2 + mx + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

28 Định m để các bất phương trình sau được nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$:

- ①. $x^2 - mx + m + 3 > 0$.
- ②. $2x^2 - 2(2m-1)x + m(m+1) \geq 0$.
- ③. $(m-1)x^2 - (m-5)x + m-1 \leq 0$.
- ④. $(m^2 - m + 1)x^2 - 2(m+2)x + 1 \geq 0$.
- ⑤. $(m^2 - 2m - 3)x^2 - 2(m-3)x + 1 > 0$.
- ⑥. $(-2m^2 + m + 1)x^2 + 2(m+3)x - 2 < 0$.
- ⑦. $(3 + 2m - m^2)x^2 + (2m - 1)x - 1 \leq 0$.
- ⑧. $mx^2 - mx - 5 < 0$.
- ⑨. $(m^2 - 1)x^2 + 2(m-1)x + 2 > 0$.
- ⑩. $-3 \leq \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} \leq 2$.

29 Định m để hàm số $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

30 Định m để bất phương trình:

- ①. $(m-2)x^2 - 2mx + 2m + 3 > 0$ có nghiệm.
- ②. $(3m-2)x^2 + 2mx + 3m \leq 0$ vô nghiệm.

31 Định m để bất ph. trình:

- ①. $x^2 + mx + m - 1 < 0$ nghiệm đúng $\forall x \in [1; 2]$.
- ②. $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m \leq 0$ được thỏa $\forall x \in [0; 1]$.
- ③. $x^2 - 2mx + m^2 - 1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in (0; 2)$.
- ④. $x^2 - (2m+5)x + m^2 + 5m \geq 0$ được thỏa $\forall x \in (1; +\infty)$.

32 Định m để hệ $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ x^2 + (2m+1)x + m^2 + m - 2 \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

33 Định m để bất phương trình:

- ①. $mx^2 - 2(m-4)x + m \geq 0$ nghiệm đúng $\forall x \geq 0$.
- ②. $x^2 - 2mx + |x - m| + 2 > 0$ nghiệm đúng $\forall x$.

34 Định m để hệ $\begin{cases} x^2 + 10x + 9 \leq 0 \\ x^2 - 2x + 1 - m \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

IV Phương trình và bất phương trình quy về bậc hai.

- $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ \pm A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0 \\ -A = B \end{cases}$ • $|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$
- $|A| \leq B \Leftrightarrow -B \leq A \leq B$ • $|A| \geq B \Leftrightarrow -A \geq B \vee A \geq B$
- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$ • $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$

22 Tìm miền nghiệm của các bất phương trình:

- ①. $2x - 3y - 12 > 0$. ②. $y - 4 < 0$. ③. $x + 2 > 0$.

23 Tìm miền nghiệm của bất phương trình & hệ bất phương trình sau:

- ①. $\begin{cases} 3x - 4y + 12 > 0 \\ x - y + 2 < 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$ ②. $-2 < x - y < 6$. ③. $(x - 2)(y - x + 2) < 0$.
④. $(x + y - 1)(3x + y - 1) > 0$. ⑤. $(x + y)(y - 3x) > 0$.

III. Tam thức bậc hai - Bất phương trình bậc hai.

1 Tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Nghiệm của tam thức là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Dấu của tam thức bậc hai: Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) và $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với a với mọi x :

- $a > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0 \forall x$.
- $a < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c < 0 \forall x$.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$ và $f(x)$ luôn cùng dấu với $a \forall x \neq -\frac{b}{2a}$:

- $a > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0 \forall x \neq -\frac{b}{2a}$ ($ax^2 + bx + c \geq 0 \forall x$).
- $a < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c < 0 \forall x \neq -\frac{b}{2a}$ ($ax^2 + bx + c \leq 0 \forall x$).

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2}$ và:

$a > 0$	$x \mid \begin{matrix} -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \end{matrix}$ $f(x) \mid \begin{matrix} & + & 0 & - & 0 & + \end{matrix}$	$a < 0$	$x \mid \begin{matrix} -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \end{matrix}$ $f(x) \mid \begin{matrix} & - & 0 & + & 0 & - \end{matrix}$
---------	---	---------	---

2 Bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ ($\geq, <, \leq$)

Cách giải: Xét dấu tam thức và chọn nghiệm thích hợp.

Điều kiện để tam thức luôn dương hoặc âm:

- * $\forall x, ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ * $\forall x, ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.
- * $\forall x, ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ * $\forall x, ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

24 Giải các bất phương trình:

- ①. $\frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 + 1} \leq 2$. ②. $2x > 5 - \frac{14}{x + 3}$. ③. $\frac{9x - 30}{x - 4} > \frac{14x}{x + 1}$.
④. $\frac{5x + 4}{x + 3} \leq \frac{x + 2}{1 - x}$. ⑤. $\frac{7}{(x - 2)(x - 3)} + \frac{9}{x - 3} + 1 < 0$.

25 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

- ①. $y = \frac{x + 2}{x^2 + 3x + 3}$. ②. $y = \frac{x + 1}{2x^2 - x - 1}$.

③. Với giá trị nguyên nào của k thì pt. trình $4x^2 - (3k + 2)x + k^2 - 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa: ①. $x_1 = x_2 + 1$. ②. $x_1 = 2x_2$.

④. Với giá trị dương nào của c thì phương trình $8x^2 - 6x + 9c^2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 = x_2^2$.

⑤. Tìm p, q để phương trình $x^2 + px + q = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa:

- ①. $x_1 - x_2 = 5$. ②. $x_1^3 - x_2^3 = 35$.

25 Độ dài cạnh góc vuông của 1 tam giác vuông là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$). Không giải phương trình tìm độ dài cạnh huyền, diện tích hình tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

26 Với giá trị nào của a thì tổng bình phương 2 nghiệm của phương trình $x^2 + ax + a - 2 = 0$

là nhỏ nhất.

27 Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Chứng minh rằng phương trình: $(a^2 + b^2 - c^2)x^2 - 4abx + a^2 + b^2 - c^2 = 0$ luôn có nghiệm.



IV. Phương trình quy về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai.

28 Giải các phương trình sau:

- ①. $\frac{3}{x - 1} = \frac{2}{x}$. ②. $\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x + 2} = 1$. ③. $\frac{2x - 3}{x - 1} + 1 = \frac{6x - x^2 - 6}{x - 1}$.

29 Giải các phương trình:

- ①. $(x^2 + 2x)^2 - 7(x^2 + 2x) + 6 = 0$. ②. $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$.
③. $\frac{1}{2x^2 - x + 1} + \frac{3}{2x^2 - x + 3} = \frac{10}{2x^2 - x + 7}$. ④. $\frac{x - 1}{x} - \frac{3x}{2x - 2} = -\frac{5}{2}$.
⑤. $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$. ⑥. $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$.
⑦. $(x - 1)x(x + 1)(x + 2) = 3$. ⑧. $(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 35$.
⑨. $4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) = 3x^2$.
⑩. $(x - 6)(x - 2)(x + 1)(x + 3) = 7x^2$.
⑪. $(x + 3)^4 + (x + 1)^4 = 20$. ⑫. $(x - 2)^4 + (x - 3)^4 = 1$.
⑬. $2(x^2 + 6x + 1)^2 + 5(x^2 + 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2 = 0$.

30 Giải các phương trình sau:

- ①. $|x + 2| = -1$. ②. $|2x - 1| = |x + 3|$.
③. $|3x - 4| = 4 - 5x$. ④. $|2x - 3| = 3 - 2x$.

31 Giải và biện luận các phương trình sau:

- ①. $|3 - x| = m$. ②. $|x - m| = |x - 4|$. ③. $|mx + 3| = |2x - m|$.

32 Giải và biện luận các phương trình sau:

①. $\frac{4}{x+2} = a$. ②. $\frac{a}{2a-x} = 2$. ③. $\frac{x+1}{m-x} = 2m$. ④. $\frac{x+1}{2m-x} = 2m$.
 ⑤. $\frac{mx+2m+3}{1-x} = m^2$. ⑥. $\frac{4mx-m(mx-1)}{2x+1} = 2$. ⑦. $\frac{x-m}{x-1} = \frac{x+2}{x+1}$.
 ⑧. $\frac{3}{x-2a} = \frac{1}{3-ax}$. ⑨. $\frac{2x-m}{x+1} - \frac{2x+2}{x-m} = 0$. ⑩. $\frac{x+m}{x-1} + \frac{2x+2}{x-m} = 3$.

33 Định m để các phương trình sau vô nghiệm:

①. $\frac{mx+2}{x+m-1} = 3$. ②. $\frac{mx-m-3}{x+1} = 1$.

34 Định m để các phương trình sau có nghiệm:

①. $\frac{2m-3}{x+3} - m + 4 = 0$. ②. $\frac{mx-1}{x-2m} = 2$. ③. $\frac{x^2-m}{x+1} - x + m = 1$.

35 Định m để phương trình $\frac{m(mx+1)}{x+1} = 1$ có nghiệm duy nhất x_0 . Tìm $m \in \mathbb{Z}$ sao cho $x_0 \in \mathbb{Z}$.

36 Giải và biện luận các phương trình:

①. $\frac{2x^2-x+2}{x-1} = -x+m$. ②. $x+1 + \frac{1}{x-1} = m(x-3)$.
 ③. $\frac{3x+m}{2-x} = -3x$. ④. $\frac{x^2+(m+2)x-m}{x+1} = -x-4$.

37 Định m để phương trình:

①. $\frac{2mx-5m-1}{x-2} = m(x+2) - 1$ vô nghiệm.
 ②. $\frac{2mx+2m-1}{x-1} = 2 + \frac{2x-1}{x+1}$ có nghiệm.
 ③. $\frac{x^2-2mx+2m^2-1}{x-2m-1} = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
 ④. $\frac{4mx+1}{(x-1)^2} = 1-m$ có đúng 1 nghiệm.



16 Định m để hệ bất phương trình sau có nghiệm:

①. $\begin{cases} m+1-x > 0 \\ 2x-3m+2 > 0 \end{cases}$. ②. $\begin{cases} 3x-2 > 3-2x \\ mx+1 \geq x-2m+5 \end{cases}$.

17 Định m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm:

①. $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ m+2-x \geq 0 \end{cases}$. ②. $\begin{cases} mx-m+2 \geq x+1 \\ (m+1)x-m+2 > 0 \end{cases}$.

18 Giải và biện luận hệ $\begin{cases} m(x-2) \geq x-3 \\ (m+1)x > mx+1 \end{cases}$.

19 Giải các bất phương trình:

①. $(x+14)(8-x)(x+5) > 0$. ②. $(8-x)(1-x)^2(10-x)^3 \geq 0$.
 ③. $\frac{(x+3)(2-x)}{(1-2x)^2} \leq 0$. ④. $\frac{(x+6)^2(x-4)}{(7-x)^5(1-x)^2} \geq 0$.
 ⑤. $\frac{-13(5x-4)(2x-7)^5}{(3x+9)^3} > 0$. ⑥. $\frac{(x+8)^3(x+4)(8-x)^5}{(x-4)^5(x+5)^2} < 0$.
 ⑦. $\frac{(4-x^2)(x+2)(x+1)^3}{(1-x)^2(x+3)^2} \leq 0$. ⑧. $\frac{x+7}{x-5} + \frac{x+1}{2-x} \leq 0$.

20 Giải các phương trình và bất phương trình:

①. $|x-1| + |x-3| = 3$. ④. $2|x+1| > x+4$. ⑤. $|2x-1| \geq x-1$.
 ②. $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 0$. ⑥. $|3-x| < 4$. ⑦. $3|x-1| \leq x+3$.
 ③. $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$. ⑧. $|x-2| < 2x-10$.
 ⑨. $|7-2x| < |3x-7| + |x+2|$. ⑩. $|2x+3| > |x|-4x-1$.
 ⑪. $|x-1| + |2-x| > x+3$.

21 Giải và biện luận bất phương trình: $\frac{(m-1)x+m+1}{x-1} > 0$.

III. Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn - Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn.

1 Bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by+c > 0$ ($\geq, <, \leq$), ($a^2+b^2 \neq 0$).

Miền nghiệm của bất phương trình là tập hợp các điểm có tọa độ (x;y) thỏa bất phương trình.

Cách giải: + Vẽ đường thẳng d: $ax+by+c=0$.

+ Xét điểm $M(x_0;y_0) \notin d$ (thường chọn điểm $O(0;0)$), trên miền chứa M:

- $ax_0+by_0+c > 0 \Rightarrow ax+by+c > 0$.
- $ax_0+by_0+c < 0 \Rightarrow ax+by+c < 0$.

2 Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

Cách giải: + Vẽ các đường thẳng tương ứng với mỗi bất phương trình trong hệ.

+ Xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình (gạch bỏ những miền không là nghiệm), phần còn lại là miền nghiệm của hệ.

II. Bất phương trình bậc nhất - Hệ bất phương trình bậc nhất.

1 Cách giải bất phương trình $ax + b > 0$: $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b$.

- Nếu $a > 0$: $x > -\frac{b}{a}$.
- Nếu $a < 0$: $x < -\frac{b}{a}$.
- Nếu $a = 0$: bất phương trình có dạng $0x + b > 0$.
 Nếu $b > 0$: Bất phương trình luôn thỏa $\forall x \in \mathbb{R}$.
 Nếu $b \leq 0$: Bất phương trình vô nghiệm.

2 Hệ bất phương trình:

Cách giải: • Giải từng bất phương trình trong hệ.
 • Biểu diễn các đỉnh nghiệm trên 1 trục theo thứ tự tăng dần từ trái sang phải.
 • Gạch bỏ những khoảng không là nghiệm của mỗi bất phương trình, phần trống còn lại là nghiệm của hệ.

2 Dấu của nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$:

$a > 0$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$	$a < 0$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$		
	$ax + b$		-	0	+		$ax + b$		+	0	-

12 Các bất phương trình sau có tương đương hay không ?

- $(2 - x)^2(x + 1) > 3(2 - x)^2$ và $x + 1 > 3$.
- $2x - 3 - \frac{1}{x - 5} < x - 4 - \frac{1}{x - 5}$ và $2x - 3 < x - 4$.
- $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x + 1} > 1$ và $x^2 - 1 > x^2 - x + 1$.
- $x^3 + \frac{1}{x - 3} > -1 + \frac{1}{x - 3}$ và $x^3 > -1$.
- $\frac{x + 4}{x - 1} \geq 0$ và $(x + 4)(x - 1) \geq 0$.
- $x + \sqrt{1 - x} > \sqrt{1 - x} - 3$ và $x > -3$.
- $\sqrt{(x - 4)^2(x + 1)} > 0$ và $x + 1 > 0$.
- $\sqrt{x^2 - 1}(x^2 + x) \geq 0$ và $x^2 + x \geq 0$.
- $\frac{\sqrt{x^2 + 5(x + 1)}}{x + 2} \geq 0$ và $\frac{x + 1}{x + 2} \geq 0$.
- $\frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 3}} \geq 2$ và $\sqrt{\frac{x - 2}{x + 3}} \geq 2$.

13 Giải và biện luận các bất phương trình:

- $2(x + m) - 3(2mx + 1) > 6$.
- $m(mx - 3) \geq 2 - x$.
- $m(mx - 1) \leq 4(m - 1)x - 2$.
- $m^2(1 - x) < m(x + 2) + 3$.
- $m(mx - 1) \geq (2m + 3)x + 1$.

14 Định m để bất phương trình $m(mx - 1) < (2 - m)x + 2$ vô nghiệm.

15 Định m để 2 bất phương trình sau tương đương:

- $2(x + m) - 3(2mx + 1) > 6$ và $2x + 1 < 0$.
- $mx - m + 2 > 0$ và $(m + 2)x - m + 1 > 0$.

VII. Hệ phương trình bậc nhất.

Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Cách giải: Đặt $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

- + $D \neq 0$: Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với $x = D_x/D$, $y = D_y/D$.
- + $D = 0$, $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: Hệ vô nghiệm.
- + $D = D_x = D_y = 0$: Xét cụ thể.

38 Giải hệ phương trình:

- $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ y - 3x = 7 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 12x - 4y = 4 \end{cases}$
- $\begin{cases} y + x = 1 \\ |y| - x = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 2 \\ |3x - y| = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} |x - 1| + y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} |x - 1| + |y - 2| = 1 \\ y = 3 - |x - 1| \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{4}{2x + y - 1} + \frac{3}{x + 2y - 3} = 4,75 \\ \frac{3}{2x + y - 1} - \frac{2}{x + 2y - 3} = 2,5 \end{cases}$

39 Giải và biện luận hệ phương trình:

- $\begin{cases} (m + 2)x - 3y = 3m + 9 \\ x + (m - 4)y = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} mx + (m + 2)y = 1 \\ x + my = m \end{cases}$
- $\begin{cases} (m^2 - 1)x + (m - 1)y = m^3 - 1 \\ (m^2 + 1)x + (m + 1)y = m^3 + 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} ax + by = a + 1 \\ bx + ay = b + 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} (a + b)x + (a - b)y = a \\ (2a - b)x + (2a + b)y = b \end{cases}$
- $\begin{cases} a^2x - by = a^2 - b \\ bx - b^2y = 2 + 4b \end{cases}$

40 Định a, b, m để hệ sau vô nghiệm:

- $\begin{cases} 2x + (9m^2 - 2)y = 3m \\ x + y = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} m^2x + (2 - m)y = m^3 + 4 \\ mx + (2m - 1)y = m^5 - 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} ax + 3y = a^2 + 1 \\ (3a + 14)x + (a + 8)y = 5a^2 + 5 \end{cases}$
- $\begin{cases} (1 + a)x + (a + b)y = b - a \\ (5 + a)x + 2(a + b)y = b - 1 \end{cases}$

41 Định a, b, k để hệ sau có nghiệm:

- $\begin{cases} ax - 3y = a \\ 3x - ay = a + 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} ax + by = a + b \\ bx + ay = a - b \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x + (9k^2 - 2)y = 6k - 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} (2 - k)x + k^2y = 3k^2 + 2 \\ (2k - 1)x + ky = k - 1 \end{cases}$

42) Định m để hệ $\begin{cases} -4x + my = m + 1 \\ (m + 6)x + 2y = m + 3 \end{cases}$ có vô số nghiệm.

43) Định a, b để 2 hệ $\begin{cases} ax + 2y = b + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x + y = a^2 + 2 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$ tương đương.

44) Định a, b để hai hệ phương trình sau cùng vô nghiệm:

$$\begin{cases} (a + 1)x + (b + 1)y = 5b - 1 \\ (a - 1)x + by = 2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} (a + 1)x + ay = b \\ 3x + (4 - a)y = 2b - 1 \end{cases}$$

45) Cho hệ $\begin{cases} mx + (3m - 2)y + m - 3 = 0 \\ 2x + (m + 1)y - 4 = 0 \end{cases}$.

- ①. Định m để hệ có nghiệm duy nhất, tìm hệ thức độc lập giữa các nghiệm
- ②. Định m nguyên để nghiệm duy nhất của hệ là nghiệm nguyên.

46) Định a để tổng $x_0^2 + y_0^2$ đạt giá trị nhỏ nhất biết (x_0, y_0) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - y = 2 - a \\ x + 2y = a + 1 \end{cases}$.

47) Giải các hệ:

$$\begin{aligned} \text{①. } & \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -3x + 4y + 2z = 11 \end{cases} & \text{②. } & \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{6} \end{cases} \\ \text{③. } & \begin{cases} \frac{x + 2}{-2} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 3}{2} \\ x + 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases} & \text{④. } & \begin{cases} 4x - 3y - 6z = 5 \\ \frac{x + 2}{3} = \frac{y - 1}{-4} = \frac{z + 5}{4} \end{cases} \end{aligned}$$



Ⅶ. Hệ phương trình bậc hai.

① Hệ Phương Trình có chứa 1 phương trình bậc nhất

Cách Giải: Dùng phương pháp thế.

48) Cho hệ $\begin{cases} x + y = m + 1 \\ x^2y + xy^2 = 2m^2 - m - 3 \end{cases}$.

- ①. Giải hệ khi $m = 3$.
- ②. Chứng minh rằng $\forall m$, hệ luôn có nghiệm.

49) $(x; y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$. Định a để xy nhỏ nhất.

50) Giải và biện luận hệ: $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 - y^2 + 2x = 2 \end{cases}$.

14. $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$ ($a, b, c \geq 0$).

15. $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geq 6abc$ ($a, b, c \geq 0$).

16. $\sqrt[3]{(1 + a)(1 + b)(1 + c)} \geq 1 + \sqrt[3]{abc}$ ($a, b, c \geq 0$).

17. $\left(\frac{1 + x}{2}\right)^n + \left(\frac{1 + y}{2}\right)^n + \left(\frac{1 + z}{2}\right)^n \geq 3$ (x, y, z dương thỏa $xyz = 1$ và $n \in \mathbb{N}^*$).

18. $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$ nếu $abc = 1$. 19. $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

Một số dạng khác

5) Chứng minh rằng:

①. $\sqrt{2pq - q^2} + \sqrt{p^2 - q^2} \geq p$ ($p \geq q \geq 0$). ③. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.

②. $\frac{1}{2} < \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \dots + \frac{1}{2n} < 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

④. $1 < \frac{a}{a + b + c} + \frac{b}{b + c + d} + \frac{c}{c + d + a} + \frac{d}{d + a + b} < 2$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

6) Tìm GTLN của hàm số:

①. $y = x\sqrt{4 - x^2}$. ②. $y = \frac{\sqrt{x - 1}}{x}$. ③. $y = x + \sqrt{2 - x^2}$.

7) Tìm GTNN của hàm số:

①. $y = x + \frac{4}{x^2}$ ($x > 0$). ②. $y = 1 + \frac{1}{x(1 - x)}$ ($0 < x < 1$).

③. $y = x^2 + 1 + 2x + \frac{a^2}{(x + 1)^2}$ ($a \neq 0$).

8) Tìm GTLN của $T = \frac{ab\sqrt{c - 2} + bc\sqrt{a - 3} + ca\sqrt{b - 4}}{abc}$ ($c \geq 2, a \geq 3, b \geq 4$).

9) Nếu $x, y > 0$ và $x + y \leq 1$, tìm GTNN của $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + 4xy$.

10) Cho x, y thay đổi thỏa $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4$. Tìm GTLN của: $A = (3 - x)(4 - y)(2x + 3y)$.

11) x, y, z là 3 số dương thay đổi thỏa $x + y + z \leq 1$. Tìm GTLN của:

$$A = \frac{x}{x + 1} + \frac{y}{y + 1} + \frac{z}{z + 1}$$

- 32. $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}k^2$ nếu $a, b, c > 0$ và $a + b + c = k$.
- 33. $2\sqrt{(a^2 - a)(b^2 - b)} \leq |(a + b)^2 - (a + b)|$ nếu $a^2 + b^2 = 1$ và $ab > 0$.
- 34. $(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n) \geq 2^n$ nếu $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.
- 35. $ab + bc + ca \leq 0$ nếu $a + b + c = 0$.
- 36. $(x_1 + x_2)(z_1 + z_2) \geq (y_1 + y_2)^2$ nếu $x_1 x_2 > 0, x_1 z_1 \geq y_1^2, x_2 z_2 \geq y_2^2$.
- 37. $\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} \geq 4$ nếu $a, b, c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$.
- 38. $\frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1} \leq 1$ nếu $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$.
- 39. $a^2 + \frac{1}{a^2 + 1} \geq 1$. 40. $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$ ($a, b, c > 0$).
- 41. $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$ 42. $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.
- 43. $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$ ($a, b, c > 0$).
- 44. $a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \geq abc\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$ ($a, b, c \geq 0$).
- 45. $(1 + a)^n + (1 + \frac{1}{a})^n \geq 2^{n+1}$ ($a > 0, n \in \mathbb{N}$).

4 Chứng minh rằng:

- 1. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ ($a, b, c > 0$). 2. $(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geq 9pq$ ($p, q \geq 0$).
- 3. $a^6 + b^6 + 1 \geq 3a^2 b^2$. 4. $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(x + y + z) \geq 9\sqrt{xyz}$ ($x, y, z \geq 0$).
- 5. $(1 - x)(2 - y)(4x + y) \leq 2$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$).
- 6. $\frac{a^6 + b^6}{2} \geq 3a^2 b^2 - 4$. 7. $\frac{a^6 + b^9}{4} \geq 3a^2 b^3 - 16$ ($b \geq 0, a \in \mathbb{R}$).
- 8. $a\sqrt{1-a} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$ ($0 \leq a \leq 1$). 9. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ ($a, b, c > 0$).
- 10. $a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$ ($a > b > 0$). 11. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ ($a, b, c > 0$).
- 12. $\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \geq \frac{9}{a+b+c}$ ($a, b, c > 0$).
- 13. $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}$

nếu $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z \leq 3$.

51 Cho hệ $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$.

- 1. Giải hệ khi $m = \frac{1}{2}$. 2. Định m để hệ có nghiệm.

52 Định m để hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

2 **Hệ Đối Xứng:** $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ với $f(x, y) = f(y, x), g(x, y) = g(y, x)$

Cách Giải: Đặt $S = x + y, P = x \cdot y$. Điều kiện có nghiệm: $S^2 - 4P \geq 0$

53 Giải các hệ sau:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$. 2. $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$. 3. $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x + 1)(y + 1) = 12 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x + xy + y = 3 \\ x^2 y + xy^2 = 2 \end{cases}$. 5. $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \end{cases}$. 6. $\begin{cases} x^2 + y^2 \\ x - y + xy = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - x^2 y^2 + y^4 = 13 \end{cases}$. 8. $\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} x + y = 4 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 \end{cases}$. 10. $\begin{cases} xy + x^2 = 1 - y \\ xy + y^2 = 1 - x \end{cases}$.

54 Định m để hệ $\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

55 Giải các phương trình:

1. $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$. 2. $x^2 + \sqrt{x + 5} = 5$. 3. $\sqrt[3]{9 - x} + \sqrt{x + 3} = 4$.

56 Cho hệ $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a \\ x + y - \sqrt{xy} = a \end{cases}$.

- 1. Giải hệ khi $a = 4$. 2. Với giá trị nào của a thì hệ có nghiệm.

57 Định a để hệ sau có nghiệm:

1. $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = a \\ x + y = 3a \end{cases}$. 2. $\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{y+2} = a \\ x + y = 3a \end{cases}$.



①. Bất đẳng thức:

Định nghĩa: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$. $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

①. Bất đẳng thức Cauchy:

* $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ hay $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

* $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$ hay $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a, b \geq 0$)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

* $\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ hay $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ ($a, b, c \geq 0$)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

②. Bất đẳng thức tam giác: $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

$|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$.

$|a - b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \leq 0$.

Định nghĩa và biến đổi tương đương

① Chứng minh rằng:

①. $\frac{1}{a^2 - 4a + 4} > \frac{2}{a^3 - 8}$ ($a \neq 2$). ②. $x^8 + x^2 + 1 > x^5 + x$

③. $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$. ④. $a^4 + b^4 \geq 2ab(a^2 - ab + b^2)$.

⑤. $2(x + y + z) - (xy + yz + zx) \leq 4$ ($x, y, z \in [0; 2]$).

⑥. $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$ ($a, b, c \in [0; 1]$).

⑦. $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$ nếu $a, b, c \in [0; 2]$ và $a + b + c = 3$.

② Chứng minh rằng:

①. $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a + b}$ ($a, b > 0$). ②. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}}$ ($a, b > 0$)

③. $|a + b| < |1 + ab|$ ($|a|, |b| < 1$). ⑤. $\sqrt{a^2 + b^2} > \sqrt[3]{a^3 + b^3}$ ($a, b > 0$).

④. $\frac{b + c}{bc} \geq \frac{4}{b + c}$ ($b, c > 0$). ⑥. $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^3$ ($a, b > 0$).

⑦. $\sqrt{3}(x + y + xy) \leq 2\sqrt{(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1)}$.

⑧. $(ax + by)(bx + ay) \geq (a + b)^2xy$ ($a, b \geq 0, x, y \in \mathbb{R}$).

⑨. $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z)$ ($x, y, z > 0$).

⑩. $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$. Khi nào dấu "=" xảy ra.

Áp dụng: Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$.

Định lý bất đẳng thức Cauchy

③ Chứng minh các bất đẳng thức:

①. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ($a, b > 0$). ②. $ca + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$ ($a, b, c > 0$).

③. $\frac{a + bc^4}{2c^2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b, c > 0$). ④. $(1 + \frac{y}{x})(1 + \frac{z}{y})(1 + \frac{x}{z}) \geq 8$ ($x, y, z > 0$).

⑤. $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ ($a, b, c \geq 0$).

⑥. $(p + 2)(q + 2)(p + q) \geq 16pq$ ($p, q \geq 0$). ⑦. $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{2}a(b + c)$.

⑧. $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$. ⑨. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

⑩. $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ ($a, b, c \geq 0$). ⑪. $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$.

⑫. $a + b + 2a^2 + 2b^2 \geq 2ab + 2b\sqrt{a} + 2a\sqrt{b}$ ($a, b \geq 0$).

⑬. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$ ($a, b, c > 0$). ⑭. $\frac{x^2}{1 + x^4} \leq \frac{1}{2}$.

⑮. $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$ ($a, b, c > 0$).

⑯. $\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} \geq 6$ ($a, b, c > 0$). ⑰. $\frac{1 + x^2}{1 + x^4} \leq \frac{3}{2}$.

⑱. $x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ ($x, y > 0$). ⑲. $\frac{1 + a}{1 + a^2} + \frac{1 + b}{1 + b^2} \leq 3$.

⑳. $3x + 2y + 4z \geq \sqrt{xy} + 3\sqrt{yz} + 5\sqrt{zx}$ ($x, y, z \geq 0$).

㉑. $\frac{a + b + 5}{2} \geq \sqrt{a} + 2\sqrt{b}$ ($a, b \geq 0$). ㉒. $\frac{x}{1 - x} + \frac{4}{x} \geq 8$ ($0 < x < 1$).

㉓. $\frac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}$ ($x > y, xy = 1$). ㉔. $\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2$. ㉕. $\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \geq 1$.

㉖. $3\sqrt{2} \leq \sqrt{11 - x} + \sqrt{7 + x} \leq 6$ ($-7 \leq x \leq 11$).

㉗. Nếu $a + b = 1, a > 0, b > 0$ thì $\sqrt{4a + 1} + \sqrt{4b + 1} \leq 2\sqrt{3}$.

㉘. $mn(m + n) \leq m^3 + n^3$ ($m, n \geq 0$).

㉙. $a^2(1 + b^4) + b^2(1 + a^4) \leq (1 + a^4)(1 + b^4)$.

㉚. $(4 + x^2)(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1) > 16$ ($x > 0$). ㉛. $-\frac{1}{2} \leq \frac{(m + k)(1 - mk)}{(m^2 + 1)(k^2 + 1)} \leq \frac{1}{2}$.