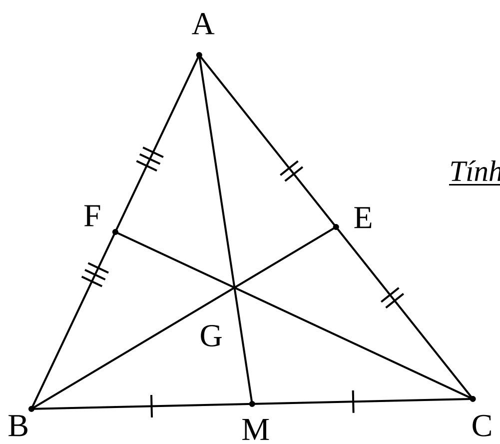
GIAO ĐIỂM CÁC ĐƯỜNG TRONG TAM GIÁC

1. Trọng tâm:

Trọng tâm là giao điểm của 3 đường ***trung tuyến*** *trong tam giác.*

Giả sử ΔABC có 3 đường trung tuyến lần lượt là AM, BE, CF. Khi đó 3 đường trung tuyến này sẽ đồng quy tại 1 điểm G nằm trong tam giác, ta gọi G là trọng tâm tam giác ABC.



Tính chất: $\begin{cases} GA = \dfrac{2}{3}AM \\ GB = \dfrac{2}{3}BE \\ GC = \dfrac{2}{3}CF \end{cases}$ Hệ quả $\begin{cases} AG = 2GM;\ GM = \dfrac{1}{3}AM \\ BE = 2GE;\ GE = \dfrac{1}{3}BE \\ CF = 2GF;\ GF = \dfrac{1}{3}CF \end{cases}$

Nâng cao: Công thức tính độ dài đường trung tuyến theo độ dài 3 cạnh

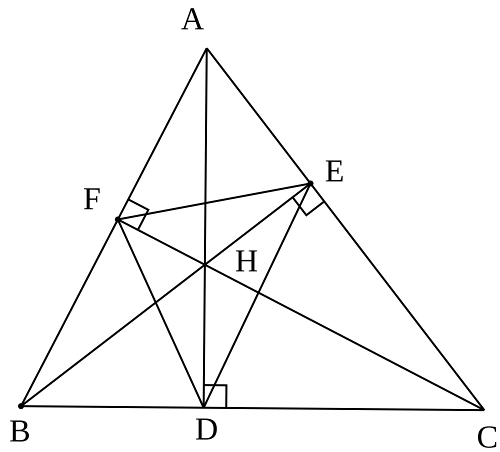
Giả sử ΔABC có $BC = a; AC = b; AB = c$ và m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài 3 đường trung tuyến xuất phát từ 3 đỉnh A,B,C. Khi đó ta có công thức:

$$\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} \end{cases}$$

(Công thức tính độ dài đường trung tuyến)

2. Trực tâm:

Trực tâm là giao điểm 3 ***đường cao*** *trong tam giác.*



Chú ý:

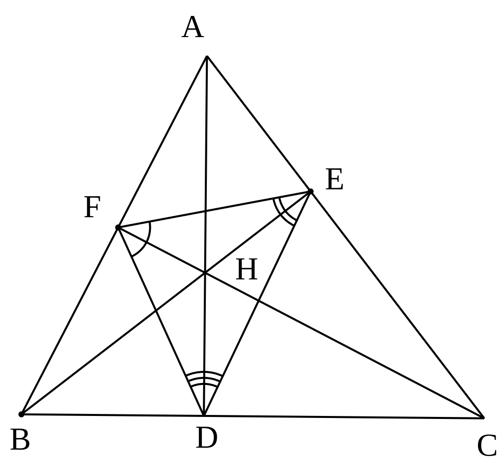
- Với ΔABC là tam giác nhọn thì trực tâm H nằm trong tam giác
- Với ΔABC là tam giác vuông thì trực tâm H trùng đỉnh góc vuông.
- Với ΔABC là tam giác tù thì trực tâm H nằm ngoài tam giác.

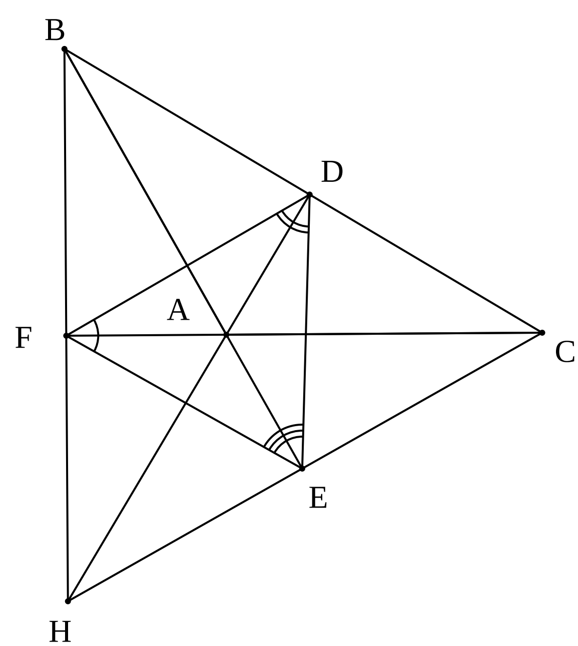
Một số kết quả cần nhớ với trực tâm:

Kết quả 1:

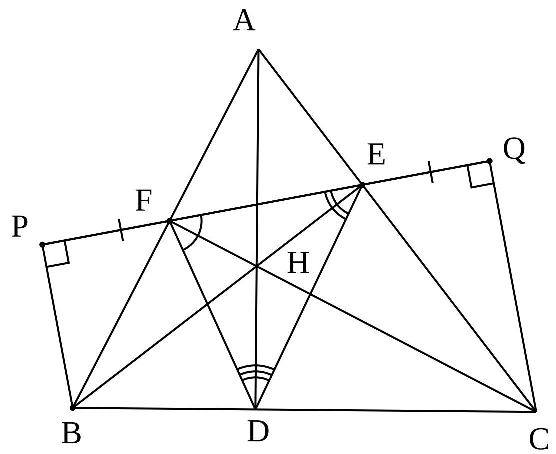
- ΔABC nhọn thì trực tâm H chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác có 3 đỉnh là 3 chân đường cao hạ từ 3 đỉnh của tam giác.

- ΔABC tù thì đỉnh là góc tù của ta giác sẽ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác có 3 đỉnh là 3 chân đường cao hạ từ 3 đỉnh của tam giác.





Kết quả 2: (Bài toán quen thuộc với học sinh lớp 8)

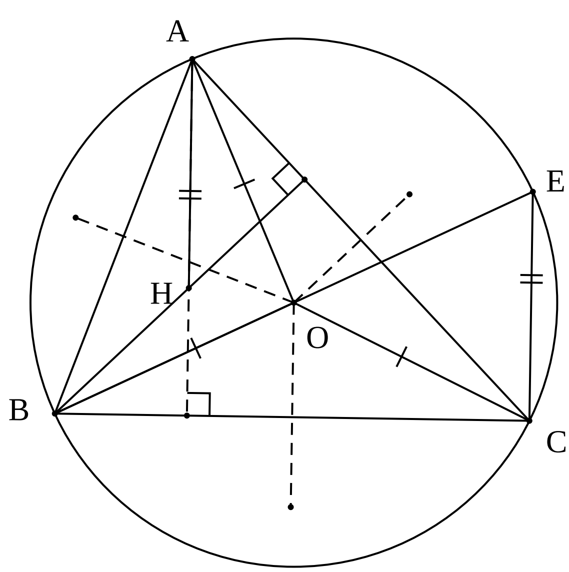


P, Q là hình chiếu của B, C lên đường thẳng EF khi đó ta có: $FP = EQ$

3. Tâm đường tròn ngoại tiếp:

Tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm 3 đường ***trung trực*** *3 cạnh của tam giác.*

(Tính chất đường trung trực: Mọi điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều 2 đầu mút của đoạn thẳng đó).



Giả sử ΔABC có O là giao điểm 3 đường trung trực các cạnh AB, BC, CA. Khi đó O được gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Tính chất:

- Điểm O cách đều 3 đỉnh tam giác: $OA = OB = OC = R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp)

- Nếu ΔABC vuông tại A thì tâm O trùng trung điểm cạnh huyền BC.

Kết quả cần nhớ:

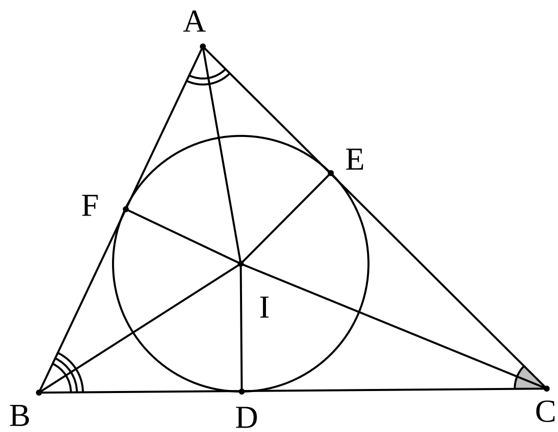
1. $BOC = 2.BAC$

2. Với hình vẽ trên ta nhớ mô hình hình vẽ được khai thác rất nhiều, với H là trực tâm và BOE là đường kính. Khi đó ta có: $AHCE$ là hình bình hành.

3. $\dfrac{a}{\sin \mathrm{A}} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2\mathrm{R}$

Tâm đường tròn nội tiếp:

Tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác.



Tính chất:

- Gọi I là giao điểm 3 đường phân giác trong của ΔABC . Khi đó:

- Đường tròn $\left(I \right)$ tiếp xúc với 3 cạnh AB, AC, BC của ΔABC lần lượt tại F, E, D và $IE = IF = ID = r$ (r là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC).

- Ta có công thức tính diện tích tam giác:

$S_{ABC} = p.r$ (P là nửa chu vi tam giác)

- Do $\left(I \right)$ tiếp xúc với 3 cạnh của tam giác, nên ta có:

$$\begin{cases} AE = AF = p - a \\ BF = BD = p - b \\ CD = CE = p - c \end{cases}$$ (P là nửa chu vi tam giác)

<u>Mở rộng và nâng cao:</u>

<u>1. Đường thẳng Euler:</u>

Trong một tam giác thì trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O cùng nằm trên một đường thẳng và ta có hệ thức:

$$OG = \frac{1}{3}\sqrt{9\mathrm{R}^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)}$$

<u>2. Hệ thức Euler:</u>

Trong một tam giác giữa bán kính R của đường tròn ngoại tiếp, bán kình r của đường tròn nội tiếp và khoảng cách d giữa 2 tâm của đường tròn có hệ thức:

$d^2 = R^2 - 2\mathrm{Rr}$ *(Hệ thức Euler)*