Xét phương trình $f(t)=m$ với $t\in\left[2;\frac{17}{4}\right]$.

Từ đồ thị, phương trình $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có số nghiệm nhiều nhất khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có 2 nghiệm t_1, t_2, trong đó có $t_1\in\left(2;\frac{5}{2}\right]$, $t_2\in\left(\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right]$.

Khi đó, phương trình có $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;0;1)$, $B(-3;2;0)$, $C(2;-2;3)$. Đường cao kẻ từ B của tam giác ABC đi qua điểm nào trong các điểm sau?

A. $P(-1;2;-2)$. **B.** $M(-1;3;4)$. **C.** $N(0;3;-2)$. **D.** $Q(-5;3;3)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thành Đô ; Fb: Thành Đô Nguyễn

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;2;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2;2)$, $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;4;2)$.

Một vectơ chỉ phương của đường cao kẻ từ B của tam giác ABC là $\vec{u}=\frac{1}{12}\left[\vec{n},\overrightarrow{AC}\right]=(1;0;-1)$.

Phương trình đường cao kẻ từ B là: $\begin{cases}x=-3+t\\y=2\\z=-t\end{cases}$.

Ta thấy điểm $P(-1;2;-2)$ thuộc đường thẳng trên.

Câu 39. Trong Lễ tổng kết Tháng thanh niên, có 10 đoàn viên xuất sắc gồm 5 nam và 5 nữ được tuyên dương khen thưởng. Các đoàn viên này được sắp xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang trên sân khấu để nhận giấy khen. Tính xác suất để trong hàng ngang trên không có bất kì bạn nữ nào đứng cạnh nhau.

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{42}$. **C.** $\frac{1}{252}$. **D.** $\frac{25}{252}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Hiền ; Fb: Hien Nguyen

Chọn B

Cách 1

$n(\Omega)=10!$

Bước 1: Xếp 5 bạn nữ có: 5! cách

Bước 2: Xếp 5 bạn nam vào xen giữa 4 khoảng trống của 5 bạn nữ và hai vị trí đầu hàng. Có hai trường hợp sau

+) TH1: Xếp 4 bạn nam vào 4 khoảng trống giữa 5 bạn nữ, bạn nam còn lại có hai lựa chọn: xếp vào hai vị trí đầu hàng. Trường hợp này có $A_5^4.2$ cách

+) TH2:

- Chọn một khoảng trống trong 4 khoảng trống giữa hai bạn nữ để xếp hai bạn nam có C_4^1 cách

- Chọn hai bạn nam trong 5 bạn nam để xếp bào vị trí đó có A_5^2 cách

- Ba khoảng trống còn lại xếp còn lại ba bạn nam còn lại có $3!$ cách

Trường hợp này có $C_4^1.A_5^2.3!$ cách

Vậy có tất cả $5!\left(A_5^4.2+C_4^1.A_5^2.3!\right)$ cách

Vậy xác suất là: $P=\dfrac{5!\left(A_5^4.2+C_4^1.A_5^2.3!\right)}{10!}=\dfrac{1}{42}$.

Cách 2

$n(\Omega)=10!$

- Xếp 5 bạn nam có $5!$ cách

- Xếp 5 bạn nữ xen vào giữa 4 khoảng trống và 2 vị trí đầu hàng có A_6^5 cách

Vậy có $5!.A_6^5$ cách

Vậy $P=\dfrac{5!.A_6^5}{10!}=\dfrac{1}{42}$

Câu 40. Giả sử m là số thực thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=31^x+3^x+mx$ trên $\mathbb{R}$ là 2

A. $m\in(-10;-5)$. **B.** $m\in(-5;0)$. **C.** $m\in(0;5)$. **D.** $m\in(5;10)$.

Lời giải

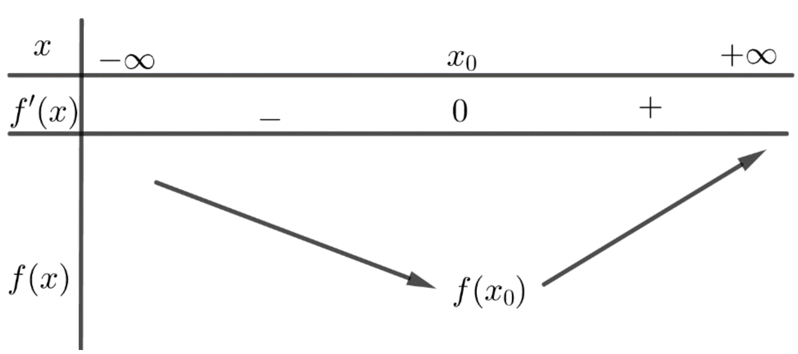
Tác giả: Đỗ Văn Dương ; Fb: Dương Đỗ Văn

Chọn B

Ta có : $f(x)=31^x+3^x+mx \Rightarrow f'(x)=31^x\ln 31+3^x\ln 3+m$. Xét 2 trường hợp sau:

TH1: $m\geq 0, f'(x)>0 \Rightarrow$ hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến $\Rightarrow$ không tồn tại giá trị min.

TH2: $m<0 \Rightarrow f''(x)=31^x\ln^2 31+3^x\ln^2 3>0 \Rightarrow f'(x)$ có nhiều nhất 1 nghiệm x_0. Chọn trường hợp $f'(x)=0$ có nghiệm, khi đó



Khi đó: $\begin{cases} f(x_0)=2 \\ f'(x_0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 31^{x_0}+3^{x_0}+mx_0=2 \\ 31^{x_0}\ln 31+3^{x_0}\ln 3+m=0 \end{cases} (*)$

Với $x_0=0 \Rightarrow m=-\ln 31-\ln 3\in(-5;0)$

Với $x_0 \neq 0(*) \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{-31^{x_0} - 3^{x_0}}{x_0} \\ m = -31^{x_0}\ln 31 - 3^{x_0}\ln 3 \end{cases} \quad (**)$

Từ $(**)$ bấm máy tính ta thấy $m \in (-5;0)$ là thỏa mãn.

Câu 41 . Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		↗	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên $[-1\,;\,1]$

A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(1)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thành Trung ; Fb: Nguyễn Thành Trung

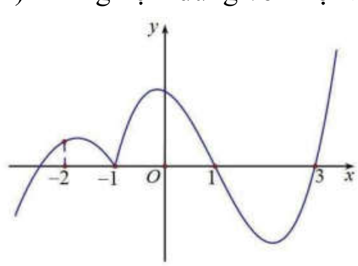
Chọn B

Ta có $g(x) = f(2x) - \sin^2 x \le f(2x)$ $2x \in [-2;2]$ suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào BBT suy ra $f(2x) \le f(0) \Rightarrow g(x) \le f(0)$ $\forall 2x \in [-2;2]$ $\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(x) = f(0)$ đạt được khi $\begin{cases} x = 0 \\ \sin^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $(mx + m^2\sqrt{5 - x^2} + 2m + 1)f(x) \ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;2]$?



A. 1. **B 3.** **C.** 0 **D.**2

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Đắc; Fb: Đắc Nguyễn

Chọn A

Đặt $g(x)=(mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1)f(x)$ thì g(x) là hàm số liên tục trên [-2;2]

Từ đồ thị $y=f(x)$ ta thấy có nghiệm đổi dấu là x=1

Do đó để bất phương trình $(mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1)f(x)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;2]$

Thì điều kiện cần là x=1 phải là nghiệm của $h(x)=mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1$

$h(1)=m+2m^2+2m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}m=-1\\ m=-0,5\end{matrix}\right.$

Do bài cần m nguyên nên ta thử lại với m=-1

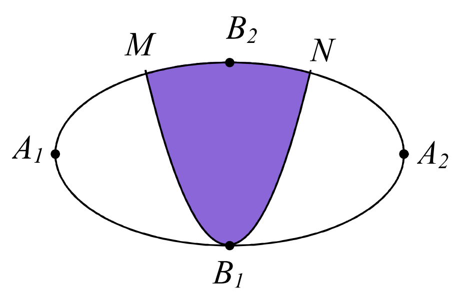
$h(x)=\sqrt{5-x^2}-x-1\geq 0,\forall x\in[-2;1]$ Và $h(x)=\sqrt{5-x^2}-x-1\leq 0,\forall x\in[1;2]$

Dựa theo dấu $y=f(x)$ trên đồ thị ta suy ta

$$g(x)=(mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1)f(x)\geq 0,\forall x\in[-2;2]$$

Vậy m=-1 thỏa mãn điều kiện bài ra.

Câu 43. Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1,A_2,B_1,B_2 như hình vẽ bên. Người ta chia elip bởi parabol có đỉnh B_1, trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M,N. Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/ m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/ m^2. Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết rằng $A_1A_2=4m,B_1B_2=2m,MN=2m$.

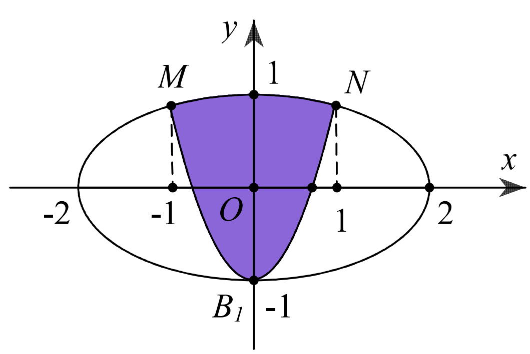


A. 2.341.000 đồng. **B.** 2.057.000 đồng. **C.** 2.760.000 đồng. **D.** 1.664.000 đồng.

Lời giải

Tác giả: Lưu Huệ Phương; Fb: Lưu Huệ Phương

Chọn A



Phương trình đường Elip là: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Diện tích hình Elip là $S_{(E)}=\pi a.b=2\pi\left(m^2\right)$

Tọa độ giao điểm M,N là nghiệm hệ: $\begin{cases} x=\pm 1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Vậy $M\left(-1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\mathrm{N}\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Parabol (P) đối xứng qua Oy có dạng $y=ax^2+c\,(a\neq 0)$.

Vì $B_1(0;-1),N\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\in(P)\Rightarrow\begin{cases} c=-1 \\ a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1 \end{cases} \Rightarrow (P): y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2-1$.

Diện tích phần tô đậm là: $S_1=2\int\limits_0^1\left[\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]dx$

• Tính $I_1=\int\limits_0^1\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}dx$. Đặt $\dfrac{x}{2}=\sin t\Rightarrow\dfrac{dx}{2}=\cos t dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=0\to t=0 \\ x=1\to t=\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$.

Suy ra $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2 t}.2\cos t dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}2\cos^2 t dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)dt=\left(t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

• Tính $I_2=\int\limits_0^1\left[-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right]dx=\left[-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\dfrac{x^3}{3}+x\right]\Big|_0^1=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{2}{3}$.

Vậy $S_1=2\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{4}{3}\ \mathrm{m}^2$.

Tổng số tiền sử dụng là: $S_1.200000+\left(S_{(E)}-S_1\right).500000\approx 2.341.000$ đồng

Câu 44. Sau khi tốt nghiệp đại học, anh Nam thực hiện một dự án khởi nghiệp. Anh vay vốn từ ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất $0,6\%$ một tháng. Phương án trả nợ của anh Nam là: sau đúng một tháng kể từ thời điểm vay, anh bắt đầu trả nợ, hai lần trả nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền phải trả mỗi tháng là như nhau và anh trả hết nợ sau đúng 5 năm từ thời điểm vay.Tuy nhiên, sau khi dự án có hiệu quả và đã trả được nợ trong 12 tháng theo phương án cũ, anh nam muốn rút ngắn thời gian trả nợ nên từ tháng tiếp theo, mỗi tháng anh trả nợ cho ngân hàng 9 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực té của tháng đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng từ thời điểm vay anh Nam trả hết nợ?

A. 32 tháng. **B.** 31 tháng. **C.** 29 tháng. **D.** 30 tháng.

Lời giải

Tác giả : Quang Pumaths, FB: Quang Pumaths

Chọn A

Gọi a là số tiền anh Nam trả hàng tháng.

$r=0,6\%$

Giả thiết suy ra sau 5 năm:

$200(1+r)^{60}-\dfrac{a}{r}\left[(1+r)^{60}-1\right]=0\Leftrightarrow a=3,979$ triệu đồng.

Số tiền anh Nam còn nợ sau 12 tháng:

$M = 200(1+r)^{12} - \frac{a}{r}\left[(1+r)^{12} - 1\right] = 165,53$ triệu đồng.

Với số tiền góp 9 triêu đồng 1 tháng, giả sử anh Nam mất n tháng để trả hết nợ, ta có:

$M(1+r)^n - \frac{9}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0 \Leftrightarrow n = 19,5$.

Vậy sau $12+20=32$ tháng, anh Nam trả hết nợ.

Câu 45. Giả sử hàm f có đạo hàm cấp 2 trên R thỏa mãn $f(1) = f'(1) = 1$ và $f(1-x) + x^2 f''(x) = 2x$ với mọi $x \in R$. Tính tích phân $I = \int_0^1 xf'(x)dx$.

A. $I = 1$.   **B.** $I = 2$.   **C.** $I = \frac{1}{3}$.   **D.** $I = \frac{2}{3}$.

($f(1-x) + x^2 f''(x) = 2x$ (1)

Nhận xét: *Thay $x=0$ vào (1) ta được $f(1) = 0$ (mâu thuẫn với giả thiết bài toán).*

Sửa đề: *Thầy* ***Nguyễn Việt Hải – Admin Strong Team Toán VD-VDC***

Giả sử hàm f có đạo hàm cấp n trên R, $(n \in N^*)$ và $f(1-x) + x^2 f''(x) = 2x$ với mọi $x \in R$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 xf'(x)dx$.

A. $I = 1$.   **B.** $I = -1$.   **C.** $I = \frac{1}{3}$.   **D.** $I = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Mai Đức Thu; Fb: Nam Việt

Chọn B

$f(1-x) + x^2 f''(x) = 2x$ (1)

Thay $x=0$ vào (1) ta được $f(1) = 0$.

Đạo hàm hai vế của (1) ta có $-f'(1-x) + 2xf''(x) + x^2 f'''(x) = 2$ (2)

Thay $x=0$ vào (2) ta được $f'(1) = -2$.

Mặt khác, lấy tích phân hai vế cận từ 0 đến 1 của (1) ta có:

$$\int_0^1 f(1-x)dx + \int_0^1 x^2 f''(x)dx = \int_0^1 2xdx$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^1 f(1-x)d(1-x) + f'(1) - 2\int_0^1 xf'(x)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx - 2\int_0^1 xf'(x)dx = 3.$$

Đặt $\int_0^1 f(x)dx = I_1$. Vì $\int_0^1 xf'(x)dx = f(1) - \int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} I_1 - 2I = 3 \\ I = -I_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 = 1 \\ I = -1 \end{cases}.$$

Vậy $I = -1$.

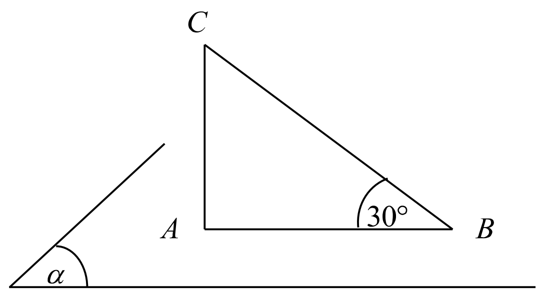
Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^\circ$, $BC=3\sqrt{2}$, đường thẳng BC có phương trình $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+7}{-4}$, đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x+z-3=0$. Biết rằng đỉnh C có cao độ âm. Tìm hoành độ của đỉnh A.

A. $\dfrac{3}{2}$.   **B.** 3.   **C.** $\dfrac{9}{2}$.   **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Tân Tiến ; Fb: Nguyễn Tiến

Chọn C



+ Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+7}{-4}\\ x+z-3=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{B(2;3;1)}$.

+ Do $C\in BC$ nên $C(4+c;5+c;-7-4c)$.

Theo giả thiết $BC=3\sqrt{2} \Leftrightarrow 18(2+c)^2=18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-1\Rightarrow C(3;4;-3)\\ c=-3\Rightarrow C(1;2;5)\end{array}\right.$.

Mà đỉnh C có cao độ âm nên $\boxed{C(3;4;-3)}$.

+ Gọi $A(x;y;3-x)\in(\alpha)$.

Do $\widehat{ABC}=30^\circ$ nên $\begin{cases}AB=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\\ AC=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2+(2-x)^2=\dfrac{27}{2}\\ (x-3)^2+(y-4)^2+(6-x)^2=\dfrac{9}{2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-8x+y^2-6y+\dfrac{7}{2}=0\\ 2x^2-18x+y^2-8y+\dfrac{113}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10x+2y-53=0 & (1)\\ 2x^2-8x+y^2-6y+\dfrac{7}{2}=0 & (2)\end{cases}$$

Từ (1) có $y=\dfrac{53-10x}{2}$.

Thay vào (2) ta có $2x^2-8x+\left(\dfrac{53-10x}{2}\right)^2-6.\dfrac{53-10x}{2}+\dfrac{7}{2}=0$

$$\Leftrightarrow 108x^2-972x+2187=0 \Leftrightarrow (2x-9)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2} \Rightarrow A\left(\frac{9}{2};4;-\frac{3}{2}\right).$$

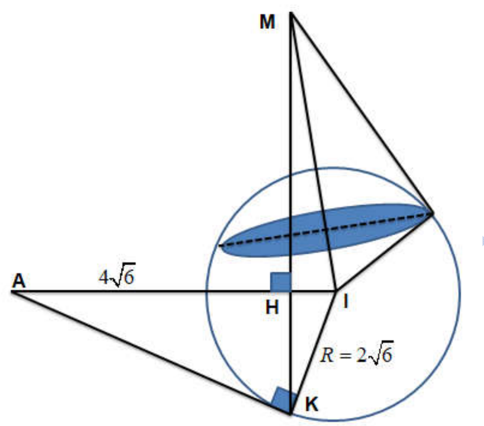
Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=24$ và điểm $A(-2;0;-2)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω). Từ điểm M di động nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa (ω), kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω'). Biết rằng khi (ω) và (ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=6\sqrt{2}$. **B.** $r=3\sqrt{10}$. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Tác giả: Từ Văn Khanh, FB: Từ Văn Khanh.

Chọn B



Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn (ω).

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;4;6)$ và có bán kính $R=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$. Ta có:

$IA=\sqrt{4^2+4^2+8^2}=4\sqrt{6}$.

Do hai đường tròn (ω) và (ω') có cùng bán kính nên $IM=IA=4\sqrt{6}$.

Tam giác IAK vuông tại K nên ta có: $IK^2=IH.IA \Rightarrow IH=\dfrac{IK^2}{IA}=\dfrac{24}{4\sqrt{6}}=\sqrt{6}$.

Do H là tâm của đường tròn (ω) nên điểm H cố định.

Tam giác IHM vuông tại H nên ta có: $MH=\sqrt{IM^2-IH^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=3\sqrt{10}$.

Do H cố định thuộc mặt phẳng (P), M di động trên mặt phẳng (P) và $MH=3\sqrt{10}$ không đổi. Suy ra điểm M thuộc đường tròn có tâm là H và có bán kính $r=HM=3\sqrt{10}$.

Câu 48. [2H1-3.2-4] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $AC=\sqrt{3}a$, SAB là tam giác đều, $SAD=120^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

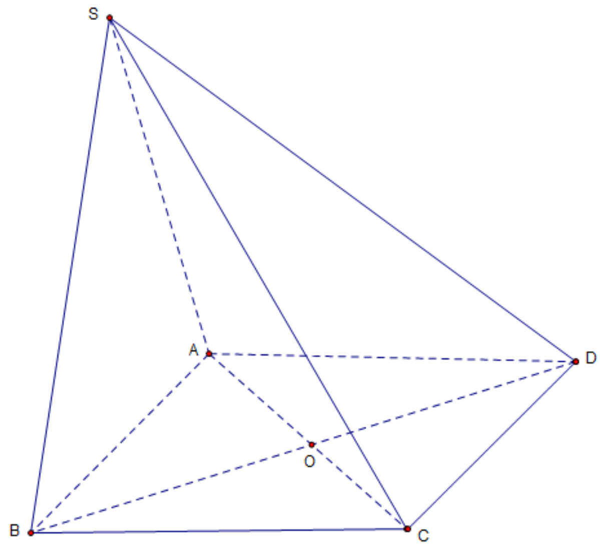
A. $\sqrt{3}a^3$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2}$. **C.** $\sqrt{6}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

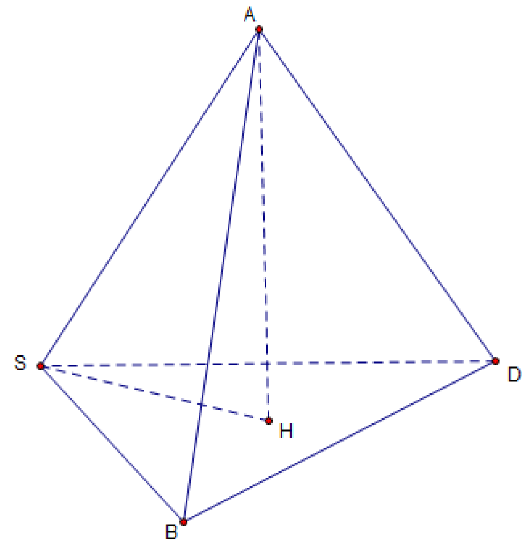
Lời giải

Tác giả : Vũ Thị Duyên, FB: Duyên Vũ

Chọn A

Cách 1





+ Tam giác SAB đều $\Rightarrow SA = SB = AB = 2a$.

+ Xét tam giác SAD có $SD^2 = SA^2 + AD^2 - 2SA.AD.\cos SAD = 12a^2 \Rightarrow SD = 2\sqrt{3}a$.

+ Gọi $AC \cap BD = O \Rightarrow AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \dfrac{\sqrt{13}a}{2} \Rightarrow BD = \sqrt{13}a$

Áp dụng công thức Hêrông ta tính được diện tích của tam giác SBD là $S_{\Delta SBD} = \dfrac{\sqrt{183}a^2}{4}$.

+ Gọi H là hình chiếu của A trên (SBD). Vì $AB = AD = AS = 2a \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $SBD \Rightarrow SH = \dfrac{SB.SD.BD}{4S_{\Delta SBD}} = \dfrac{4\sqrt{39}a}{\sqrt{183}}$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{624a^2}{183}} = \frac{6\sqrt{3}a}{\sqrt{183}}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABD} = V_{A.SBD} = \frac{1}{3}.AH.S_{\Delta SBD} = \frac{1}{3}.\frac{6\sqrt{3}a}{\sqrt{183}}.\frac{\sqrt{183}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD} = \sqrt{3}a^3$$

.

Cách 2

Ta có $\cos BAC = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \dfrac{4a^2 + 3a^2 - 4a^2}{2.2a.\sqrt{3}a} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow \cos BAD = 2\left(\cos BAC\right)^2 - 1 = -\frac{5}{8}.$$

Áp dụng công thức tính nhanh cho khối chóp $A.SBD$ ta có

$$V_{A.SBD} = \frac{AS.AB.AD}{6}.\sqrt{1 + 2\cos SAB.\cos BAD.\cos DAS - \cos^2 SAB - \cos^2 BAD - \cos^2 DAS}$$

$$= \frac{2a.2a.2a}{6}.\sqrt{1 + 2.\frac{1}{2}.\left(-\frac{5}{8}\right).\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} - \frac{25}{64} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=2V_{S.ABD}=2V_{A.SBD}=\sqrt{3}a^3$.

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right).3^x+1=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Tácgiả: Lê Cảnh Dương ; FB: Cảnh Dương Lê

Chọn C

Ta có

$$9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right).3^x+1=0\Leftrightarrow 3^{x+1}+\frac{1}{3^{x+1}}-\frac{m}{3}\left(4\sqrt{|x+1|}+3m+3\right)=0 \quad (1)$$

Đặt $t=x+1$, phương trình (1) thành $3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{m}{3}\left(4\sqrt{|t|}+3m+3\right)=0 \quad (2)$.

Bài toán trở thành tìm số giá trị nguyên của m để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Nhận xét: Nếu t_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì $-t_0$ cũng là một nghiệm của phương trình (2). Do đó điều kiện cần để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt là phương trình (2) có nghiệm $t=0$.

Với $t=0$ thay vào phương trình (2) ta có $-m^2-m+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$.

Thử lại:

+) Với $m=-2$ phương trình (2) thành $3^t+\frac{1}{3^t}+\frac{2}{3}\left(4\sqrt{|t|}-3\right)=0$

Ta có $3^t+\frac{1}{3^t}\ge 2$, $\forall t\in\mathbb{R}$ và $\frac{2}{3}\left(4\sqrt{|t|}-3\right)\ge -2,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra $3^t+\frac{1}{3^t}+\frac{2}{3}\left(4\sqrt{|t|}-3\right)\ge 0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Dấu bằng xảy ra khi $t=0$, hay phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t=0$ nên loại $m=-2$.

+) Với $m=1$ phương trình (2) thành $3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{1}{3}\left(4\sqrt{|t|}+6\right)=0 \quad (3)$

Dễ thấy phương trình (3) có 3 nghiệm $t=-1,t=0,t=1$.

Ta chứng minh phương trình (3) chỉ có 3 nghiệm $t=-1,t=0,t=1$. Vì t là nghiệm thì $-t$ cũng là nghiệm phương trình (3) nên ta chỉ xét phương trình (3) trên $[0;+\infty)$.

Trên tập $[0;+\infty)$, $(3)\Leftrightarrow 3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{1}{3}\left(4\sqrt{t}+6\right)=0$.

Xét hàm $f(t)=3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{1}{3}\left(4\sqrt{t}+6\right)$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=3^t\ln 3-3^{-t}.\ln 3-\frac{2}{3\sqrt{t}}$, $f''(t)=3^t\ln^2 3+3^{-t}.\ln^2 3+\frac{1}{3.\left(\sqrt{t}\right)^3}>0,\forall t>0$.

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)\Rightarrow f'(t)=0$ có tối đa 1 nghiệm $t>0\Rightarrow f(t)=0$ có tối đa 2 nghiệm $t\in[0;+\infty)$. Suy ra trên $[0;+\infty)$, phương trình (3) có 2 nghiệm $t=0,\mathrm{t}=1$.

Do đó trên tập $\mathbb{R}$, phương trình (3) có đúng 3 nghiệm $t=-1,t=0,t=1$. Vậy chọn $m=1$.

Chú ý: Đối với bài toán trắc nghiệm này, sau khi loại được $m=-2$ ta có thể kết luận đáp án C do đề không có phương án nào là không tồn tại m.

Câu 50. Cho các số phức z và w thỏa mãn $(2+i)|z|=\frac{z}{w}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|w+1-i|$.

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.
B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Văn Khánh, FB: Khánh Bùi Văn

Chọn A

Nhận xét $z=0$ không thỏa mãn giả thiết bài toán.

Đặt $|z|=R$, $R>0$.

Ta có: $(2+i)|z|=\frac{z}{w}+1-i \Leftrightarrow (2R-1)+(R+1)i=\frac{z}{w}$

$$\Rightarrow \frac{R}{|w|}=\sqrt{5R^2-2R+2} \Rightarrow \frac{1}{|w|}=\sqrt{\frac{5R^2-2R+2}{R^2}}$$

$$=\sqrt{5-\frac{2}{R}+\frac{2}{R^2}}=\sqrt{2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}},\forall R>0.$$

Suy ra $|w|\le\frac{\sqrt{2}}{3},\forall R>0$.

Ta có $T=|w+1-i|\le|w|+|1-i|\le\frac{\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}|z|=2\\ w=k(1-i),k>0\\ (2+i)|z|=\frac{z}{w}+1-i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=2\\ w=\frac{1}{3}(1-i)\end{cases}$.

Vậy $\max T=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.