$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a-2\in(-1;0) \\ f(x)=0 \\ f(x)=b-2\in(0;1) \\ x=a\in(1;2) \\ x=2 \\ x=b\in(2;3) \end{array}\right.$$

$f(x)=a-2\in(-1;0)$ có 4 nghiệm phân biệt.

$f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt và một nghiệm kép.

$f(x)=b-2\in(0;1)$ có 2 nghiệm phân biệt.

Kèm với 3 nghiệm của hàm $f'(x)$, ta kết luận hàm số có 11 cực trị.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ với mọi x và thỏa mãn $f(1)=-\frac{1}{2}$, $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$. Biết $f(1)+f(2)+...+f(2019)=\frac{a}{b}-1$ với $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}, (a;b)=1$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $2a+b=2022$. **B.** $a-b=2019$. **C.** $ab>2019$. **D.** $b\leq 2020$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow \frac{-f'(x)}{f^2(x)}=-(2x+1)$.

Bằng cách lấy nguyên hàm 2 vế ta được

$\int\frac{-f'(x)}{f^2(x)}dx=\int-(2x+1)dx\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=-x^2-x+C$

Do đó $f(x)=\frac{1}{-x^2-x+C}; f(1)=\frac{-1}{2}\Rightarrow C=0$

Suy ra $f(x)=\frac{-1}{x(x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

Do đó

$f(1)+f(2)+...+f(2019)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+...+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2019}\right)=\frac{1}{2020}-1$

Câu 43. Cho phương trình $2^x=\sqrt{m.2^x.\cos(\pi x)-4}$, với m là tham số thực. Gọi m_0 là giá trị của m sao cho phương trình trên có đúng một nghiệm thực. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m_0\in[-1;0)$. **B.** $m_0\in[-5;-1)$. **C.** $m_0>0$. **D.** $m_0<-5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^x=\sqrt{m.2^x.\cos(\pi x)-4}\Leftrightarrow 4^x+4=m.2^x.\cos(\pi x)\ (1)$

Điều kiện cần:

Nhận xét: nếu x_0 là 1 nghiệm của phương trình (1) thì $2-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình (1) nên phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0=2-x_0\Leftrightarrow x_0=1$

Thay $x=x_0=1$ vào phương trình $(1)\Rightarrow m=-4$

Điều kiện đủ: Với $m=-4$, ta có $(1)\Leftrightarrow 4^x+4=-4.2^x.\cos(\pi x)\Leftrightarrow 2^x+\dfrac{4}{2^x}=-4\cos(\pi x)\,(*)$

Vì: $\begin{cases}2^x+\dfrac{4}{2^x}\ge 4\\ -4\cos(\pi x)\le 4\end{cases}$ nên $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}2^x+\dfrac{4}{2^x}=4\\ -4\cos(\pi x)=4\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Vậy $m_0=-4\in[-5;-1)$

Câu 44. Trong không gian cho hai điểm A, B cố định và độ dài đoạn thẳng AB bằng 4. Biết rằng tập hợp các điểm M sao cho $MA=3MB$ là một mặt cầu. Bán kính của mặt cầu bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(-2;0;0),B(2;0;0)$. Gọi điểm $M(x;y;z)$

Theo giả thiết:

$MA=3MB\Leftrightarrow MA^2=9MB^2\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2+z^2=9\left[(x-2)^2+y^2+z^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{4}$

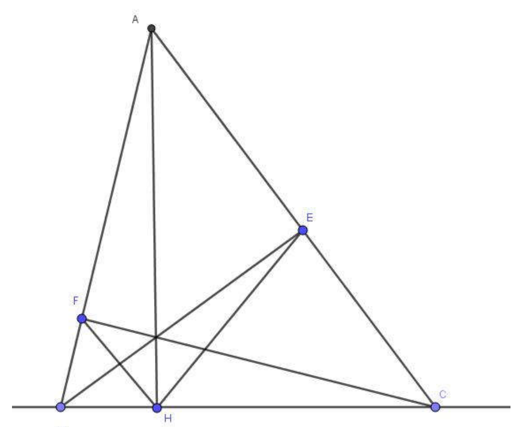
Vậy bán kính mặt cầu bằng $\dfrac{3}{2}$

Câu 45. Trong không gian, cho tam giác ABC có các đỉnh B,C thuộc trục Ox. Gọi $E(6;4;0),F(1;2;0)$ lần lượt là hình chiếu của B,C trên các cạnh AC,AB. Toạ độ hình chiếu của A trên BC là

A. $\left(\dfrac{8}{3};0;0\right)$. **B.** $\left(\dfrac{7}{3};0;0\right)$. **C.** $(2;0;0)$. **D.** $\left(\dfrac{5}{3};0;0\right)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $H(x;0;0)$, $B(b;0;0);C(c;0;0)$

Ta có

$\overrightarrow{HE}=(6-x;4;0);\overrightarrow{HF}=(1-x;2;0)$

$\cos\left(\overrightarrow{HF};\vec{j}\right)=\cos\left(\overrightarrow{HE};\vec{j}\right)\Leftrightarrow\dfrac{4}{HE}=\dfrac{2}{HF}\Leftrightarrow HE=2HF$

$(6-x)^2+4^2=4(1-x)^2+4.2^2\Leftrightarrow 3x^2+4x-32=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{8}{3}\\ x=-4\end{array}\right.$

Cách 2

Nhận xét: Các điểm $E(6;4;0), F(1;2;0), B, C$ đều nằm trong mặt phẳng Oxy .

Vì vậy ta chỉ cần xét trong hệ toạ độ Oxy. Khi đó: $E(6;4), F(1;2), B(x_1;0), C(x_2;0)$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{EC} = 0 \\ \overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BF} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{47}{5} \\ x_1.x_2 = \dfrac{22}{5} \end{cases} (*)$

Đường thẳng AC đi qua điểm $E(6;4)$, có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{AC} = \overrightarrow{EB} = (x_1 - 6; -4)$ nên có phương trình là: $(x_1 - 6)(x - 6) - 4(y - 4) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 6)x - 6x_1 - 4y + 52 = 0$

Đường thẳng AB đi qua điểm F$(1;2)$, có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{AB} = \overrightarrow{FC} = (x_2 - 1; -2)$ nên có phương trình là: $(x_2 - 1)(x - 1) - 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2(x_2 - 1)x - 2x_2 - 4y + 10 = 0$

Toạ độ điểm A là nghiệm hệ

$\begin{cases} (x_1 - 6)x - 6x_1 - 4y + 52 = 0 \\ 2(x_2 - 1)x - 2x_2 - 4y + 10 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (2x_2 - x_1 + 4)x = (2x_2 - 6x_1 + 42) \Leftrightarrow [3x_2 - (x_1 + x_2) + 4] = [8x_2 - 6(x_1 + x_2) + 42]$

$3\left(x_2 - \dfrac{9}{5}\right)x = 8\left(x_2 - \dfrac{9}{5}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3}\left(x_2 \neq \dfrac{9}{5}\right)$

($x_2 = \dfrac{9}{5}$ không là nghiệm của hệ $(*)$)

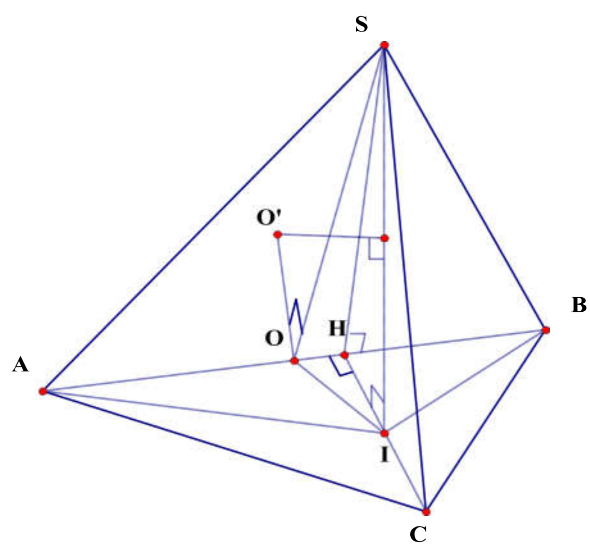
Vậy hình chiếu của A trên BC là $\left(\dfrac{8}{3};0;0\right)$

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C . CH vuông góc AB tại H, I là trung điểm của đoạn HC . Biết SI vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{ASB} = 90^\circ$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB , O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$. Góc tạo bởi đường thẳng OO' và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 45° . **B.** 30° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có $IH = IC \Rightarrow SH = SC$

+) $OS = \dfrac{1}{2}AB = OC \Rightarrow SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \sqrt{OC^2 - OH^2} = CH$

Vậy tam giác SHC là tam giác đều, suy ra: $\widehat{SHC}=60^{\circ}$.

Mặt khác $\begin{cases} AB\perp SI \\ AB\perp CH \end{cases} \Rightarrow AB\perp (SHC) \Rightarrow AB\perp SH$, mà $AB\perp HC$, suy ra:

$((ABC),(SAB))=\widehat{SHC}=60^{\circ} \qquad (*)$.

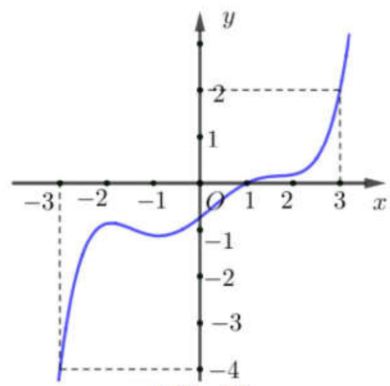
Tam giác SAB vuông tại S có tâm đường tròn ngoại tiếp là O , Vậy OO' là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB , suy ra $OO'\perp (SAB) \qquad (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có:

$$\begin{cases} ((ABC),(SAB))=60^{\circ} \\ OO'\perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow (OO';(ABC))=30^{\circ}.$$

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. $g(0)$. **B.** $g(1)$. **C.** $g(-3)$. **D.** $g(3)$.

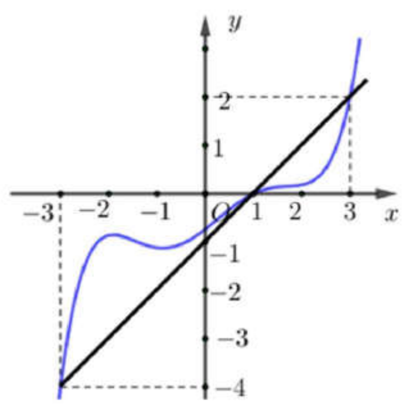


Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x-1)=2[f'(x)-(x-1)]$.

Dựng đường thẳng $y=x-1$



Dựa vào đồ thị ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	-3		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$

$\Rightarrow \min\limits_{[-3;3]} g(x) = \min\{g(-3); g(3)\}$ (1)

Mặt khác: Từ đồ thị ta cũng có

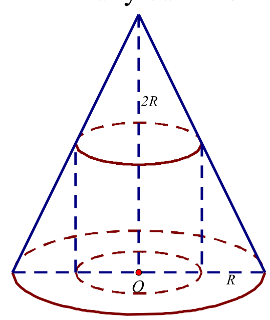
$$\int_{-3}^{1}\left(f'(x)-x+1\right)\mathrm{d}x > \int_{1}^{3}\left(x-1-f'(x)\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left[f(x)-\frac{x^2}{2}+x\right]\Bigg|_{-3}^{1} > \left[\frac{x^2}{2}-x-f(x)\right]\Bigg|_{1}^{3}$$

$\Leftrightarrow f(3)-f(-3)+6>0$

$\Rightarrow g(3)-g(-3)=2\left[f(3)-f(-3)+6\right]>0 \Rightarrow g(3)>g(-3)$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow \ \Rightarrow \min\limits_{[-3;3]} g(x) = \min\{g(-3); g(3)\} = g(-3)$.

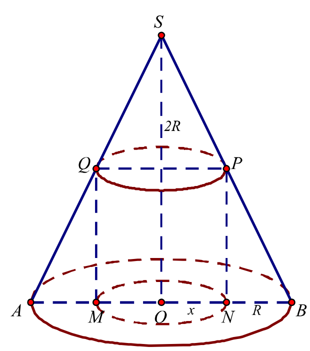
Câu 48. Cho hình nón có chiều cao $2R$ và bán kính đường tròn đáy R. Xét hình trụ nội tiếp hình nón sao cho thể tích khối trụ lớn nhất, khi đó bán kính đáy của khối trụ bằng



A. $\frac{2R}{3}$. **B.** $\frac{R}{2}$. **C.** $\frac{3R}{4}$. **D.** $\frac{R}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Xét mặt phẳng cắt qua trục của nón, thiết diện với nón là tam giác cân SAB, thiết diện với trụ là hình chữ nhật $MNPQ$ với M,N thuộc đoạn AB và P,Q lần lượt thuộc các cạnh SB,SA. Gọi O là trung điểm của AB. Đặt bán kính đáy của trụ là x với $0<x<R$.

Ta có: $ON = x \Rightarrow NB = R-x$.

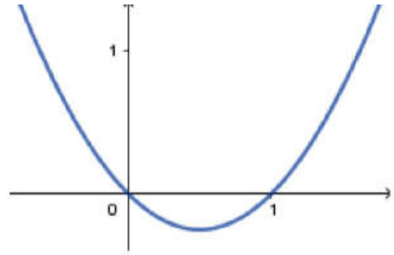
Từ $\frac{PN}{SO}=\frac{NB}{OB}$ thu được $PN = SO.\frac{NB}{OB} = 2R.\frac{R-x}{R} = 2(R-x)$.

Thể tích khối trụ: $V = PN.\pi.\text{ON}^2 = 2(R-x)\pi.x^2$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $V=(2R-2x).x^2 \le \left(\frac{2R-2x+x+x}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}R^3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2R-2x=x \Leftrightarrow x=\dfrac{2R}{3}$.

Câu 49. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(-x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây.



A. $(-1;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;-1)$.. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f\left(-x-x^2\right)$

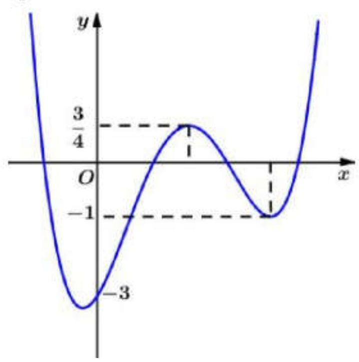
Tập xác định $D=\mathbb{R}$, $g'(x)=\left[f\left(-x-x^2\right)\right]'=-(1+2x).f'\left(-x-x^2\right)$.

Ta có bảng sau:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$1+2x$		-		-	0	+		+	
$f'\left(-x-x^2\right)$		+	0	-		-	0	+	
$g'(x)=-(1+2x).f'\left(-x-x^2\right)$.		+	0	-	0	+	0	-	

Vậy hàm số $g(x)=f\left(-x-x^2\right)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $(0;+\infty)$.

Câu 50. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+m|)=m$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $f(|x+m|)=m$ có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow f(x+m)=m$ (1) có hai nghiệm phân biệt dương.

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x+m)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Do đồ thị $y=f(x+m)$ có được từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách tịnh tiến dọc trục Ox, nên ta có:

+ Nếu $m > 0$ thì không có giá trị nguyên của m để (1) có hai nghiệm phân biệt dương.
+ Nếu $m < 0$ ta thấy chỉ có $m = -1$ nguyên thỏa điều kiện đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f\left(x+m\right)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ nguyên.

Vậy chỉ có duy nhất giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

------------- HẾT -------------