$4^{x-1}+2^{x+3}-4=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}.2^{2x}+8.2^{x}-4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x}=-16+4\sqrt{17}\,(tm) \\ 2^{x}=-16-4\sqrt{17}\,(ktm) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\log_2\left(4\sqrt{17}-16\right).$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 28. Chọn đáp án D

Phương pháp

Dựa vào BBT để nhận xét các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

+) Đường thẳng $x=a$ được gọi là TCĐ của đồ thị hàm số $y=f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

+) Đường thẳng $y=b$ được gọi là TCN của đồ thị hàm số $y=f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$.

Cách giải

Dựa vào BBT ta thấy đồ thị hàm số có hai đường TCĐ là: $x=-2, x=0$ và 1 đường TCN là: $y=0$.

Câu 29. Chọn đáp án B

Phương pháp

+ Giải bất phương trình $\log_a f(x)<\log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ 0<f(x)<g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)>g(x)>0 \end{cases} \end{array}\right.$

Cách giải

ĐKXĐ: $x>0, x\neq 1$.

$2\log_{\frac{1}{2}}|x-1|<\log_{\frac{1}{2}} x-1 \Leftrightarrow -2\log_2|x-1|<-\log_2 x-1$

$\Leftrightarrow 2\log_2|x-1|>\log_2 x+1 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2>\log_2 x+\log_2 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2>\log_2(2x) \Leftrightarrow (x-1)^2>2x$ (Do $2>1$)

$\Leftrightarrow x^2-2x+1-2x>0 \Leftrightarrow x^2-4x+1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2+\sqrt{3} \\ x<2-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow$ Bất phương trình vô nghiệm $\begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ x\in\left(0;2-\sqrt{3}\right)\cup\left(2+\sqrt{3};+\infty\right) \end{cases} \Rightarrow x\in\{4;5;...\}$

Vậy bất phương trình có vô số nghiệm thỏa mãn bài toán.

Câu 30. Chọn đáp án A

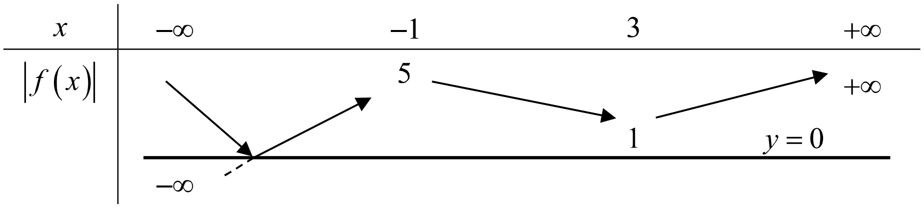
Phương pháp

Dựa vào BBT để nhận xét các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Cách giải

Cách vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$: Giữ lại phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ ở phía trên trục *Ox* và lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ở phía dưới trục *Ox* lên phía trên trục *Ox*.

Từ đó ta vẽ được đồ thị hàm số $y=f(x)$ như sau:



Như vậy đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 31. Chọn đáp án B

Phương pháp

+) Đặt $OA = x\left(x>0\right)$. Tính AB và AD theo x.

+) Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm a, b: $ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Cách giải

Đặt $OA = x \Rightarrow AB = 2x\left(x>0\right)$.

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông OAD ta có:

$AD=\sqrt{OD^2-OA^2}=\sqrt{100-x^2}$

$\Rightarrow S_{ABCD}=AB.AD=2x.\sqrt{100-x^2}\le x^2+100-x^2=100$

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ là $100cm^2$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2=100-x^2 \Leftrightarrow x=5\sqrt{2}\left(cm\right)$.

Câu 32. Chọn đáp án B

Phương pháp

+) Đổi biến, đặt $t=x^2$ sau đó sử dụng phương pháp tích phân từng phần tính $F\left(x\right)$, từ đó suy ra $F\left(x^2+x\right)$

+) Đặt $g\left(x\right)=F\left(x^2+x\right)$, giải phương trình $g'\left(x\right)=0$ xác định nghiệm bội lẻ của phương trình, từ đó kết luận số điểm cực trị của hàm số.

Cách giải

Ta có $F\left(x\right)=\int e^{x^2}\left(x^3-4x\right)dx=\int e^{x^2}\left(x^2-4\right)xdx$

Đặt $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx \Rightarrow F\left(t\right)=\dfrac{1}{2}\int e^t\left(t-4\right)dt$.

Đặt $\begin{cases} u=t-4 \\ dv=e^t dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dt \\ v=e^t \end{cases}$

$\Rightarrow F\left(t\right)=\dfrac{1}{2}\left[\left(t-4\right)e^t-\int e^t dt\right]=\dfrac{1}{2}\left[\left(t-4\right)e^t-e^t\right]=\dfrac{1}{2}\left(5-t\right)e^t+C$.

$\Rightarrow F\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-5\right)e^{x^2}+C \Rightarrow g\left(x\right)=F\left(x^2+x\right)=\dfrac{1}{2}\left[\left(x^2+x\right)^2-5\right]e^{\left(x^2+x\right)^2}+C$

$\Rightarrow g'\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left[2\left(x^2+x\right)\left(2x+1\right)e^{\left(x^2+x\right)^2}+\left(\left(x^2+x\right)^2-5\right)e^{\left(x^2+x\right)^2}.2\left(x^2+x\right).\left(2x+1\right)\right]$

$g'\left(x\right)=\left(x^2+x\right)\left(2x+1\right)e^{\left(x^2+x\right)^2}\left(\left(x^2+x\right)^2-4\right)$

$g'(x)=x(x+1)(2x+1)(x^2+x-2)(x^2+x+2)e^{(x^2+x)^2}$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\dfrac{-1}{2}\\x=-2\end{array}\right.$

Vậy hàm số $F(x^2+x)$ có 5 điểm cực trị.

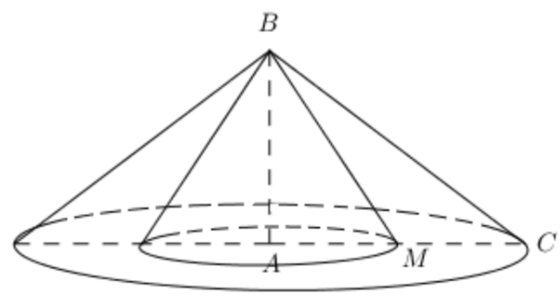
Câu 33. Chọn đáp án C

Phương pháp

Sử dụng công thức tính thể tích khối nón có chiều cao *h* và bán kính đáy r là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$.

Cách giải

Khi quay tam giác *BMC* quanh cạnh *AB* tạo ra 2 khối tròn xoay có thể tích là:



$V=\dfrac{1}{3}\pi.AC^2.AB-\dfrac{1}{3}\pi AM^2AB=\dfrac{1}{3}\pi.8^6.6-\dfrac{1}{3}\pi.4^2.6=96\pi$ **Câu 34. Chọn đáp án C**

Phương pháp

+) Đặt $t=2^x>0$, đưa phương trình trở thành phương trình bậc hai ẩn *t*.

+) Cô lập *m*, đưa phương trình về dạng $f(t)=m$. Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=m$ song song với trục hoành.

+) Lập BBT hàm số $y=f(t)$ và kết luận.

Cách giải

Đặt $t=2^x>0$, khi đó phương trình trở thành $t^2-mt+2m+1=0\Leftrightarrow t^2+1=m(t-2)$

Nhận thấy $t=2$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow t\neq 2$.

Chia cả 2 vế của phương trình cho $t-2$, ta được $m=\dfrac{t^2+1}{t-2}=f(t)\ \ (t>0)$ (*)

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=m$ song song với trục hoành.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{2t(t-2)-t^2-1}{(t-2)^2}=\dfrac{t^2-4t-1}{(t-2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\sqrt{5}\in(0;+\infty)\\t=2-\sqrt{5}\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$

BBT:

t	0		2		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{-1}{2}$ ↘		$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	↘	$4+2\sqrt{5}$	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\frac{1}{2} \\ m\ge 4+2\sqrt{5} \end{array}\right. \Rightarrow S=\left(-\infty;\frac{-1}{2}\right)\cup\left[4+2\sqrt{5};+\infty\right)$

$\Rightarrow \mathbb{R}\setminus S=\left[-\frac{1}{2};4+2\sqrt{5}\right) \Rightarrow \mathbb{R}\setminus S$ có 9 giá trị nguyên là $\{0;1;2;...;8\}$.

Câu 35. Chọn đáp án A

Phương pháp

Cho hàm số $y=f(x)$.

+) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} y=y_0 \Rightarrow y=y_0$ là TCN của đồ thị hàm số.

+) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} y=\infty \Rightarrow x=x_0$ là TCĐ của đồ thị hàm số.

Cách giải

Ta có:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x}{x^2-2mx+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{1-\frac{2m}{x}+\frac{4}{x^2}}=0 \Rightarrow y=0 \text{ là TCN của đồ thị hàm số.}$$

Do đó để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=x^2-2mx+4=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-4>0 \\ f(1)=1-2m+4\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\ne \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Câu 36. Chọn đáp án B

Phương pháp

Chia các TH sau:

TH1: $a<b<c$.

TH2: $a=b<c$.

TH3: $a<b=c$.

TH4: $a=b=c$

Cách giải

Gọi số tự nhiên có 3 chữ số là $\overline{abc}$ ($0\le a,b,c\le 9, a\ne 0$).

$\Rightarrow$ S có $9.10.10 = 900$ phần tử. Chọn ngẫu nhiên một số từ $S \Rightarrow n(\Omega) = 900$.

Gọi A là biến cố: "Số được chọn thỏa mãn $a \le b \le c$".

TH1: $a < b < c$. Chọn 3 số trong 9 số từ 1 đến 9, có duy nhất một cách xếp chúng theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải nên TH này có C_9^3 số thỏa mãn.

TH2: $a = b < c$, có C_9^2 số thỏa mãn.

TH3: $a < b = c$ có C_9^2 số thỏa mãn.

TH4: $a = b = c$ có 9 số thỏa mãn.

$\Rightarrow n(A) = C_9^3 + 2.C_9^2 + 9 = 165$.

Vậy $P(A) = \dfrac{165}{900} = \dfrac{11}{60}$.

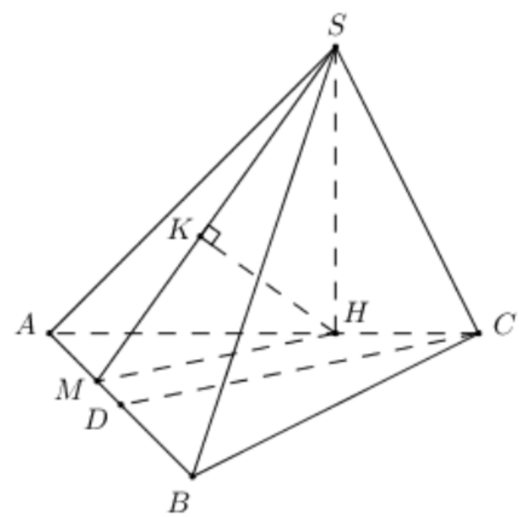
Câu 37. Chọn đáp án B

Phương pháp

+) So sánh $d(C;(SAB))$ và $d(H,(SAB))$.

+) Dựng và tính khoảng cách $d(H,(SAB))$.

Cách giải



Goi D là trung điểm của $AC \Rightarrow CD \perp AB$

Kẻ $HM // CD (M \in AB) \Rightarrow HM \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} HM \perp AB \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHM)$.

Trong (SHM) kẻ $HK \perp SM \ (K \in SM)$ ta có:

$\begin{cases} HK \perp SM \\ HK \perp AB (AB \perp (SHM)) \end{cases}$

$\Rightarrow HK \perp (SAB) \Rightarrow d(H;(SAB)) = HK$.

Ta có: $CH \cap (SAB) = A \Rightarrow \dfrac{d(C;(SAB))}{d(H;(SAB))} = \dfrac{CA}{HA} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow d(C;(SAB)) = \dfrac{3}{2} d(H;(SAB)) = \dfrac{3}{2} HK$.

Tam giác ABC đều cạnh $3a \Rightarrow CD = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng định lí Ta-lét ta có: $\dfrac{HM}{CD} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow HM = \dfrac{2}{3} . \dfrac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SHM ta có: $HK = \dfrac{SH.HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \dfrac{2a.a\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2 + 3a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$

Vậy $d\left(C;\left(SAB\right)\right)=\frac{3}{2}.\frac{2a\sqrt{21}}{7}=\frac{3a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 38. Chọn đáp án C

Phương pháp

Sử dụng công thức tính diện tích toàn hình nón $S_{tp}=\pi rl+\pi r^2$ trong đó *r, l* lần lượt là bán kính đáy và độ dài đường sinh của hình nón.

Diện tích mặt cầu bán kính R là $4\pi R^2$.

Cách giải

Ta có: $\begin{cases} r=\frac{1}{2}l \\ l=\frac{3}{2}R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}R=\frac{3}{4}R \\ l=\frac{3}{2}R \end{cases}$

Diện tích toàn phần của hình nón là $S_1=\pi rl+\pi r^2=\pi\left(\frac{3}{4}R\right).\frac{3}{2}R+\pi\left(\frac{3}{4}R\right)^2=\pi\frac{27}{16}R^2$

Diện tích mặt cầu là $S_2=4\pi R^2$.

Theo bài ra ta có: $S_1+S_2=91 \Leftrightarrow \pi\frac{27}{16}R^2+4\pi R^2=91 \Leftrightarrow \frac{91}{16}\pi R^2=91 \Leftrightarrow \pi R^2=16$.

Vậy diện tích mặt cầu là: $S_2=4\pi R^2=4.16=64\left(cm^2\right)$.

Câu 39. Chọn đáp án D

Phương pháp

+) Chia cả 2 vế cho $f\left(x\right)>0$ sau đó lấy nguyên hàm 2 vế tìm $f\left(x\right)$.

+) Từ giả thiết $f\left(0\right)=1$ xác định hằng số *C*. Tính $f\left(3\right)$.

Cách giải

Ta có $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}f'\left(x\right)$. Do $f\left(x\right)>0$ nên chia cả 2 vế cho $f\left(x\right)$ ta được $\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Lấy nguyên hàm 2 vế $\Rightarrow \int\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx \Leftrightarrow \ln f\left(x\right)=2\sqrt{x+1}+C \Rightarrow f\left(x\right)=e^{2\sqrt{x+1}+C}$

$f\left(0\right)=1 \Rightarrow e^{2+C}=1=e^0 \Leftrightarrow C=-2 \Rightarrow f\left(x\right)=e^{2\sqrt{x+1}-2}$

$\Rightarrow f\left(3\right)=e^{2\sqrt{3+1}-2}=e^2\approx 7,4$

Câu 40. Chọn đáp án C

Phương pháp

+) Để hàm số đồng biến trên $\left(0;2\right)\Rightarrow f'\left(x\right)\ge 0\ \forall x\in\left(0;2\right)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

+) Cô lập *m*, đưa bất phương trình về dạng $m\le g\left(x\right)\ \forall x\in\left(0;2\right)\Rightarrow m\le\min\limits_{[0;2]}g\left(x\right)$.

+) Lập BBT hàm số $y=g\left(x\right)$ và kết luận.

Cách giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(x\right)=3x^2+6x-m^2+3m-2$.

Để hàm số đồng biến trên $(0;2) \Rightarrow f'(x) \ge 0\ \forall x \in (0;2)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

$\Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x - m^2 + 3m - 2 \ge 0\ \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \le 3x^2 + 6x = g(x) \forall x \in (0;2) \Rightarrow m^2 - 3m + 2 \le \min\limits_{[0;2]} g(x)$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + 6x$ trên $[0;2]$ ta có:

$g'(x) = 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow g'(x) > 0\ \forall x > -1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[0;2]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[0;2]} g(x) = g(0) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$.

Câu 41. Chọn đáp án D

Phương pháp

+) Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$, tìm điều kiện của *t*.

+) Biểu diễn $\sqrt{18+3x-x^2}$ theo *t*, đưa bất phương trình về dạng $m \ge f(t)\ \forall t \in [a;b] \Rightarrow m \ge \max\limits_{[a;b]} f(t)$.

Cách giải

$\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \le m^2 - m + 1$.

ĐKXĐ: $-3 \le x \le 6$.

Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$

Ta có: $t'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3+x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{6-x}} = \dfrac{\sqrt{6-x} - \sqrt{3+x}}{2\sqrt{3+x}\sqrt{6-x}} = 0 \Leftrightarrow 6 - x = 3 + x \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

BBT:

x	-3		$\frac{3}{2}$		6
$t'(x)$		$+$	0	$-$	
$t(x)$	3	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	3

$\Rightarrow t \in \left[3; 3\sqrt{2}\right]$.

Ta có $t^2 = 3 + x + 6 - x + 2\sqrt{18+3x-x^2} = 9 + 2\sqrt{18+3x-x^2}$

$\Rightarrow \sqrt{18+3x-x^2} = \dfrac{t^2-9}{2}$.

Khi đó phương trình trở thành: $f(t) = t - \dfrac{t^2-9}{2} \le m^2 - m + 1\ \forall t \in \left[3; 3\sqrt{2}\right]$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm đúng $\forall t \in \left[3; 3\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow m^2 - m + 1 \ge \max\limits_{\left[3;3\sqrt{2}\right]} f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = t - \dfrac{t^2-9}{2}$ ta có: $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{2}.2t = 1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 1$

BBT: