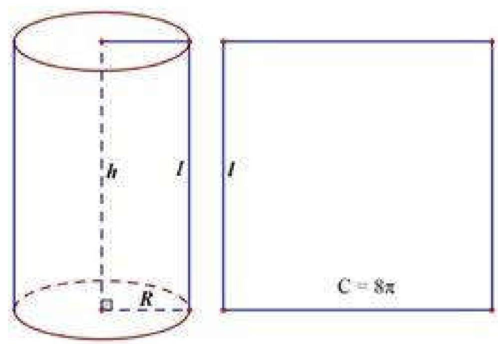
Câu 26. Cắt mặt xung quanh của một hình trụ dọc theo một đường sinh rồi trải ra trên một mặt phẳng ta được hình vuông có chu vi bằng 8π. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $2\pi^2$.   **B.** $2\pi^3$.   **C.** 4π.   **D.** $4\pi^2$.

Lời giải

Tác giả: Quỳnh Thụy Trang; Fb: Xuka

Chọn A



Ta có chu vi hình vuông bằng $8\pi \Rightarrow$ cạnh hình vuông bằng 2π.

Do đó hình trụ có bán kính $R=1$, đường sinh $l=2\pi$ (cũng chính là đường cao).
Vậy thể tích hình trụ $V=\pi R^2 h=2\pi^2$.

Câu 27 . Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=\sqrt{3}$ và $|z_1-z_2|=2$. Môđun $|z_1+z_2|$ bằng

A. 2 .   **B.** 3 .   **C.** $\sqrt{2}$.   **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Thị Thu Hiền ; Fb:Hiền Tấm

Chọn D

Cách 1:

Gọi các số phức $z_1=a_1+b_1 i,\ z_2=a_2+b_2 i\ \ (a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R})$

$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i,$

$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

Ta có: $|z_1|=\sqrt{a_1^2+b_1^2}=\sqrt{3}\Rightarrow a_1^2+b_1^2=3$

$|z_2|=\sqrt{a_2^2+b_2^2}=\sqrt{3}\Rightarrow a_2^2+b_2^2=3$

$|z_1-z_2|=2\Leftrightarrow\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}=2\Leftrightarrow(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=4$

$\Leftrightarrow a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2-2a_1a_2-2b_1b_2=4$

$\Leftrightarrow 2a_1a_2+2b_1b_2=2$

Do đó: $|z_1+z_2|=\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}=\sqrt{a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2a_1a_2+2b_1b_2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

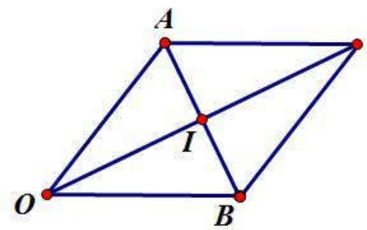
Cách 2:

$|z_1-z_2|^2=\ z_1-z_2\ \ \overline{z_1}-\overline{z_2}\ =|z_1|^2+|z_2|^2-\ z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\ =4$

$|z_1+z_2|^2=\ z_1+z_2\ \ \overline{z_1}+\overline{z_2}\ =|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=8$

$\Rightarrow |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}$

Cách 3:



Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2 . Khi đó tam giác OAB có $OA = OB = \sqrt{3}, \text{AB} = 2$. Gọi I là trung điểm của AB .

$OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{2}$

$|z_1 + z_2| = 2\left|\overrightarrow{OI}\right| = 2\sqrt{2}$

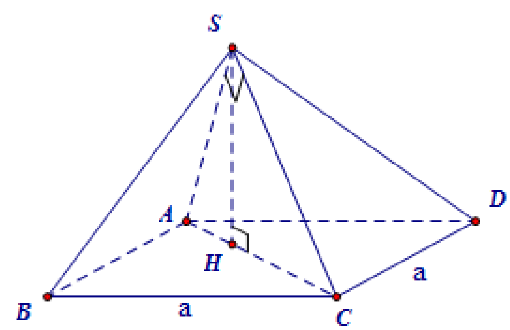
Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Tấn Kiệt; Fb: Kiệt Nguyễn

Chọn A



Vẽ $SH \perp AC$ tại H .

Khi đó: $\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (ABCD) = AC \\ SH \subset (SAC) \\ SH \perp AC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} SH.S_{ABCD}$.

Theo đề ΔSAC vuông tại S nên ta có:

$SC = \sqrt{AC^2 - SA^2} = \dfrac{\sqrt{6}a}{2}$ và $SH = \dfrac{SA.SC}{AC} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}a}{2}}{\sqrt{2}a} = \dfrac{\sqrt{6}a}{4}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có véctơ chỉ phương là $\vec{u}(2;4;6)$. Phương trình nào sau đây ***không*** phải là phương trình của đường thẳng Δ?

A. $\begin{cases} x = -5-2t \\ y = -10-4t \\ z = -15-6t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 4+2t \\ z = 6+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+4t \\ z = 3+6t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 6+4t \\ z = 12+6t \end{cases}$.

Lời giải

Tác giả: Trần Thị Thanh Thủy; Fb: Song tử mắt nâu

Chọn D

Thay tọa độ điểm $M(1;2;3)$ vào các phương trình, dễ thấy $M(1;2;3)$ không thỏa mãn phương trình $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 6+4t \\ z = 12+6t \end{cases}$.

Câu 30. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x}$ là

A. $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ **B.** $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2 \ln 2}$ **C.** $f'(x) = \dfrac{1-\log_2 x}{x^2 \ln 2}$ **D.** $f'(x) = \dfrac{1-\log_2 x}{x^2}$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huệ; Fb: Nguyễn Thị Huệ

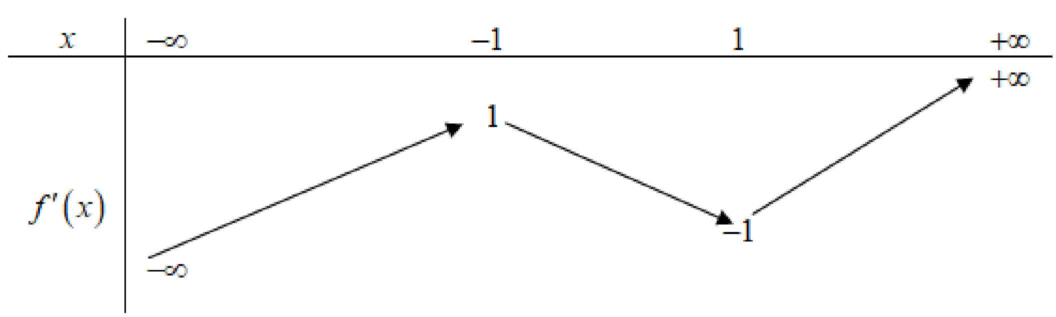
Chọn B

Đk: $x > 0$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{(\log_2 x)'.x - (\log_2 x).(x)'}{x^2} = \dfrac{\dfrac{1}{x\ln 2}.x - \log_2 x}{x^2} = \dfrac{\dfrac{1}{\ln 2} - \log_2 x}{x^2}$

$= \dfrac{1-\ln x}{x^2 \ln 2}$

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.　　**B.** 2.　　**C.** 0.　　**D.** 1.

Lời giải

Tác giả: Minh Anh Phuc; Fb: Minh Anh Phuc

Chọn D

$g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = x_0 > 1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x) = f(x) - x$ có một điểm cực trị .

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên R và có bảng xét dấu đạo hàm như dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = \log_2\left(f(2x)\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;2)$.　　**B.** $(-\infty;-1)$.　　**C.** $(-1;0)$.　　**D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Tác giả: Thu Trang ; Fb: Nguyễn Thị Thu Trang

Chọn A

Đặt $g(x) = \log_2\left(f(2x)\right)$, ta có $g'(x) = \dfrac{2f'(2x)}{f(2x)\ln 2}$.

Theo giả thiết, ta có $f(2x) > 0,\ \forall x \in R$.

Do đó $g'(x) \ge 0 \Leftrightarrow f'(2x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le 2x \le 1 \\ 2x \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ x \ge 1 \end{array}\right.$, (dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm). Suy ra hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và $(1;+\infty)$. Chọn A.

Câu 33. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m sao cho tồn tại hai số phức phân biệt $z_1,\ z_2$ thỏa mãn đồng thời các phương trình $|z-1| = |z-i|$ và $|z+2m| = m+1$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 1.　　**B.** 4.　　**C.** 2.　　**D.** 3.

Lời giải

Tác giả:Trần Thanh Hà ; Fb: Hà Trần

Chọn D

Cách 1(cách hình học) Gọi $M\left(x;y\right)\left(x,y\in R\right)$ là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Có: $\left|z+2m\right|=m+1\ge 0$

TH1: $m+1=0\Leftrightarrow m=-1\Rightarrow z=2$ (loại) vì không thỏa mãn phương trình: $\left|z-1\right|=\left|z-i\right|$.

TH2: $m+1>0\Leftrightarrow m>-1$

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases}\left|z-1\right|=\left|z-i\right|\\ \left|z+2m\right|=m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\left(x-1\right)+yi\right|=\left|x+\left(y-1\right)i\right|\\ \left|\left(x+2m\right)+yi\right|=m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-1\right)^2+y^2=x^2+\left(y-1\right)^2\\ \left(x+2m\right)^2+y^2=\left(m+1\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0 & \left(1\right)\\ \left(x+2m\right)^2+y^2=\left(m+1\right)^2 & \left(2\right)\end{cases}\left(*\right)$$

Từ $\left(1\right)$ suy ra: tập hợp điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn của số phức z là đường thẳng: $\left(\Delta\right):x-y=0$.

Từ $\left(2\right)$ suy ra: tập hợp điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn của số phức z là đường tròn

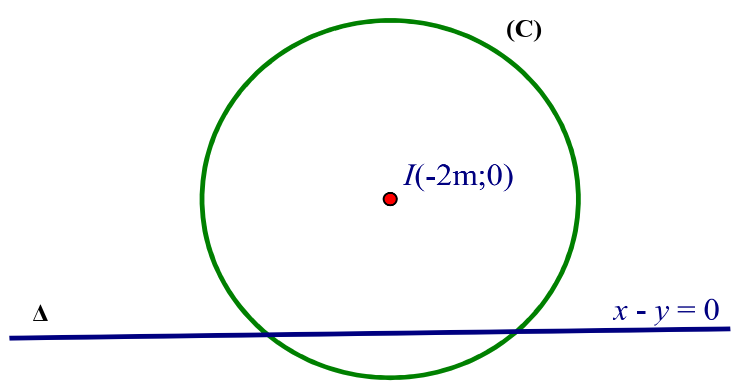
$$\left(C\right):\begin{cases}Tâm\ I\left(-2m;0\right)\\ bk\ R=m+1\end{cases}$$

Khi đó: $M\in\Delta\cap\left(C\right)\Rightarrow$ số giao điểm M chính là số nghiệm của hệ phương trình $\left(*\right)$.

Để tồn tại hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn ycbt $\Leftrightarrow\left(C\right)$ cắt $\left(\Delta\right)$ tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow d\left(I;\left(\Delta\right)\right)<R\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\left|-2m\right|}{\sqrt{2}}<m+1\\ m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\left(m+1\right)<\sqrt{2}m<m+1\\ m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\sqrt{2}<m<1+\sqrt{2}\\ m>-1\end{cases}$$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in S=\left\{0;1;2\right\}$. Vậy tổng các phần tử của S là $0+1+2=3$.



Cách 2(cách đại số)

Giả sử: $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Có: $\left|z+2m\right|=m+1\ge 0$

TH1: $m+1=0\Leftrightarrow m=-1\Rightarrow z=2$ (loại) vì không thỏa mãn phương trình: $\left|z-1\right|=\left|z-i\right|$.

TH2: $m+1>0\Leftrightarrow m>-1\left(1\right)$

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases}|z-1|=|z-i|\\|z+2m|=m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|(x-1)+yi|=|x+(y-1)i|\\|(x+2m)+yi|=m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2\\(x+2m)^2+y^2=(m+1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\(x+2m)^2+x^2=(m+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\2x^2+4mx+3m^2-2m-1=0\,(*)\end{cases}$$

Để tồn tại hai số phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn ycbt $PT(*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'=4m^2-2(3m^2-2m-1)=2(-m^2+2m+1)>0\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}<m<1+\sqrt{2}\,(2)$$

Kết hợp điều kiện (1) và (2), $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in S=\{0;1;2\}$

Vậy tổng các phần tử của S là: $0+1+2=3$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

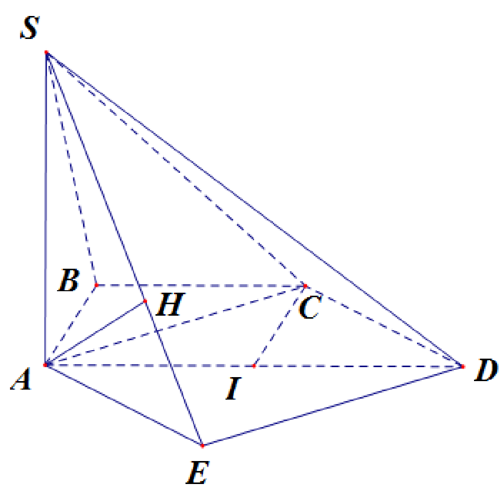
A. $\dfrac{\sqrt{6}a}{6}$.   **B.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{2}$.   **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.   **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Thị Kim Oanh ; Fb: Bùi Thị Kim Oanh

Chọn C

Cách 1



Gọi I là trung điểm của cạnh AD.

ΔABC vuông cân tại B, ΔICD vuông cân tại I và có $AB=IC=a$ nên $AC=CD=a\sqrt{2}$.

Khi đó $AC^2+CD^2=AD^2$ nên ΔACD vuông cân tại C.

Trong $(ABCD)$, dựng hình vuông $ACDE$. Trong ΔSAE, kẻ $AH\perp SE$ (1).

Ta có $\left.\begin{matrix}ED\perp SA\\ED\perp AE\end{matrix}\right\}\Rightarrow ED\perp(SAE)\Rightarrow ED\perp AH$ (2).

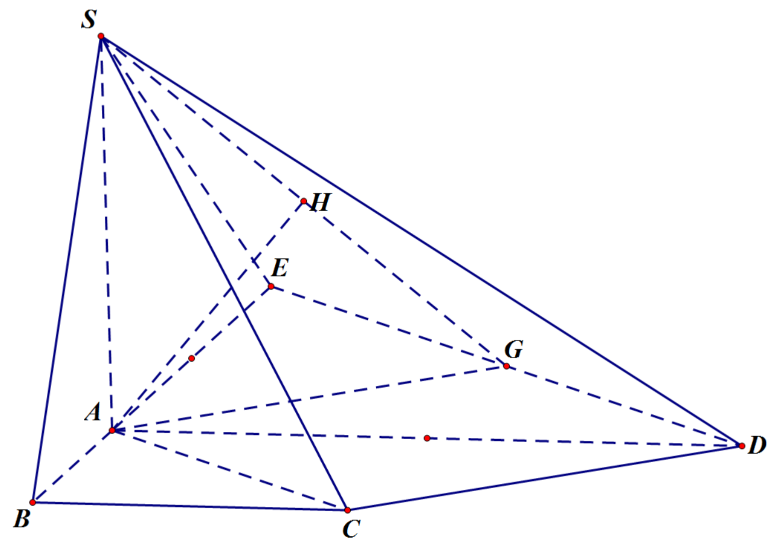
Từ (1) và (2) suy ra $AH\perp(SDE)$.

Vì $AC\,//\,ED$ nên $d(AC,SD)=d(AC;(SDE))=d(A;(SDE))=AH$.

Trong ΔSAE, $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AE^2} \Leftrightarrow AH=\frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}} \Leftrightarrow AH=\frac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Vậy $d\left(AC,SD\right)=\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Cách 2



Dễ thấy $DC\perp\left(SAC\right)$. Trên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, dựng: $AG//CD$, $DG//AC$, $DG\cap AB=\left\{E\right\}$. Dễ dàng chứng minh được: $S.AED$ là tam diện vuông (1)

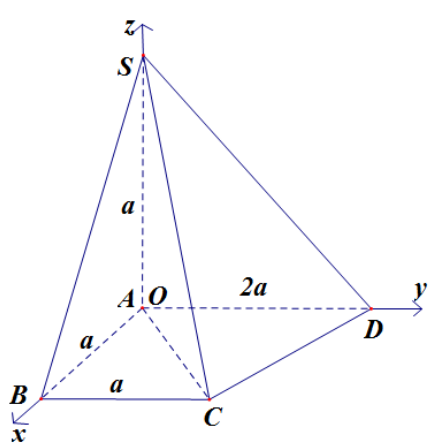
Tính được: $AE=AD=2a$. Mà $AC//\left(SDE\right)\Rightarrow d_{(AC;SD)}=d_{(AC;(SDE))}=d_{(A;(SDE))}=AH$

Với AH là đoạn thẳng dựng từ A vuông góc với mặt phẳng $\left(ADE\right)$

Ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AD^2}\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Cách 3

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$.

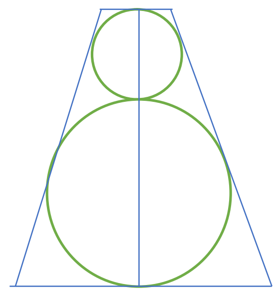


Khi đó $A(0;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;2a;0)$, $S(0;0;a)$.

Do đó $\overrightarrow{AC}=(a;a;0)$, $\overrightarrow{SD}=(0;2a;-a)$, $\overrightarrow{SA}=(0;0;-a)$ và $\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{SD}\right]=(-a;a;2a)$.

Ta có $d(AC,SD)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{SD}\right].\overrightarrow{SA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{SD}\right]\right|}=\dfrac{\left|-a.0+a.0+2a.(-a)\right|}{\sqrt{(-a)^2+a^2+(2a)^2}}=\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.

Câu 35. Người ta sản xuất một vật lưu niệm (*N*) bằng thủy tinh trong suốt có dạng khối tròn xoay mà thiết diện qua trục của nó là một hình thang cân (xem hình vẽ). Bên trong (*N*) có hai khối cầu ngũ sắc với bán kính lần lượt là $R=3$ cm, $r=1$ cm tiếp xúc với nhau và cùng tiếp xúc với mặt xung quanh của (*N*), đồng thời hai khối cầu lần lượt tiếp xúc với hai mặt đáy của (*N*) . Tính thể tích vật lưu niệm đó

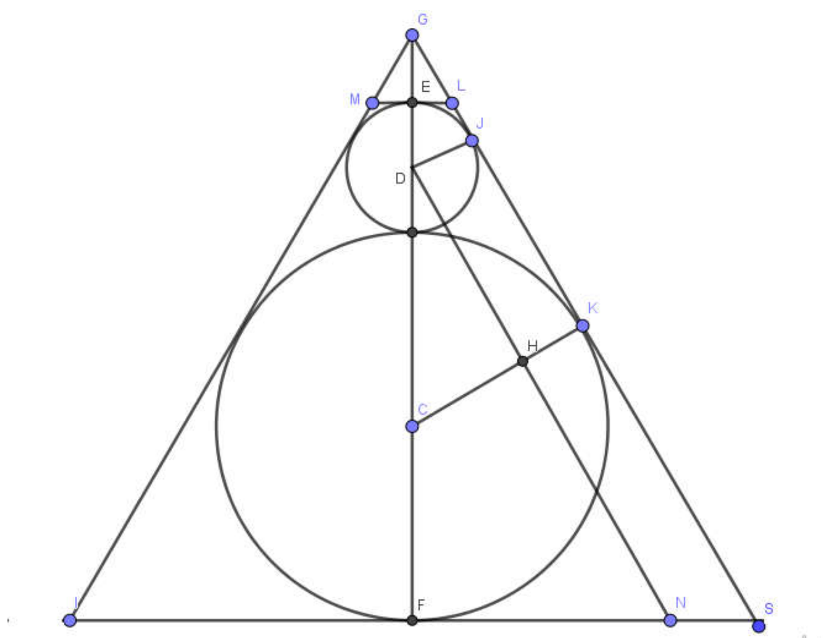


A. $\dfrac{485\pi}{6}\left(cm^3\right)$. **B.** $81\pi\left(cm^3\right)$. **C.** $72\pi\left(cm^3\right)$. **D.** $\dfrac{728\pi}{9}\left(cm^3\right)$.

Lời giải

Tác giả: ; Fb: PhanKhanh

Chọn D



Gọi tâm của hai đường tròn trong (N) là C và D. Ta có GS là tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại K và J. Khi đó: $\begin{cases} DJ\perp GS \\ CK\perp GS \end{cases}$.

Kẻ $DN//GS$ $\left(N\in IS\right)$, khi đó $DHKJ$ là hình chữ nhật nên $HK=DJ=1$ cm, do đó ta có $CH=2$ cm.

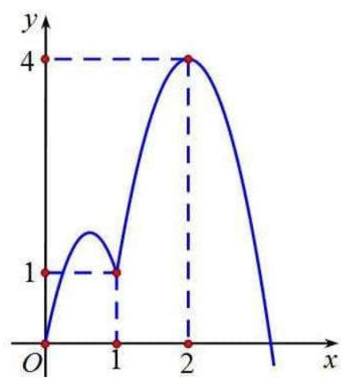
Ta có ΔDHC đồng dạng ΔGJD nên $\frac{DJ}{CH}=\frac{GD}{CD}$ $\Rightarrow DG=\frac{DJ.CD}{CH}$ $=\frac{1.4}{2}=2$ cm từ đó suy ra $GF=9$ cm.

Ta lại có ΔDHC đồng dạng ΔGFS $\Rightarrow \frac{GS}{DC}=\frac{GF}{DH}\Rightarrow GS=\frac{DC.GF}{DH}=\frac{DC.GF}{\sqrt{DC^2-CH^2}}$ $=6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow FS=\sqrt{GS^2-GF^2}=3\sqrt{3}$ cm.

Vì ΔGEL đồng dạng ΔGFS nên $\frac{EL}{FS}=\frac{GE}{GF}$ $\Rightarrow EL=\frac{GE.FS}{GF}=\frac{1.3\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Vì (N) là khối nón cụt nên: $V_N=\frac{1}{3}\left(EL^2+FS^2+EL.FS\right)EF=\frac{728\pi}{9}$.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y=\left|3f(x)-x^3\right|$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;3)$.

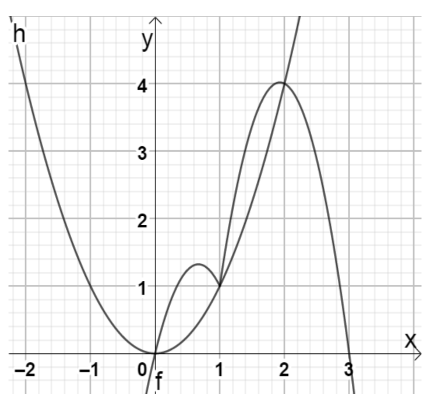
Lời giải

Tác giả: Trần Trung Chiến ; Fb: Trần Trung Chiến

Chọn C

Đặt $g(x)=3f(x)-x^3$. Hàm số ban đầu có dạng $y=\left|g(x)\right|$.

Ta có $g'(x)=3f'(x)-3x^2$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

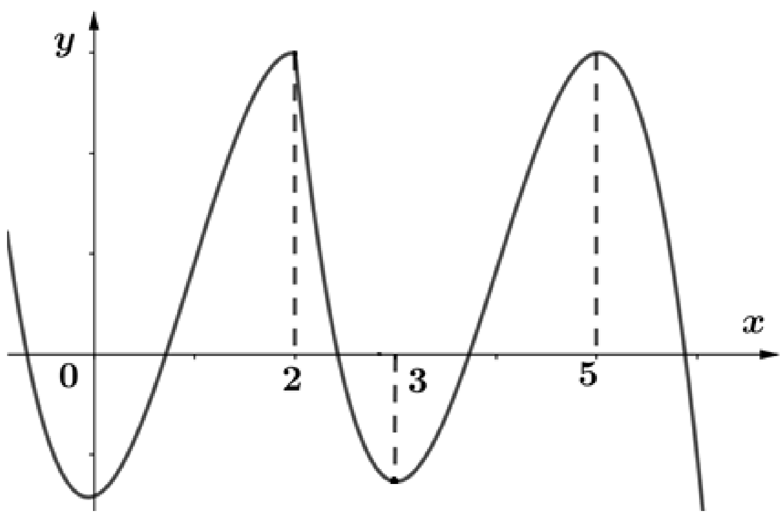


Dễ thấy $g(0)=0$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0		$-$		
$y=\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$y=0$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ / $-\infty$

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y=\left|g(x)\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và $(a;+\infty)$ với $g(a)=0$.

Câu 37. Cho số thực m và hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình có $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Tác giả: Vũ Việt Tiến, FB: Vũ Việt Tiến

Chọn B

Đặt $t=t(x)=2^x+2^{-x}$ với $x\in[-1;2]$.

Hàm $t=t(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và $t'(x)=2^x\ln 2-2^{-x}\ln 2$, $t'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		2
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{17}{4}$

Vậy $x\in[-1;2]\Rightarrow t\in\left[2;\frac{17}{4}\right]$.

Với mỗi $t\in\left(2;\frac{5}{2}\right]$ có 2 giá trị của x thỏa mãn $t=2^x+2^{-x}$.

Với mỗi $t\in\{2\}\cup\left(\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right]$ có duy nhất 1 giá trị x thỏa mãn.