

Dạng 3: Tìm số số hạng của dãy

* **Cách giải ở dạng này là:**

Đối với dạng toán này, ta thường sử dụng phương pháp giải toán khoảng cách (toán trồng cây). Ta có công thức sau :

$$\text{Số các số hạng của dãy} = \text{số khoảng cách} + 1.$$

Đặc biệt, nếu quy luật của dãy là : Mỗi số hạng đứng sau bằng số hạng liền trước cộng với số không đổi d thì:

$$\text{Số các số hạng của dãy} = (\text{Số hạng lớn nhất} - \text{Số hạng nhỏ nhất}) : d + 1.$$

Các ví dụ:

Bài 1: Cho dãy số 11; 14; 17;.....;65; 68.

Hãy xác định dãy số trên có bao nhiêu số hạng?

Lời giải :

Ta có : $14 - 11 = 3$; $17 - 14 = 3$;.....

Vậy quy luật của dãy số đó là mỗi số hạng đứng liền sau bằng số hạng đứng liền trước nó cộng với 3. Số các số hạng của dãy số đó là:

$$(68 - 11) : 3 + 1 = 20 \text{ (số hạng)}$$

Bài 2: Cho dãy số: 2, 4, 6, 8, 10,....., 1992

Hãy xác định dãy số trên có bao nhiêu số hạng?

Giải:

Ta thấy: $4 - 2 = 2$; $8 - 6 = 2$
 $6 - 4 = 2$;

Vậy, quy luật của dãy số là: Mỗi số hạng đứng sau bằng một số hạng đứng trước cộng với 2. Nói khác: Đây là dãy số chẵn hoặc dãy số cách đều 2 đơn vị.

Dựa vào công thức trên:

$$\text{(Số hạng cuối} - \text{số hạng đầu) : khoảng cách} + 1$$

Ta có: Số các số hạng của dãy là:

$$(1992 - 2) : 2 + 1 = 996 \text{ (số hạng).}$$

Bài 3: Cho 1, 3, 5, 7, là dãy số lẻ liên tiếp đầu tiên; hỏi 1981 là số hạng thứ bao nhiêu trong dãy số này? Giải thích cách tìm?

(Đề thi học sinh giỏi bậc tiểu học 1980 – 1981)

Giải:

Ta thấy:

$$\text{Số hạng thứ nhất bằng: } 1 = 1 + 2 \times 0$$

$$\text{Số hạng thứ hai bằng: } 3 = 1 + 2 \times 1$$

$$\text{Số hạng thứ ba bằng: } 5 = 1 + 2 \times 2$$

.....

$$\text{Còn số hạng cuối cùng: } 1981 = 1 + 2 \times 990$$

Vì vậy, số 1981 là số hạng thứ 991 trong dãy số đó.

Bài 4: Cho dãy số: 3, 18, 48, 93, 153,...

a. Tìm số hạng thứ 100 của dãy.

b. Số 11703 là số hạng thứ bao nhiêu của dãy?

Giải:

$$\text{a. Số hạng thứ nhất: } 3 = 3 + 15 \times 0$$

$$\text{Số hạng thứ hai: } 18 = 3 + 15 \times 1$$

$$\text{Số hạng thứ ba: } 48 = 3 + 15 \times 1 + 15 \times 2$$

$$\text{Số hạng thứ tư: } 93 = 3 + 15 \times 1 + 15 \times 2 + 15 \times 3$$

$$\text{Số hạng thứ năm: } 153 = 3 + 15 \times 1 + 15 \times 2 + 15 \times 3 + 15 \times 4$$

.....

$$\text{Số hạng thứ n: } 3 + 15 \times 1 + 15 \times 2 + 15 \times 3 + \dots + 15 \times (n - 1)$$

Vậy số hạng thứ 100 của dãy là:

$$3 + 15 \times 1 + 15 \times 2 + \dots + 15 \times (100 - 1)$$

$$= 3 + 15 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 99) \text{ (Đưa về một số nhân với một tổng.)}$$

$$= 3 + 15 \times (1 + 99) \times 99 : 2 = 74253$$

b. Gọi số 11703 là số hạng thứ n của dãy:

Theo quy luật ở phần a ta có:

$$3 + 15 \times 1 + 15 \times 2 + 15 \times 3 + \dots \times (n - 1) = 11703$$

$$3 + 15 \times (1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)) = 11703$$

$$3 + 15 \times (1 + n - 1) \times (n - 1) : 2 = 11703$$

$$15 \times n \times (n - 1) = (11703 - 3) \times 2 = 23400$$

$$n \times (n - 1) = 23400 : 15 = 1560$$

Nhận xét: Số 1560 là tích của hai số tự nhiên liên tiếp 39 và 40 ($39 \times 40 = 1560$)

Vậy, $n = 40$, số 11703 là số hạng thứ 40 của dãy.

Bài 5: Trong các số có ba chữ số, có bao nhiêu số chia hết cho 4?

Lời giải:

Ta nhận xét : Số nhỏ nhất có ba chữ số chia hết cho 4 là 100 và số lớn nhất có ba chữ số chia hết cho 4 là 996. Như vậy các số có ba chữ số chia hết cho 4 lập thành một dãy số có số hạng nhỏ nhất là 100, số hạng lớn nhất là 996 và mỗi số hạng của dãy (kể từ số hạng thứ hai) bằng số hạng đứng liền trước cộng với 4.

Vậy số các số có ba chữ số chia hết cho 4 là :

$$(996 - 100) : 4 = 225 \text{ (số)}$$

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Cho dãy số: 3, 8, 13, 23,, 2008

Tìm xem dãy số có bao nhiêu số hạng ?

Bài 2: Tìm số số hạng của các dãy số sau:

a. 1, 4, 7, 10,, 1999.

b. 1,1 ; 2,2 ; 3,3 ; ... ; 108,9 ; 110,0.

Bài 3: Xét dãy số: 100, 101,, 789.

Dãy này có bao nhiêu số hạng?

Bài 4: Có bao nhiêu số khi chia cho 4 thì dư 1 mà nhỏ hơn 2010 ?

Bài 5: Người ta trồng cây hai bên đường của một đoạn đường quốc lộ dài 21km. Hỏi phải dùng bao nhiêu cây để đủ trồng trên đoạn đường đó ? Biết rằng cây nọ trồng cách cây kia 5m.

Dạng 4: Tìm số hạng thứ n của dãy số

Bài toán 1: Cho dãy số: 1, 3, 5, 7,.....Hỏi số hạng thứ 100 của dãy số là số nào

Giải:

Số khoảng cách từ số đầu đến số hạng thứ 100 là:

$$98 - 1 = 99$$

Mỗi khoảng cách là

$$3 - 1 = 5 - 3 = 2$$

Số hạng thứ 100 là

$$1 + 99 \times 2 = 199$$

Công thức tổng quát:

$$\text{Số hạng thứ } n = \text{số đầu} + \text{khoảng cách} \times (\text{Số số hạng} - 1)$$

Bài toán 2: Tìm số hạng thứ 100 của các dãy số được viết theo quy luật:

a) 3, 8, 15, 24, 35,... (1)

b) 3, 24, 63, 120, 195,... (2)

c) 1, 3, 6, 10, 15,... (3)

Giải: a) Dãy (1) có thể viết dưới dạng: $1 \times 3, 2 \times 4, 3 \times 5, 4 \times 6, 5 \times 7, \dots$

Mỗi số hạng của dãy (1) là tích của hai thừa số, thừa số thứ hai lớn hơn thừa số thứ nhất 2 đơn vị. Các thừa số thứ nhất làm thành một dãy: 1, 2, 3, 4, 5, ...; Dãy này có số hạng thứ 100 là 100.

Số hạng thứ 100 của dãy (1) bằng: $100 \times 102 = 10200$.

b) Dãy (2) có thể viết dưới dạng: $1 \times 3, 4 \times 6, 7 \times 9, 10 \times 12, 13 \times 15, \dots$

Mỗi số hạng của dãy (2) là tích của hai thừa số, thừa số thứ hai lớn hơn thừa số thứ nhất 2 đơn vị. Các thừa số thứ nhất làm thành một dãy: 1, 4, 7, 10, 13, ...; Số hạng thứ 100 của dãy 1, 4, 7, 10, 13,... là: $1 + (100 - 1) \times 3 = 298$.

Số hạng thứ 100 của dãy (2) bằng: $298 \times 300 = 89400$.

c) Dãy (3) có thể viết dưới dạng:

$$\frac{1 \times 2}{2}; \frac{2 \times 3}{2}; \frac{3 \times 4}{2}; \frac{4 \times 5}{2}; \dots$$

Số hạng thứ 100 của dãy (3) bằng: $\frac{100 \times 101}{2} = 5050$

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Cho dãy số : 101, 104, 107, 110,

Tìm số hạng thứ 1998 của dãy số đó.

Bài 2: Cho dãy số : 5, 8, 11, 14,

a) Tìm số hạng thứ 200 của dãy số.

b) Nếu cứ viết tiếp thì các số : 1000 ; 2009 ; 5000 có là số hạng của dãy không ?

Tại sao.

Bài 3: Một bạn học sinh viết liên tiếp các số tự nhiên mà khi chia cho 3 thì dư 2 bắt đầu từ số 5 thành dãy số. Viết đến số hạng thứ 100 thì phát hiện đã viết sai. Hỏi bạn đó đã viết sai số nào ?

Dạng 5: Tìm số chữ số của dãy khi biết số số hạng

Bài toán 1: Cho dãy số: 1, 2, 3,.....150. Hỏi để viết dãy số này người ta phải dùng bao nhiêu chữ số

Giải:

Dãy số đã cho có : $(9 - 1) : 1 + 1 = 9$ số có 1 chữ số.

Có $(99 - 10) : 1 + 1 = 90$ số có 2 chữ số

Có $(150 - 100) : 1 + 1 = 51$ số có 3 chữ số.

Vậy số chữ số cần dùng là :

$$9 \times 1 + 90 \times 2 + 51 \times 3 = 342 \text{ chữ số}$$

Bài toán 2: Một quyển sách có 234 trang. Hỏi để đánh số trang quyển sách đó người ta phải dùng bao nhiêu chữ số.

Giải:

Để đánh số trang quyển sách đó người ta phải viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 234 thành dãy số. Dãy số này có

$$(9 - 1) : 1 + 1 = 9 \text{ số có 1 chữ số}$$

$$\text{Có: } (99 - 10) : 1 + 1 = 90 \text{ số có 2 chữ số}$$

$$\text{Có: } (234 - 100) : 1 + 1 = 135 \text{ số có 3 chữ số}$$

Vậy người ta phải dùng số chữ số là:

$$9 \times 1 + 90 \times 2 + 135 \times 3 = 594 \text{ chữ số}$$

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Một bạn học sinh viết liên tiếp các số tự nhiên từ 101 đến 2009 thành 1 số rất lớn. Hỏi số đó có bao nhiêu chữ số

Bài 2: Trường Tiểu học Thành Công có 987 học sinh. Hỏi để ghi số thứ tự học sinh trường đó người ta phải dùng bao nhiêu chữ số

Bài 3: Cần bao nhiêu chữ số để đánh số trang của một cuốn sách có tất cả là:

a) 752 trang.

b) 1251 trang.

Dạng 6: Tìm số số hạng khi biết số chữ số

Bài toán 1: Để đánh số trang 1 quyển sách người ta dùng hết 435 chữ số. Hỏi quyển sách đó có bao nhiêu trang?

Giải:

Để đánh số trang quyển sách đó, người ta phải viết liên tiếp các số tự nhiên bắt đầu từ 1 thành dãy số. Dãy số này có

9 số có 1 chữ số

có 90 số có 2 chữ số

Để viết các số này cần số chữ số là

$$9 \times 1 + 90 \times 2 = 189 \text{ chữ số}$$

Số chữ số còn lại là:

$$435 - 189 = 246 \text{ chữ số}$$

Số chữ số còn lại này dùng để viết tiếp các số có 3 chữ số bắt đầu từ 100. Ta viết được

$$246 : 3 = 82 \text{ số}$$

Số trang quyển sách đó là

$$99 + 82 = 181 \text{ (trang)}$$

Bài toán 2:

Để đánh số trang một cuốn sách người ta phải dùng tất cả 600 chữ số. Hỏi quyển sách đó có bao nhiêu trang?

Giải: 99 trang đầu cần dùng $9 \times 1 + 90 \times 2 = 189$ chữ số.

$$999 \text{ trang đầu cần dùng: } 9 \times 1 + 90 \times 2 + 900 \times 3 = 2889 \text{ chữ số}$$

Vì: $189 < 600 < 2889$ nên trang cuối cùng phải có 3 chữ số. Số chữ số để đánh số các trang có 3 chữ số là: $600 - 189 = 411$ (chữ số)

$$\text{Số trang có 3 chữ số là } 411 : 3 = 137 \text{ trang.}$$

Vậy quyển sách có tất cả là: $99 + 137 = 236$ trang.

Bài toán 3: Để ghi thứ tự các nhà trên một đường phố, người ta dùng các số chẵn 2, 4, 6, 8 . . . để ghi các nhà ở dãy phải và các số lẻ 1, 3, 5, 7 . . . để ghi các nhà ở dãy trái của đường phố đó. Hỏi số nhà cuối cùng của dãy chẵn trên đường phố đó là bao nhiêu, biết rằng khi đánh thứ tự các nhà của dãy này, người ta đã dùng 367 lượt chữ số cả thảy.

Giải:

Số nhà có số thứ tự ghi bằng 1 chữ số chẵn là: $(8 - 2) : 2 + 1 = 4$ (nhà)

Số nhà có số thứ tự ghi bằng 2 chữ số chẵn là: $(98 - 10) : 2 + 1 = 45$ (nhà)

Số lượt chữ số để đánh số thứ tự các nhà có 1 và 2 chữ số là:

$$4 + 45 \times 2 = 94 \text{ (lượt)}$$

Số lượt chữ số để đánh số thứ tự nhà có 3 chữ số là: $367 - 94 = 273$ (lượt)

Số nhà có số thứ tự 3 chữ số là: $273 : 3 = 91$ (nhà)

Tổng số nhà của dãy chẵn là: $4 + 45 + 91 = 140$ (nhà)

Số nhà cuối cùng của dãy chẵn là: $(140 - 1) \times 2 + 2 = 280$.

Bài toán 4: Cho dãy số: 1, 3, 5, 7, ..., n. Hãy tìm số n để số chữ số của dãy gấp 3 lần số các số hạng của dãy.

Giải:

Để tìm được số n sao cho số các chữ số của dãy gấp ba lần số các số hạng của dãy đó, ta giả sử trung bình mỗi số lẻ liên tiếp của dãy đều có 3 chữ số. Do đó:

- Từ 1 đến 9 gồm các số lẻ có một chữ số là:

$$(9 - 1) : 2 + 1 = 5 \text{ (số)}$$

Mỗi số cần phải viết thêm 2 chữ số nên số chữ số cần phải viết thêm là:

$$2 \times 5 = 10 \text{ (chữ số)}$$

Các số lẻ gồm hai chữ số là

$$(99 - 11) : 2 + 1 = 45 \text{ (số)}$$

Mỗi số cần phải viết thêm 1 chữ số nên số chữ số cần phải viết thêm là:

$$1 \times 45 = 45 \text{ (chữ số)}$$

Các số lẻ gồm 3 chữ số là:

$$(999 - 101) : 2 + 1 = 450 \text{ (số)}$$

Các số có 3 chữ số đảm bảo số chữ số của dãy gấp ba lần số số hạng của dãy đó.

Từ 1001 trở đi, mỗi số cần bớt đi một chữ số. Số chữ số cần thêm phải bằng số chữ số cần bớt và bằng:

$$10 + 45 = 55 \text{ (chữ số)}$$

Vì mỗi số phải bớt đi 1 chữ số nên số các số lẻ có 4 chữ số là:

$$55 : 1 = 55 \text{ (số)}$$

Ta có:

$$(n - 1001) : 2 + 1 = 55$$

$$(n - 1001) : 2 = 55 - 1 = 54$$

$$(n - 1001) = 54 \times 2 = 108$$

$$n = 108 + 1001 = 1109$$

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Để viết dãy số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ 1 người ta dùng hết 756 chữ số. Hỏi số hạng cuối cùng của dãy số là bao nhiêu.

Bài 2: Để ghi số thứ tự học sinh của 1 trường Tiểu học, người ta phải dùng 1137 chữ số. Hỏi trường đó có bao nhiêu học sinh ?

Bài 3: Tính số trang của một cuốn sách. Biết rằng để đánh số trang của cuốn sách đó người ta phải dùng 3897 chữ số?

Bài 4: Để đánh số trang của một quyển sách, người ta phải dùng trung bình mỗi trang 4 chữ số. Hỏi quyển sách đó có bao nhiêu trang?

Dạng 7: Tìm chữ số thứ n của dãy

Bài toán 1: Cho dãy số 1, 2, 3,..... Hỏi chữ số thứ 200 là chữ số nào ?

Giải:

Dãy số đã cho có 9 số có 1 chữ số

Có 90 số có 2 chữ số

Để viết các số này cần

$$9 \times 1 + 90 \times 2 = 189 \text{ chữ số}$$

Số chữ số còn lại là

$$200 - 189 = 11 \text{ chữ số}$$

Số chữ số còn lại này dùng để viết các số có 3 chữ số bắt đầu từ 100. Ta viết được

$$11 : 3 = 3 \text{ số (dư 2 chữ số)}$$

Nên có 3 số có 3 chữ số được viết liên tiếp đến

$$99 + 3 = 102$$

Còn dư 2 chữ số dùng để viết tiếp số 103 nhưng chỉ viết được 10. Vậy chữ số thứ 200 của dãy là chữ số 0 của số 103.

Bài toán 2: Cho dãy số 2, 4, 6, 8, Hỏi chữ số thứ 2010 của dãy là chữ số nào?

Giải:

Dãy số đã cho có 4 số có 1 chữ số

Có $(98 - 10) : 2 + 1 = 45$ số có 2 chữ số

Có $(998 - 100) : 2 + 1 = 450$ số có 3 chữ số

Để viết các số này cần:

$$4 \times 1 + 45 \times 2 + 450 \times 3 = 1444 \text{ chữ số}$$

Số chữ số còn lại là:

$$2010 - 1444 = 566 \text{ chữ số}$$

Số chữ số còn lại này dùng để viết các số có 4 chữ số bắt đầu từ 1000. Ta viết được:

$$566 : 4 = 141 \text{ số (dư 2 chữ số)}$$

Nên có 141 số có 4 chữ số được viết, số có 4 chữ số thứ 141 là:

$$(141 - 1) \times 2 + 1000 = 1280$$

Còn dư 2 chữ số dùng để viết tiếp số 1282 nhưng mới chỉ viết được 12. Vậy chữ số thứ 2010 của dãy là chữ số 2 hàng trăm của số 1282.

Bài toán 3: Tìm chữ số thứ 2010 ở phần thập phân của số thập phân bằng phân số $\frac{1}{7}$.

Giải:

Số thập phân bằng phân số $\frac{1}{7}$ là: $1 : 7 = 0,14285714285.....$

Đây là số thập phân vô hạn tuần hoàn. Ta thấy cứ 6 chữ số thì lập thành 1 nhóm 142857. Với 2010 chữ số thì có số nhóm là:

$2010 : 6 = 335$ (nhóm). Vậy chữ số thứ 2010 ở phần thập phân của số thập phân bằng phân số $\frac{1}{7}$ là chữ số 7.

Bài toán 4: Cho 1 số có 2 chữ số, một dãy số được tạo nên bằng cách nhân đôi chữ số hàng đơn vị của số này rồi cộng với chữ số hàng chục, ghi lại kết quả; tiếp tục như vậy

với số vừa nhận được ... (Ví dụ có thể là dãy: 59, 23, 8, 16, 13, ...). Tìm số thứ 2010 của dãy nếu số thứ nhất là 14.

Giải:

Ta lập được dãy các số như sau:

14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10, 1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15,

Ta thấy cứ hết 18 số thì dãy các số lại được lặp lại như dãy 18 số đầu.

Với 2010 số thì có số nhóm là:

$$2010 : 18 = 111 \text{ nhóm (dư } 12 \text{ số)}$$

12 số đó là các số của nhóm thứ 112 lần lượt là: 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10, 1.

Vậy số thứ 2010 của dãy là số 1.

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Cho dãy số: 2, 5, 8, 11,.....Hãy tìm chữ số thứ 200 của dãy số đó.

Bài 2: Cho dãy số: 2, 4, 6, 8, Bạn Minh tìm được chữ số thứ 2010 của dãy là chữ số 0, hỏi bạn tìm đúng hay sai?

Bài 3: Bạn Minh đang viết phân số $\frac{5}{13}$ dưới dạng số thập phân. Thấy bạn Thông sang chơi, Minh liền đó: Đố bạn tìm được chữ số thứ 100 ở phần thập phân của số thập phân mà tớ đang viết. Thông nghĩ 1 tí rồi trả lời ngay: đó là chữ số 6. Em hãy cho biết bạn Thông trả lời đúng hay sai?

Dạng 8: Tìm số hạng thứ n khi biết tổng của dãy số

Bài toán 1: Cho dãy số: 1, 2, 3,, n. Hãy tìm số n biết tổng của dãy số là 136

Giải:

Áp dụng công thức tính tổng ta có :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1+n) \times n}{2} = 136$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } (1 + n) \times n &= 136 \times 2 \\ &= 17 \times 8 \times 2 \\ &= 16 \times 17 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } n = 16$$

Bài toán 2: Cho dãy số: 21, 22, 23,, n

Tìm n biết: $21 + 22 + 23 + \dots + n = 4840$

Giải:

Nếu cộng thêm vào tổng trên tổng của các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 20 ta có tổng sau:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 21 + 22 + 23 + \dots + n$$

Áp dụng công thức tính tổng ta có

$$\begin{aligned} (1 + n) \times n : 2 &= 1 + 2 + \dots + 20 + 4840 \\ &= (1 + 20) \times 20 : 2 + 4840 \\ &= 210 + 4840 = 5050 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + n) \times n &= 5050 \times 2 \\ &= 10100 \\ &= 101 \times 100 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } n = 100$$

*** Bài tập tự luyện:**

Bài 1: Cho biết: $1 + 2 + 3 + \dots + n = 345$. Hãy tìm số n.

Bài 2: Tìm số n biết rằng

$$98 + 102 + \dots + n = 15050$$

Bài 3: Cho dãy số 10, 11, 12, 13, ..., x. Tìm x để tổng của dãy số trên bằng 5106