CÔNG THỨC LŨY THỪA

ĐKXĐ: a^x xác định khi $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

1. $a^m.a^n = a^{m+n}$	1. $a^{m+n} = a^m.a^n$
2. $a^m.b^m = (a.b)^m$	2. $(a.b)^m = a^m.b^m$
3. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	3. $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$
4. $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m,\ b \neq 0$	4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m},\ b \neq 0$
5. $(a^m)^n = (a^n)^m$	5. $a^{m.n} = (a^m)^n = (a^n)^m$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	6. $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$
7. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	7. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = a^u.\ln a.u'$	$(\log_a \lvert x \rvert)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$	$(\log_a \lvert u \rvert)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u.u'$	$(\ln \lvert x \rvert)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln \lvert u \rvert)' = \dfrac{u'}{u}$

CÔNG THỨC ĐẠO HÀM CƠ BẢN

$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha.x^{\alpha-1}$	$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u.v)' = u'.v + u.v'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

CÔNG THỨC LÔGARÍT

ĐKXĐ: $\log_a f(x)$ xác định khi $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

1. $\log_a f(x) = g(x)$

   $\Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$

2. $\log_a f(x) = \log_a f(y)$

   $\Leftrightarrow f(x) = f(y)$

3. $\alpha = \log_a a^{\alpha}$ $\quad$ $\alpha = \log_m m^{\alpha}$

4. $b = a^{\log_a b}$ $\quad$ $n = m^{\log_m n}$

5. $\log_a m + \log_a n = \log_a m.n$

6. $\log_a m - \log_a n = \log_a \dfrac{m}{n}$

7. $\alpha \log_a x = \log_a x^{\alpha}$

8. $\dfrac{1}{\alpha} \log_a x = \log_{a^{\alpha}} x$

9. $\log_a b \, . \, \log_b c = \log_a c$

10. $\log_a b. \ \log_b a = 1$

11. $\ln x = \log_e x$

12. $\log x = \log_{10} x = \lg x$

1. $\log_a f(x) = g(x)$

   $\Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$

2. $\log_a f(x) = \log_a f(y)$

   $\Leftrightarrow f(x) = f(y)$

3. $\alpha = \log_a a^{\alpha}$ $\quad$ $\alpha = \log_m m^{\alpha}$

4. $b = a^{\log_a b}$ $\quad$ $n = m^{\log_m n}$

5. $\log_a m + \log_a n = \log_a m.n$

6. $\log_a m - \log_a n = \log_a \dfrac{m}{n}$

7. $\alpha \log_a x = \log_a x^{\alpha}$

8. $\dfrac{1}{\alpha} \log_a x = \log_{a^{\alpha}} x$

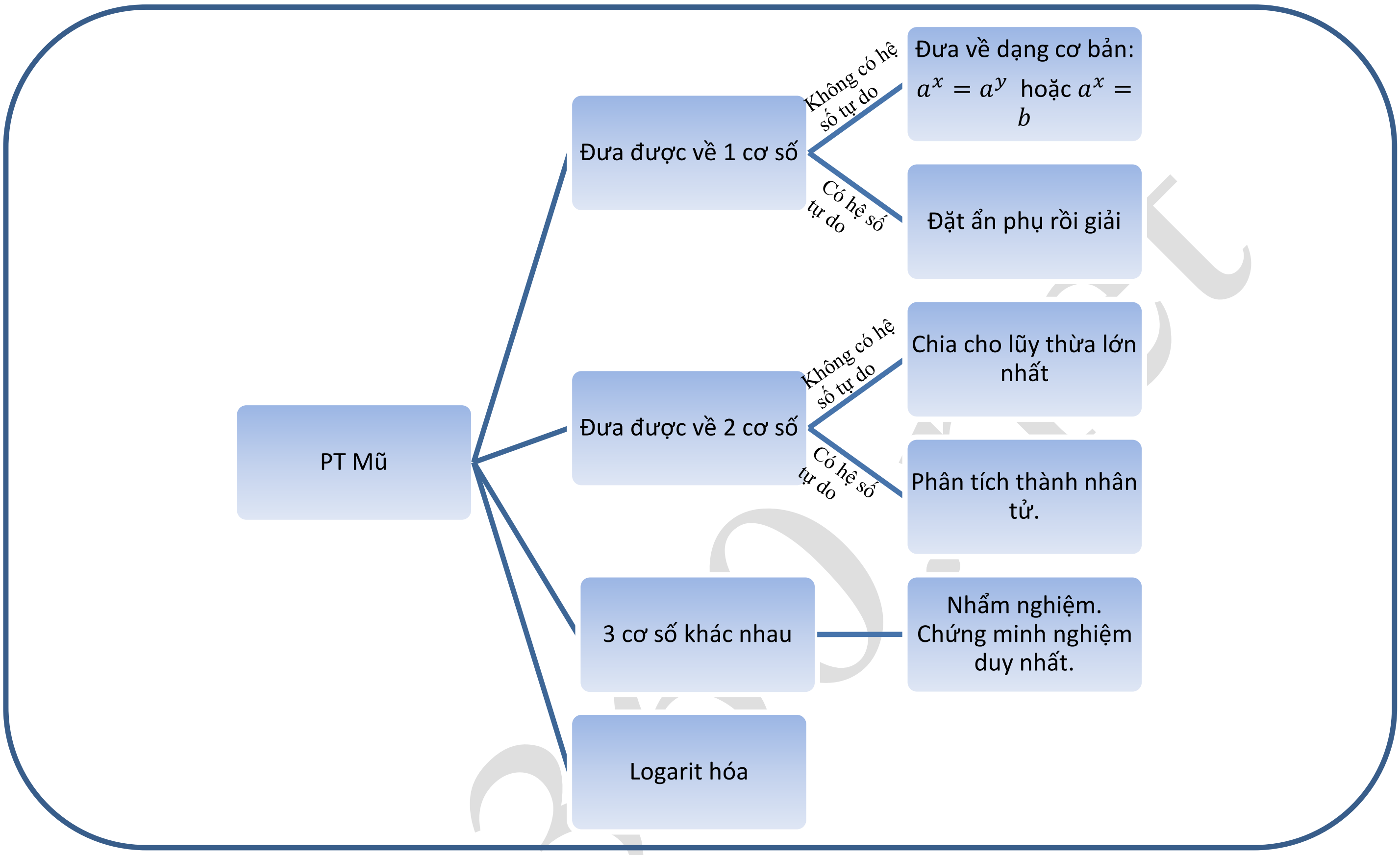
9. $\log_a b \, . \, \log_b c = \log_a c$

10. $\log_a b. \ \log_b a = 1$

11. $\ln x = \log_e x$

12. $\log x = \log_{10} x = \lg x$

PHƯƠNG TRÌNH MŨ



<u>Ví dụ minh họa:</u>

1. $3^{x-2} = 5 \Leftrightarrow x - 2 = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 2 + \log_3 5$
2. $2^{x^2-x+8} - 4^{1-3x} = 0.$ (*)
   Nhận xét: Đưa được về lũy thừa của 2 và <u>không có hệ số tự do</u> $\Longrightarrow$ Đưa về dạng cơ bản
   Giải: (*)$\Leftrightarrow 2^{x^2-x+8} - 2^{2-6x} = 0 \Leftrightarrow 2^{x^2-x+8} = 2^{2-6x} \Leftrightarrow x^2 - x + 8 = 2 - 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -6 \end{array}\right.$
3. $25^x - 6.5^x + 5 = 0$ (*) (Đề Thi TN 2009)
   Nhận xét: Đưa được về lũy thừa của 5 và <u>có hệ số tự do</u> $\Longrightarrow$ Đặt ẩn phụ
   Giải: (*)$\Leftrightarrow 5^{2x} - 6.5^x + 5 = 0$. Đặt $t = 5^x\ (t > 0)$
   $$(*) \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1\ (n) \\ t = 5\ (n) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 1 \\ 5^x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right..$$
4. $4^x + 4^{x-2} - 4^{x+1} = 3^x - 3^{x-2} - 3^{x+1}$ (*)
   Nhận xét: Có lũy thừa của cả 3 và 4 và <u>không có hệ số tự do</u> $\Longrightarrow$ Chia cho lũy thừa lớn nhất.
   Giải: (*)$\Leftrightarrow 4^x + \frac{4^x}{16} - 4.4^x = 3^x - \frac{3^x}{9} - 3.3^x$
   $$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{16} - 4\right).4^x = \left(1 - \frac{1}{9} - 3\right).3^x$$

$\Leftrightarrow -\frac{47}{16}.4^x = -\frac{19}{9}.3^x$

$\Leftrightarrow \frac{4^x}{3^x} = \left(-\frac{19}{9}\right):\left(-\frac{47}{16}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{304}{423} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{4}{3}}\frac{304}{423}$

5. $4.9^x + 12^x - 3.16^x = 0$ (*)

Nhận xét: Có lũy thừa của 3 và 4 và <u>không có hệ số tự do</u> $\Longrightarrow$ Chia cho lũy thừa lớn nhất.

Giải: (*) $\Leftrightarrow 4.3^{2x} + 3^x.4^x - 3.4^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow 4.\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 3 = 0$

Đặt $t = (\frac{3}{4})^x > 0$.

(*)$\Leftrightarrow 4.t^2 + t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1\ (l) \\ t = \frac{3}{4}\ (n) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 1.$

6. $12.3^x + 3.15^x - 5^{x+1} = 20$ (*)

Nhận xét: Có lũy thừa của 3 và 5 và <u>có hệ số tự do</u> $\Longrightarrow$ Phân tích thành nhân tử.

Giải: (*) $\Leftrightarrow 12.3^x + 3.3^x.5^x - 5.5^x - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 3.3^x(4 + 5^x) - 5.(5^x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (4 + 5^x)(3.3^x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 + 5^x = 0\ (l) \\ 3.3^x - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3^x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \log_3\frac{5}{3}$

7. $2^x.3^{x^2} = 1$ (*)

Nhận xét: Có lũy thừa của 2 và 3, tuy nhiên chỉ có phép nhân (hoặc chia).

Giải:

(*)$\Leftrightarrow \log_2(2^x.3^{x^2}) = \log_2 1$

$\Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 3^{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x + x^2.\log_2 3 = 0$

$\Leftrightarrow x(1 + x.\log_2 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 1 + x.\log_2 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{1}{\log_2 3} \end{array}\right.$

8. $3^x + 4^x = 5^x$ (*)

Nhận xét: Có lũy thừa của 3,4,5 $\Longrightarrow$ Nhẩm nghiệm.

Giải:

- (*)$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$
- $x = 2$ là nghiệm của (*)

- Giả sử $x > 2$, ta có: $\left.\begin{matrix}(\frac{3}{5})^x < (\frac{3}{5})^2 \\ (\frac{4}{5})^x < (\frac{4}{5})^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ (vô lý)

  $\Rightarrow$ loại $x > 2$
- Giả sử $x < 2$, ta có: $\left.\begin{matrix}(\frac{3}{5})^x > (\frac{3}{5})^2 \\ (\frac{4}{5})^x > (\frac{4}{5})^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ (vô lý)

  $\Rightarrow$ loại $x < 2$
- Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

9. $2^x = 3 - x$ (*)
   - $x = 1$ là nghiệm của (*).
   - Giả sử $x > 1$, ta có: $\left.\begin{matrix}2^x > 2^1 = 2 \\ 3 - x < 3 - 1 = 2\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2^x > 3 - x$ (vô lý)

     $\Rightarrow$ loại $x > 1$
   - Giả sử $x < 1$, ta có: $\left.\begin{matrix}2^x < 2^1 = 2 \\ 3 - x > 3 - 1 = 2\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2^x < 3 - x$ (vô lý)

     $\Rightarrow$ loại $x < 1$
   - Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

BÀI TẬP ÔN TẬP PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1. $36^x - 2^x.3^x - 6 = 0.$
2. $3.\left(\frac{16}{9}\right)^{2x} - 7.\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} + 4 = 0.$
3. $5.\left(\frac{25}{4}\right)^{3(x+3)} - 7.\left(\frac{5}{2}\right)^{3(x+3)} + 2 = 0.$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

1. $3^x\left(3^x + 2\right) + 3^{x+1} + \log_3 81 = 0.$
2. $\left(2^x - 2\right)^2 + 2^x - \log_2 4 = 0.$
3. $\left(3^{2x} - 2\right)^2 + 3^{2x}\left(3^{2x} + 1\right) - 2 = 0$
4. $\left(2^{3x} - 2\right)^2 + 2^{3x} + \log_2 8 = 0$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

1. $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} = 34.15^{2x-x^2}$
2. $3.16^{x+1} + 2.81^{x+1} = 5.36^{x+1}$
3. $6.9^{2x^2-x} - 13.6^{2x^2-x} + 6.4^{2x^2-x} = 0$
4. $25^x + 10^x = 2^{2x+1}$
5. $3^{2x+4} + 45.6^x - 9.2^{2x+2} = 0$
6. $3.16^{-x} + 2.81^{-x} = 5.36^{-x}$
7. $6.9^{\frac{2}{x}} - 13.6^{\frac{2}{x}} + 6.4^{\frac{2}{x}} = 0$
8. $2^{x-1}(2^x + 3^{x-1}) = 9^{x-1}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

1. $4^{x-1}-(0,5)^{3-x}=62$

2. $3^{x+4}-5^{x+3}=3^{x}-5^{x+2}$.

3. $5^{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}=\left(\frac{1}{125}\right)^{x}$.

4. $2^{3x}.3^{x}-2^{3x+1}.3^{x-1}=192$.

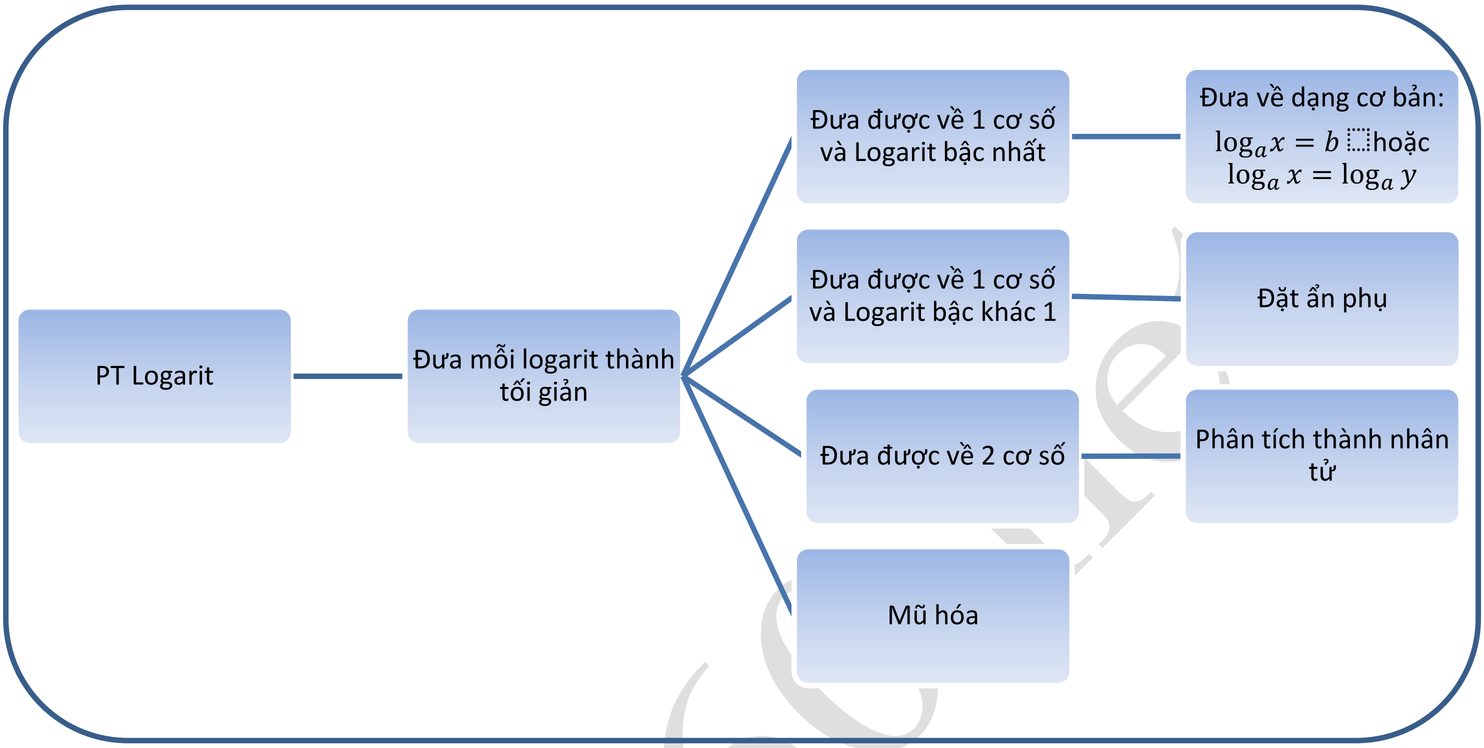
4. $\frac{1}{4-2^{x}}+\frac{2}{2+2^{x}}=1$

5. $\frac{1}{5-5^{2x}}=1-\frac{3}{3+5^{2x}}$

6. $\frac{1}{5-25^{x}}+\frac{2}{1+25^{x}}=1$

7. $\frac{3}{1+3^{-x}}+\frac{2}{3^{1-x}}=\frac{4}{3}$

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT



Ví dụ minh họa:

1. $\log_2(x-2) = 4$ (*)
   ĐK: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
   Giải: (*)$\Leftrightarrow x - 2 = 2^4 = 16 \Leftrightarrow x = 14\ (n)$
2. $\log_4 x + \log_2 \sqrt[3]{x} = 2$ (*)
   ĐK: $\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt[3]{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$
   Nhận xét: Đưa được về logarit cơ số 2 $\Longrightarrow$ Đưa về dạng cơ bản để giải.
   Giải:
   $$(*) \Leftrightarrow \log_{2^2} x + \log_2 x^{\frac{1}{3}} = 2$$
   $$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 2$$
   $$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\log_2 x = 2$$
   $$\Leftrightarrow \frac{5}{6}\log_2 x = 2$$
   $$\Leftrightarrow \log_2 x = \frac{12}{5}$$
   $$\Leftrightarrow x = 2^{\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{2^{12}}\ \text{(nhận)}$$
3. $\log_2 4x^2 - \log_4 2x + 3\log_2 \frac{2}{x} = 0$ (*)
   ĐK: $x > 0$

(*)$\Leftrightarrow$ $\log_2 4 + \log_2 x^2 - (\log_4 2 + \log_4 x) + 3(\log_2 2 - \log_2 x) = 0$

Nhận xét: Đưa được về logarit cơ số 2 $\Longrightarrow$ Đưa về dạng cơ bản để giải.

$\Leftrightarrow 2 + 2\log_2 x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2 x + 3 - 3\log_2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{2} - \frac{3}{2}\log_2 x = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$

4. $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$ (*)

ĐK: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \\ x+7>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-3 \\ x>-7 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$

(*)$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right) = \ln(x+7)$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x+3} = x+7$

$\Leftrightarrow x+1 = (x+3)(x+7)$

$\Leftrightarrow x^2 + 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4\ (l) \\ x=-5\ (l) \end{array}\right.$. Vậy PT VN.

5. $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^3 - \log_3 x + 3 = 0$ (*)

ĐK: $x > 0$

(*) $\Leftrightarrow (\log_3 x)^2 - 3\log_3 x - \log_3 x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3 = 0$

Nhận xét: Đưa được về logarit cơ số 2 và logarit bậc 2 $\Longrightarrow$ Đặt ẩn phụ rồi giải.

Đặt $t = \log_3 x$.

(*)$\Leftrightarrow$ $t^2 - 4t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3\ (n) \\ x = 27\ (n) \end{array}\right.$

6. $\log_3 x + \log_x 3 - \frac{5}{2} = 0$ (*)

ĐK: $\begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

(*)$\Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2} = 0$

Nhận xét: Đưa được về logarit cơ số 3 và logarit bậc -1 $\Longrightarrow$ Đặt ẩn phụ rồi giải.

Đặt $t = \log_3 x$

(*)$\Leftrightarrow t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 1 - \frac{5}{2}t = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3^2 = 9\ (n) \\ x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\ (n) \end{array}\right.$

7. $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$ (*)

ĐK: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 4x \neq 1 \\ 16x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{4} \\ x \neq \frac{1}{16} \end{cases}$

(*)$\Leftrightarrow 3\frac{1}{\log_4 x} + 2\frac{1}{\log_4 4x} + 3\frac{1}{\log_4 16x} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 4 + \log_4 x} + \frac{3}{\log_4 16 + \log_4 x} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{1 + \log_4 x} + \frac{3}{2 + \log_4 x} = 0$

Nhận xét: Đưa được về logarit cơ số 4 và logarit bậc -1

Đặt $t = \log_4 x$

(*)$\Leftrightarrow \frac{3}{t} + \frac{2}{1+t} + \frac{3}{2+t} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3(1+t)(2+t) + 2t(2+t) + 3t(1+t)}{t(1+t)(2+t)} = 0$

$\Leftrightarrow 8t^2 + 16t + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4 x = -\frac{1}{2} \\ \log_4 x = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}}\ (n) \\ x = 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{64}}\ (n) \end{array}\right.$

8. $\frac{1}{4-\log x} + \frac{2}{2+\log x} = 1$ (*)

ĐK: $\begin{cases} \log x \neq 4 \\ \log x \neq -2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 10^4 \\ x \neq 10^{-2} \\ x > 0 \end{cases}$

Đặt $t = \log x$

(*)$\Leftrightarrow \frac{1}{4-t} + \frac{2}{2+t} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{(2+t) + 2(4-t)}{(4-t)(2+t)} = 1$

$\Leftrightarrow -t + 10 = -t^2 + 2t + 8$

$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x = 1 \\ \log x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10\ (n) \\ x = 100\ (n) \end{array}\right.$

9. $\log_3(54 - 3^x) = x$ (*)

ĐK: $54 - 3^x > 0 \Leftrightarrow 3^x < 54$

Nhận xét: Để giải bài toán này, ta lấy 3 lũy thừa 2 vế.

Giải:

(*)$\Leftrightarrow 54 - 3^x = 3^x$

$\Leftrightarrow 54 = 2.3^x$

$\Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3$ (n)

10. $\log_2(3.2^x - 1) = 2x + 1$ (*)

ĐK: $3.2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^x > \frac{1}{3}$

(*)$\Leftrightarrow 3.2^x - 1 = 2^{2x+1}$

$\Leftrightarrow 3.2^x - 1 = 2^{2x}.2$

Đặt $t = 2^x > 0$

$(*) \Leftrightarrow 3t - 1 = 2t^2$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ (n) \\ x = -1 (n) \end{array}\right.$

11. $\ln x . \ln e^2 x = \ln x + \ln e^2 x\ (*)$

ĐK: $x > 0$

$(*) \Leftrightarrow \ln x\,(\ln e^2 + \ln x) = \ln x + \ln e^2 + \ln x$

$\Leftrightarrow \ln x\,(2 + \ln x) = 2\ln x + 2$

Đặt $t = \ln x$

$(*) \Leftrightarrow t(2 + t) = 2t + 2$

$\Leftrightarrow t^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = \sqrt{2} \\ \ln x = -\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = e^{\sqrt{2}}\ (n) \\ x = e^{-\sqrt{2}}\ (n) \end{array}\right.$

12. $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)\ (*)$

ĐK: $2^{x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} > 3$

$(*) \Leftrightarrow \log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3)$

$\Leftrightarrow \log_2(4^x + 4) = \log_2[2^x.(2^{x+1} - 3)]$

$\Leftrightarrow 4^x + 4 = 2^x.(2^{x+1} - 3)$

$\Leftrightarrow 4^x + 4 = 2^{2x+1} - 3.2^x$

Đặt $t = 2^x > 0$

$(*) \Leftrightarrow t^2 + 4 = 2t^2 - 3t$

$\Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1\ (l) \\ t = 4\ (n) \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2(n)$

13. $3x.\log_3 x + 2 = 6x + \log_{27} x^3\ (*)$

ĐK: $x > 0$

$(*) \Leftrightarrow 3x.\log_3 x + 2 = 6x + \log_3 x$

$\Leftrightarrow 3x.\log_3 x + 2 - 6x - \log_3 x = 0$

$\Leftrightarrow 3x.\log_3 x - \log_3 x + 2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow \log_3 x\,(3x - 1) - 2(3x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (3x - 1)(\log_3 x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 0 \\ \log_3 x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}\ (n) \\ x = 9\ (n) \end{array}\right.$

BÀI TẬP ÔN TẬP PHƯƠNG TRÌNH LÔGA RÍT

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2\left[x(x-1)\right] = 1$

b) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$

c) $\log_2(x-2) - 6.\log_{1/8}\sqrt{3x-5} = 2$

d) $\log_2(x-3) + \log_2(x-1) = 3$

e) $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$

f) $\lg(x-2) + \lg(x-3) = 1 - \lg 5$

g) $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)=\frac{2}{3}$

h) $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18$

i) $\log_3(x^2-6)=\log_3(x-2)+1$

k) $\log_2(x+3)+\log_2(x-1)=1/\log_5 2$

l) $\log_4 x+\log_4(10-x)=2$

m) $\log_5(x-1)-\log_{1/5}(x+2)=0$

n) $\log_2(x-1)+\log_2(x+3)=\log_2 10-1$

o) $\log_9(x+8)-\log_3(x+26)+2=0$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{1/3} x=6$

b) $1+\lg(x^2-2x+1)-\lg(x^2+1)=2\lg(1-x)$

c) $\log_4 x+\log_{1/16} x+\log_8 x=5$

d) $2+\lg(4x^2-4x+1)-\lg(x^2+19)=2\lg(1-2x)$

e) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$

f) $\log_{1/2}(x-1)+\log_{1/2}(x+1)=1+\log_{1/\sqrt{2}}(7-x)$

g) $\log_2\log_2 x=\log_3\log_3 x$

h) $\log_2\log_3 x=\log_3\log_2 x$

i) $\log_2\log_3 x+\log_3\log_2 x=\log_3\log_3 x$

k) $\log_2\log_3\log_4 x=\log_4\log_3\log_2 x$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $\log_2(9-2^x)=3-x$

b) $\log_3(3^x-8)=2-x$

c) $\log_7(6+7^{-x})=1+x$

d) $\log_3(4.3^{x-1}-1)=2x-1$

e) $\log_2(9-2^x)=5^{\log_5(3-x)}$

f) $\log_2(3.2^x-1)-2x-1=0$

g) $\log_2(12-2^x)=5-x$

h) $\log_5(26-3^x)=2$

i) $\log_2(5^{x+1}-25^x)=2$

k) $\log_4(3.2^{x+1}-5)=x$

l) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(5^{x+1}-25^x)=-2$

m) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)=-2$

n. $\log_2\left(2^x-1\right).\log_4\left(2^{x+1}-2\right)=1$

u. $\log_5\left(5^x-1\right).\log_{25}\left(5^{x+1}-5\right)=1$

v. $\log_2\left(4.3^x-6\right)-\frac{3}{2}\log_{2\sqrt{2}}\left(9^x-6\right)=1$

w. $\log_5\left(5x^2\right).\log_x^2 5=1$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-5=0$

b) $\log_{\sqrt{2}}^2 x+3\log_2 x+\log_{1/2} x=2$

c) $\log_x 2-\log_4 x+\frac{7}{6}=0$

d) $\log_{\frac{1}{2}}^2 4x+\log_2\frac{x^2}{8}=8$

e) $\log_{\sqrt{2}}^2 x+3\log_2 x+\log_{1/2} x=0$

f) $\log_{x^2} 16+\log_{2x} 64=3$

g) $\log_5 x-\log_x\frac{1}{5}=2$

h) $\log_7 x-\log_x\frac{1}{7}=2$

i) $2\log_5\sqrt{x}-2=\log_x\frac{1}{5}$

k) $3\sqrt{\log_2 x}-\log_2 4x=0$

l) $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$

m) $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = 4/3$

n) $\log_2 \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\log_2 x} = -2/3$

o) $\log_2^2 x + 2\log_4 \dfrac{1}{x} = 0$

p) $\log_2^2(2-x) - 8\log_{1/4}(2-x) = 5$

q) $\log_5^2 x + 4\log_{25} 5x - 5 = 0$

r) $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x = \dfrac{9}{4} + \log_x^2 \sqrt{5}$

s) $\log_{x^2} 3 + \log_9 x = 1$

t) $\dfrac{1}{4 - \lg x} + \dfrac{2}{2 + \lg x} = 1$

u) $\log_{2x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y \; khi \; a > 1$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y \; khi \; 0 < a < 1$
$a^x \geq a^y \Leftrightarrow x \geq y \; khi \; a > 1$	$a^x \geq a^y \Leftrightarrow x \leq y \; khi \; 0 < a < 1$

$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y \; khi \; a > 1$	$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x \leq y \; khi \; 0 < a < 1$
$\log_a x \geq \log_a y \Leftrightarrow x \geq y \; khi \; a > 1$	$\log_a x \geq \log_a y \Leftrightarrow x \leq y \; khi \; 0 < a < 1$

CÁC KĨ NĂNG CẦN LƯU Ý KHI GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH:

1. Khi nhân (hoặc chia) 2 vế của bất phương trình với một số âm → bất phương trình đổi chiều.
2. Khi cộng (hoặc trừ) 2 vế của bất phương trình với 1 số bất kì → bất phương trình không đổi.
3. Khi lấy lũy thừa hoặc logarit 2 vế của bất phương trình:
   a. Nếu cơ số lớn hơn 1 → bất phương trình không đổi.
   b. Nếu cơ số nhỏ hơn 1 → bất phương trình đổi chiều.
   c. Chú ý: Muốn lấy logarit 2 vế thì 2 vế của bpt phải chắc chắn lớn hơn 0.
4. ***Kĩ năng xét dấu đa thức*** (theo quy tắc *trong trái ngoài cùng*).
   Ví dụ: Giải BPT: $-x^3 + x^2 + 4x - 4 > 0$
   Nhận xét: Đa thức $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$ có 3 nghiệm -2;1;2:

x		-2		1		2	
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-
	(qua nghiệm đơn đổi dấu)		(qua nghiệm đơn đổi dấu)		(qua nghiệm đơn đổi dấu)		(cùng dấu a)

   Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$

5. ***Kĩ năng xét dấu phân thức:*** (*Lập bảng xét dấu*)
   Ví dụ: Giải BPT:
   $$\frac{(x^2-9)(x+1)}{4-x^2} \geq 0$$
   Nhận xét: Phân thức $f(x) = \frac{(x^2-9)(x+1)}{4-x^2}$ có các *nghiệm của tử số và mẫu số* lần lượt là $-3; -2; -1; 2; 3$.
   Bảng xét dấu:

x		-3		-2		-1		2		3	
x^2-9	+	0	-	|	-	|	-	|	-	0	+
$x+1$	-	|	-	|	-	0	+	|	+	|	+
$4-x^2$	-	|	-	0	+	|	+	0	-	|	-
$\boldsymbol{f(x)}$	+	**0**	-	||	+	**0**	-	||	+	**0**	-

   Vậy $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ -2 < x \leq -1 \\ 2 < x \leq 3 \end{array}\right.$

BÀI TẬP BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Bài 1: Giải các bất phương trình sau:

1. $3^{x^2-3x+4} > 9$ 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} - \frac{1}{4} \le 0$ 3. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-3x} - \frac{2}{3} \ge 0$

Bài 2: Giải các bất phương trình sau:

1. $2^{x+1} - 16 > 2^x + 8$
2. $2^{x+1} + 9.2^x - 2^{x+2} \le 14\sqrt{2}$
3. $2^x.3^{x+1} + 2^{x+1}.3^x \ge 180$
4. $2^x.5^{x-1} + 2^{x-1}.5^x + 10^x \le 17$

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

1. $9^{2x+\frac{1}{2}} - 6.3^{2x} > 9$
2. $e^{2x} - 2e^x < 3$
3. $4^{2x} - 2^{2x+2} + 3 \ge 0$
4. $2^x + 2^{-x} \le 3$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau:

1. $\left(\frac{4}{9}\right)^x - 5.\left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 \le 0$
2. $5^{2x} + 5^{2-2x} \ge 26$
3. $2\left(\frac{1}{4}\right)^x > 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$
4. $3\left(\frac{1}{9}\right)^x + 1 = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

1. $9^x + 4^x > 2.6^x$
2. $9.9^x - 25.12^x + 16.16^x < 0$
3. $6^{2x} - 3^x.4^x \ge 6.2^{2x}$
4. $5^2.3^{2x} + 3^2.5^{2x} \le 34.15^x$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

1. $\dfrac{2^x - 2}{2^x + 2} > 0$
2. $\dfrac{2^{2x} - 5.2^x + 4}{7^x - 7^2} \le 0$
3. $\dfrac{(3^x - 3)(3^x - 27)}{2^x - 4} \ge 0$
4. $\dfrac{5^x - 5}{3^{2x} - 2.3^x + 1} > 0$

Bài 7: Giải các phương trình sau:

1. $3^{2x^2+2x+1} - 28.3^{x^2+x} + 9 > 0$
2. $2^{2x^2-4x-2} - 4.2^{2x-x^2+1} - 2 < 0$
3. $9^{x^2+x-1} - 10.3^{x^2+x-2} + 1 \ge 0$
4. $9^{x^2-2x} - 2.\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \le 3$
5. $3^{2x+1} - 2^{2x+1} - 5.6^x \ge 0$
6. $2^{3x+1} - 7.2^{2x} + 7.2^x - 2 \le 0$

BÀI TẬP BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Bài 1: Giải các **bất phương trình sau:**

1. $\log_{\frac{1}{2}}(3x-7)>2$ 2. $\log_3(x^2+2x)-1<0$ 3. $\ln(2x-3)\ge\ln(5-6x)$

4. $\lg(x^2+3x+7)>\lg(x^2+10)$ 5. $\log(2x-4)\ge\log(4+6x)$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

1. $\log_3x+\log_9x-\log_{27}x>1$ 2. $\log_4x+\log_2x^2\ge\log_28$

3. $\log_{\sqrt{2}}x^2+\log_2\sqrt[3]{x}\le1-\log_232$ 4. $\log_{\sqrt{3}}x+2\log_3\sqrt[3]{x^2}\ge\log_416$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

1. $\log_4x>1+\log_24x$ 2. $3\log_{\frac{1}{9}}x-3\log_33x<\log_{\frac{1}{2}}2$

3. $2\log_2\frac{x}{4}+\log_4x^4>2\log_416-3\log_{\frac{1}{2}}x$ 4. $2\lg x-3\lg100x\ge2-2\lg10x^2$

5. $\ln x^2+2\ln ex-\ln e^3x\le\ln e$ 6. $3\log x-3\log10x^2>\log100-2\log100x$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

1. $\log_2(x+3)+\log_2(x-1)>\log_25$ 2. $\log_2(x-3)+\log_2(x-1)<3$

3. $\log_2x+\log_2(x-1)\ge1$ 4. $\ln(x+1)+\ln(x+3)\le\ln(x+7)$

Bài 5: Giải các pt sau:

1. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)+1>\log_{\frac{1}{2}}(1+x)$ 2. $\log_{\frac{2}{3}}(2-3x)-\frac{1}{2}\ge\log_{\frac{2}{3}}(1+2x)$

3. $\log_{\frac{1}{3}}2x-2\le\log_{\frac{1}{3}}(4-2x)$ 4. $\log_{\sqrt{2}}(2x-2)\ge\log_{\sqrt{2}}(4-2x)+2$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

1. $\log_2(x+3)+\log_2(x-1)>\log_25$ 2. $\log_2(x-3)+\log_2(x-1)<3$

3. $\log_2x+\log_2(x-1)\ge1$ 4. $\ln(x+1)+\ln(x+3)\le\ln(x+7)$

Bài 7: Giải các pt sau:

1. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)+1>\log_{\frac{1}{2}}(1+x)$ 2. $\log_{\frac{2}{3}}(2-3x)-\frac{1}{2}\ge\log_{\frac{2}{3}}(1+2x)$

3. $\log_{\frac{1}{3}}2x-2\le\log_{\frac{1}{3}}(4-2x)$ 4. $\log_{\sqrt{2}}(2x-2)\ge\log_{\sqrt{2}}(4-2x)+2$

Bài 8: Giải các pt sau:

1. $\log_2^2x>-1+\log_2x^2$ 2. $4\log_9^2x-\log_3x^3<\log_3x-5$

3. $\log_2x(\log_2x-3)\ge2$ 4. $2\log^2x+4\le3\log10x$

5. $\log^2x-10\log_{100}x+6\ge0$ 6. $\lg^2x-2\lg x^3+8>0$

7. $\ln^2x+\ln x^2+3\le0$ 8. $2\ln^2x-3\ln e^2x+\ln e\le0$

Bài 9: Giải các phương trình sau:

1. $\log_3 x+\log_x 3-\frac{5}{2}<0$ 2. $\log_7 x+\log_x 7\ge\log_7 49$ 3. $\log_2 x+\log_x 2>\log_2 4$

Bài 10: Giải các phương trình sau:

1. $\frac{1}{4\text{-}\log_2 x}+\frac{2}{2+\log_2 x}>1$ 2. $\frac{1}{5\text{-}\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}\ge 1$

Bài 11: Giải các phương trình sau:

1. $\log_2\left(8-2^x\right)>x$ 2. $\log_3\left(18-3^x\right)<x$

Bài 12: Giải các phương trình sau:

1. $\log_3\left(3^x-8\right)>2-x$ 2. $\log_2\left(9-2^x\right)+x<3$

3. $\log_7\left(6+7^{-x}\right)-x\ge 1$ 4. $\log_2\left(3.2^x-1\right)-1\le 2x$

Bài 13: Giải các phương trình sau:

1. $\log_2 x.\log_2 2x>2$ 2. $\log_3 x.\log_3 3x<2$

3. $\log_2 x.\log_2 2x\ge\log_2 x+\log_2 4x$ 4. $\ln x.\ln e^2x\le\ln x+\ln e^2x$

Bài 14: Giải các bất phương trình

1. $\frac{\log^2 x-3\log x+3}{\log x-1}<1$ 2. $\log_4(3^x-1).\log_{\frac{1}{4}}\frac{3^x-1}{16}\le\frac{3}{4}$

3. $\log_{2x}64+\log_{x^2}16\ge 3$ 4. $\log_2^4(x)-\log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{8}{3}\right)+9.\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right)<4\log_{\frac{1}{2}}^2(x)$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Giải các hệ phương trình sau.

1. $\begin{cases} x+y=11 \\ \log_2 x+\log_2 y=1+\log_2 15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log(x^2+y^2)=1+\log 8 \\ \log(x+y)-\log(x-y)=\log 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3^x.2^y=972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y=25 \\ \log_2 x-\log_2 y=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3^x+3^y=4 \\ x+y=1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3^{-x}+3^{-y}=\dfrac{4}{9} \\ x+y=3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2^x+5^{x+y}=7 \\ 2^{x-1}.5^{x+y}=5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \log^2 x=\log^2 y+\log^2(xy) \\ \log^2(x-y)+\log x.\log y=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3^{\log x}=4^{\log y} \\ (4x)^{\log 4}=(3y)^{\log 3} \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4^{\log_3 xy}=2+(xy)^{\log_3 2} \\ x^2+y^2-3x-3y=12 \end{cases}$

12. $\begin{cases} y=1+\log_2 x \\ x^y=64 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 9x^2-4y^2=5 \\ \log_5(3x+2y)-\log_3(3x-2y)=1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \log_{27} xy=3\log_{27} x.\log_{27} y \\ \log_3 \dfrac{x}{y}=\dfrac{3\log_3 x}{4\log_3 y} \end{cases}$