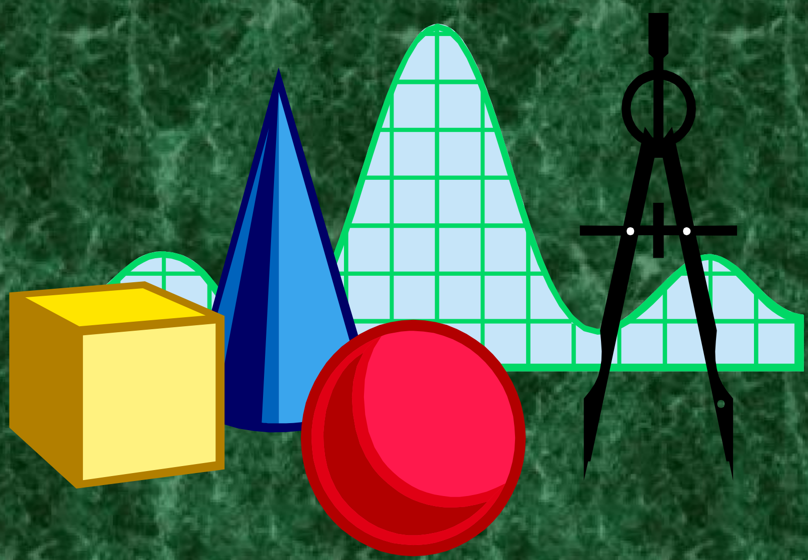
TRƯỜNG THCS VĨNH MỸ B

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG TOÁN 6



GVBM: LÊ PHƯỚC THIỆN

NĂM 2012

CHUYÊN ĐỀ 1: SỐ TỰ NHIÊN.

1. Tập hợp. Phần tử của tập hợp:

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản. Ta hiểu tập hợp thông qua các ví dụ.

- Tên tập hợp được đặt bằng chữ cái in hoa.

- Các phần tử của một tập hợp được viết trong hai dấu ngoặc nhọn { }, cách nhau bởi dấu ";" (nếu có phần tử là số) hoặc dấu ",". Mỗi phần tử được liệt kê một lần, thứ tự liệt kê tùy ý.

- Kí hiệu: $1 \in A$ đọc là 1 thuộc A hoặc 1 là phần tử của A;

$5 \notin A$ đọc là 5 không thuộc A hoặc 5 không là phần tử của A;

- Để viết một tập hợp, thường có hai cách:

+ Liệt kê các phần tử của tập hợp.

+ Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

- Một tập hợp có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử, cũng có thể không có phần tử nào (tức tập hợp rỗng, kí hiệu $\varnothing$.

- Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B thì tập hợp A gọi là tập hợp con của tập hợp B. Kí hiệu: $A \subset B$ đọc là: A là tập hợp con của tập hợp B hoặc A được chứa trong B hoặc B chứa A.

- Mỗi tập hợp đều là tập hợp con của chính nó. Quy ước: tập hợp rỗng là tập hợp con của mọi tập hợp.

**** Cách tìm số tập hợp con của một tập hợp:***

Nếu A có n phần tử thì số tập hợp con của tập hợp A là 2^n.

- Giao của hai tập hợp (kí hiệu: $\cap$) là một tập hợp gồm các phần tử chung của hai tập hợp đó.

2. Tập hợp các số tự nhiên: Kí hiệu N

- Mỗi số tự nhiên được biểu diễn bởi một điểm trên tia số. Điểm biểu diễn số tự nhiên a trên tia số gọi là điểm a.

- Tập hợp các số tự nhiên khác 0 được kí hiệu là N^*.

- Thứ tự trong tập hợp số tự nhiên:

+ Trong hai số tự nhiên khác nhau, có một số nhỏ hơn số kia. Trên hai điểm trên tia số, điểm ở bên trái biểu diễn số nhỏ hơn.

+ Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.

+ Mỗi số tự nhiên có một số liền sau duy nhất, chẳng hạn số tự nhiên liền sau số 2 là số 3; số liền trước số 3 là số 2; số 2 và số 3 là hai số tự nhiên liên tiếp. Hai số tự nhiên liên tiếp thì hơn kém nhau một đơn vị.

+ Số 0 là số tự nhiên nhỏ nhất. Không có số tự nhiên lớn nhất.

+ Tập hợp các số tự nhiên có vô số phần tử.

3. Ghi số tự nhiên: Có nhiều cách ghi số khác nhau:

- Cách ghi số trong hệ thập phân: Để ghi các số tự nhiên ta dùng 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Cứ 10 đơn vị ở một hàng thì làm thành một đơn vị ở hàng liền trước nó.

+ Kí hiệu: $\overline{ab}$ chỉ số tự nhiên có hai chữ số, chữ số hàng chục là a, chữ số hàng đơn vị là b. Viết được $\overline{ab} = a.10 + b$

$\overline{abc}$ chỉ số tự nhiên có ba chữ số, chữ số hàng trăm là a, chữ số hàng chục là b, chữ số hàng đơn vị là c. Viết được $\overline{abc} = a.100 + b.10 + c$

- Cách ghi số La Mã: có 7 chữ số

Kí hiệu	I	V	X	L	C	D	M
Giá trị tương ứng trong hệ thập phân	1	5	10	50	100	500	1000

+ Mỗi chữ số La Mã không viết liền nhau quá ba lần.

+ Chữ số có giá trị nhỏ đứng trước chữ số có giá trị lớn làm giảm giá trị của chữ số có giá trị lớn.

- Cách ghi số trong hệ nhị phân: để ghi các số tự nhiên ta dùng 2 chữ số là : 0 và 1.

- Các ví dụ tách một số thành một tổng:

Trong hệ thập phân: $6478 = 6.\ 10^3 + 4.\ 10^2 + 7.\ 10^1 + 8.\ 10^0$

Trong hệ nhị phân: $1101 = 1.\ 2^3 + 1.\ 2^2 + 0.\ 2^1 + 1.\ 2^0$

4. Các phép toán:

a, Phép cộng: $a + b = c$

(số hạng) + (số hạng) = (tổng)

b, Phép trừ: Cho hai số tự nhiên a và b, nếu có số tự nhiên x sao cho b + x = a thì ta có phép trừ $a - b = x$

(số bị trừ) - (số trừ) = (hiệu)

c, Phép nhân: $a\ .\ b = d$

(thừa số) . (thừa số) = (tích)

d, Phép chia: Cho hai số tự nhiên a và b, trong đó $b \neq 0$, nếu có số tự nhiên x sao cho b.x = a thì ta nói a chia hết cho b và ta có phép chia hết $a : b = x$

(số bị chia) : (số chia) = (thương)

<u>Tổng quát</u>: Cho hai số tự nhiên a và b, trong đó $b \neq 0$, ta luôn tìm được hai số tự nhiên q và r duy nhất sao cho: $a = b\ .\ q + r$ trong đó $0 \le r < b$

(số bị chia) = (số chia) . (thương) + (số dư)

Nếu r = 0 thì ta có phép chia hết.

Nếu $r \neq 0$ thì ta có phép chia có dư.

*** Tính chất của phép cộng và phép nhân số tự nhiên:**

Phép tính Tính chất	Cộng	Nhân
Giao hoán	a + b = b + a	a . b = b . a
Kết hợp	(a + b) + c = a + (b + c)	(a . b) .c = a . (b . c)
Cộng với số 0	a + 0 = 0 + a = a	
Nhân với số 1		a . 1 = 1 . a = a
Phân phối của phép nhân đối với phép cộng	a. (b + c) = ab + ac	

<u>Phát biểu bằng lời:</u>

Tính chất giao hoán:

- *Khi đổi chỗ các số hạng trong một tổng thì tổng không thay đổi.*
- *Khi đổi chỗ các thừa số trong một tích thì tích không đổi.*

Tính chất kết hợp:

- *Muốn cộng một tổng hai số với một số thứ ba, ta có thể cộng số thứ nhất với tổng của số thứ hai và số thứ ba.*
- *Muốn nhân một tích hai số với một số thứ ba, ta có thể nhân số thứ nhất với tích của số thứ hai và số thứ ba.*

Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:

Muốn nhân một số với một tổng, ta có thể nhân số đó với từng số hạng của tổng, rồi cộng các kết quả lại.

e, Chú ý:

+ Trong tính toán có thể thực hiện tương tự với tính chất a(b - c) = ab - ac

+ Dạng tổng quát của số chẵn (số chia hết cho 2) là 2k ($k \in N$), dạng tổng quát của số lẻ (số chia cho 2 dư 1) là 2k + 1 ($k \in N$).

f, Phép nâng lên lũy thừa:

- ĐN: Lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số bằng nhau, mỗi thừa số bằng a.

$$a^n = \underbrace{a.a.....a}_{\text{n thừa số}} \quad (n \neq 0);$$ a gọi là cơ số, n gọi là số mũ.

a^2 gọi là a bình phương (hay bình phương của a);

a^3 gọi là a lập phương (hay lập phương của a)

Quy ước: $a^1 = a$; $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

- Nhân hai lũy thừa cùng cơ số: Khi nhân hai lũy thừa cùng cơ số, ta giữ nguyên cơ số và cộng các số mũ.

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

- Chia hai lũy thừa cùng cơ số: Khi chia hai lũy thừa cùng cơ số (khác 0), ta giữ nguyên cơ số và trừ các số mũ.

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (\text{với } a \neq 0;\ m \geq n)$$

- Thêm: $(a^m)^n = a^{m.n}$; $(a.b)^n = a^n . b^n$

*** Số chính phương**: là số bằng bình phương của một số tự nhiên (VD: 0, 1, 4, 9, ...)

5. Thứ tự thực hiện các phép tính:

- Đối với biểu thức không có dấu ngoặc:

+ Nếu chỉ có phép cộng, trừ hoặc chỉ có phép nhân, chia, ta thực hiện phép tính theo thứ tự từ trái sang phải.

+ Nếu có các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa, ta thực hiện theo thứ tự: Lũy thừa → Nhân và chia → Cộng và trừ.

- Đối với biểu thức có dấu ngoặc ta thực hiện theo thứ tự ( ) → [ ] → { }

6. Tính chất chia hết của một tổng:

- Tính chất 1: Nếu tất cả các số hạng của một tổng đều chia hết cho cùng một số thì tổng chia hết cho số đó.

$a \vdots m,\ b \vdots m,\ c \vdots m \Rightarrow (a + b + c) \vdots m$

- Tính chất 2: Nếu chỉ có một số hạng của tổng không chia hết cho một số, còn các số hạng khác đều chia hết cho số đó thì tổng không chia hết cho số đó.

$a \not\vdots\, m,\ b \vdots m,\ c \vdots m \Rightarrow (a + b + c) \not\vdots\, m$

7. Dấu hiệu chia hết cho 2, 3, 5, 9:

Chia hết cho	Dấu hiệu
2	Chữ số tận cùng là chữ số chẵn
5	Chữ số tận cùng là 0 hoặc 5
9	Tổng các chữ số chia hết cho 9
3	Tổng các chữ số chia hết cho 3

8. Ước và bội:

- Nếu có số tự nhiên a chia hết cho số tự nhiên b thì ta nói a là bội của b, còn b là ước của a.

- Ta có thể tìm các bội của một số bằng cách nhân số đó lần lượt với 0, 1, 2, 3,...

- Ta có thể tìm các ước của a bằng cách lần lượt chia a cho các số tự nhiên từ 1 đến a để xét xem a chia hết cho những số nào, khi đó các số ấy là ước của a

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước là 1 và chính nó. Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn 2 ước.

** Cách kiểm tra 1 số là số nguyên tố:* Để kết luận số a là số nguyên tố (a>1), chỉ cần chứng tỏ rằng nó không chia hết cho mọi số nguyên tố mà bình phương không vượt quá a.

- Phân tích một số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố

** Cách tính số lượng các ước của một số m (m > 1):* ta xét dạng phân tích của số m ra thừa số nguyên tố: Nếu $m = a^x$ thì m có x + 1 ước

Nếu $m = a^x. b^y$ thì m có (x + 1)(y + 1) ước

Nếu $m = a^x. b^y. c^z$ thì m có (x + 1)(y + 1)(z + 1) ước.

- Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.
- Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.
- ƯCLN của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.
- Các số nguyên tố cùng nhau là các số có ƯCLN bằng 1
- Để tìm ước chung của các số đã cho, ta có thể tìm các ước của ƯCLN của các số đó.
- BCNN của hai hay nhiều số là số lớn nhất khác 0 trong tập hợp các bội chung của các số đó.
- Để tìm BC của các số đã cho, ta có thể tìm các bội của BCNN của các số đó.
- Cách tìm ƯCLN và BCNN:

	Tìm ƯCLN	Tìm BCNN
Bước 1	Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố	
Bước 2	Chọn các thừa số nguyên tố	
	Chung	Chung và riêng
Bước 3	Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ:	
	nhỏ nhất	lớn nhất

* Bổ sung:

+ Tích của hai số tự nhiên khác 0 bằng tích của ƯCLN và BCNN của chúng:

$$a . b = ƯCLN(a,b). BCNN(a,b)$$

+ Nếu tích a.b chia hết cho m, trong đó b và m là hai số nguyên tố cùng nhau thì a ⋮ m

+ Một cách khác tìm ƯCLN của hai số a và b (với a > b):

Chia số lớn cho số nhỏ.

Nếu a ⋮ b thì ƯCLN(a,b) = b

- Nếu phép chia a cho b có số dư r_1, lấy b chia cho r_1.
- Nếu phép chia b cho r_1 có số dư r_2, lấy r_1 chia cho r_2.
- Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi số dư bằng 0 thì số chia cuối cùng là ƯCLN phải tìm.

CHUYÊN ĐỀ 2: SỐ NGUYÊN

1. Tập hợp các số nguyên:
- Trong đời sống hàng ngày người ta dùng các số mang dấu "-" và dấu "+" để chỉ các đại lượng có thể xét theo hai chiều khác nhau.
- Tập hợp: {...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...} gồm các số nguyên âm, số 0 và các số nguyên dương là tập hợp các số nguyên. Kí hiệu là Z.
- Các số đối nhau là: 1 và -1; 2 và -2; a và -a;...
- So sánh hai số nguyên a và b: a < b $\Leftrightarrow$ điểm a nằm bên trái điểm b trên trục số.
    + Mọi số nguyên dương đều lớn hơn số 0.
    + Mọi số nguyên âm đều nhỏ hơn số 0.
    + Mọi số nguyên âm đều nhỏ hơn bất kì số nguyên dương nào.

2. Giá trị tuyệt đối của số nguyên a, kí hiệu |a| là khoảng cách từ điểm a đến điểm gốc 0 trên trục số.
- Cách tính: $|a| = \begin{cases} a \text{ nếu } a \geq 0 \\ -a \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$

+ Giá trị tuyệt đối của một số nguyên dương là chính nó.
+ Giá trị tuyệt đối của một số nguyên âm là số đối của nó (và là một số nguyên dương)
+ Trong hai số nguyên âm, số nào có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn thì lớn hơn.
+ Hai số đối nhau có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

3. Cộng hai số nguyên:
- Cộng hai số nguyên cùng dấu: ta cộng hai giá trị tuyệt đối của chúng rồi đặt dấu chung trước kết quả.
- Cộng hai số nguyên khác dấu: ta tìm hiệu hai giá trị tuyệt đối của chúng (số lớn trừ số nhỏ) rồi đặt trước kết quả tìm được dấu của số có giá trị tuyệt đối lớn hơn.
- Tính chất của phép cộng các số nguyên:
    a, Giao hoán: a + b = b + a
    b, Kết hợp: (a + b) + c = a + (b + c)
    c, Cộng với số 0: a + 0 = 0 + a = a
    d, Cộng với số đối: a + (-a) = 0

+ Hai số có tổng bằng 0 là hai số đối nhau.

4. Phép trừ hai số nguyên: a - b = a + (-b)

5. Quy tắc dấu ngoặc:

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu "-" đằng trước, ta phải đổi dấu các số hạng trong dấu ngoặc: dấu "+" thành dấu "-" và dấu "-" thành dấu "+".

Khi bỏ dấu ngoặc có dấu "+" đằng trước thì dấu các số hạng trong ngoặc vẫn giữ nguyên.

6. Tổng đại số: là một dãy các phép tính cộng, trừ các số nguyên.
- Tính chất: trong một tổng đại số, ta có thể:
    + Thay đổi tùy ý vị trí các số hạng kèm theo dấu của chúng.
    + Đặt dấu ngoặc để nhóm các số hạng một cách tùy ý với chú ý rằng nếu trước dấu ngoặc là dấu "-" thì phải đổi dấu tất cả các số hạng trong ngoặc.

7. Quy tắc chuyển vế: Khi chuyển một số hạng từ vế này sang vế kia của một đẳng thức, ta phải đổi dấu số hạng đó: dấu "+" thành dấu "-" và dấu "-" thành dấu "+".

8. Nhân hai số nguyên:
- Nhân hai số nguyên cùng dấu: ta nhân hai giá trị tuyệt đối của chúng.

- Nhân hai số nguyên khác dấu: ta nhân hai giá trị tuyệt đối của chúng rồi đặt dấu "-" trước kết quả nhận được.

- Chú ý: + $a \cdot 0 = 0$

  + Cách nhận biết dấu của tích: $(+) \cdot (+) \rightarrow (+)$
  $(-) \cdot (-) \rightarrow (+)$
  $(+) \cdot (-) \rightarrow (-)$
  $(-) \cdot (+) \rightarrow (-)$

  + $a. b = 0$ thì $a = 0$ hoặc $b = 0$

  + Khi đổi dấu một thừa số thì tích đổi dấu. Khi đổi dấu hai thừa số thì tích không thay đổi.

- Tính chất của phép nhân các số nguyên:

  a, Giao hoán: $a. b = b . a$

  b, Kết hợp: $(a . b) . c = a . (b . c)$

  c, Nhân với 1: $a . 1 = 1 . a = a$

  d, Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng: $a . (b + c) = ab + ac$

  Tính chất trên cũng đúng đối với phép trừ: $a (b - c) = ab - ac$

9. Bội và ước của một số nguyên:

- Cho $a, b \in Z$ và $b \neq 0$. Nếu có số nguyên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a chia hết cho b. Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a.

- Chú ý: + Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0.
  + Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.
  + Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.

- Tính chất: + Nếu a chia hết cho b và b chia hết cho c thì a cũng chia hết cho c.
  + Nếu a chia hết cho b thì bội của a cũng chia hết cho b.
  + Nếu hai số a, b chia hết cho c thì tổng và hiệu của chúng cũng chia hết cho

CHUYÊN ĐỀ: MỘT SỐ BIỆN PHÁP SO SÁNH PHÂN SỐ

A. **Đặt vấn đề:**

Để so sánh hai phân số ngoài cách quy đồng mẫu hoặc tử (các so sánh "hai tích chéo" thực chất là quy đồng mẫu số), trong một số tr- ờng hợp cụ thể, tuỳ theo đặc điểm của các phân số, ta còn có thể so sánh bằng một số ph- ơng pháp khác. Tính chất bắc cầu của thứ tự th- ờng đ- ợc sử dụng, trong đó phát hiện ra phân số trung gian để làm cầu nối là vấn đề quan trọng.

B. Nội dung cần truyền đạt.

I. Kiến thức cơ bản.

1. Dùng số 1 làm trung gian.

a) Nếu $\frac{a}{b} > 1$ và $\frac{c}{d} < 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

b) Nếu $\frac{a}{b} = 1 + M$; $\frac{c}{d} = 1 + N$

mà M>N thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

M và N theo thứ tự gọi là "phần thừa" so với 1 của hai phân số đã cho.

*** Nếu hai phân số có "phần thừa" so với 1 khác nhau, phân số nào có "phần thừa" lớn hơn thì lớn hơn.**

Ví dụ:

$\frac{199}{198} = 1 + \frac{1}{198}$; $\frac{200}{199} = 1 + \frac{1}{199}$

Vì $\frac{1}{198} > \frac{1}{199}$ nên $\frac{199}{198} > \frac{200}{199}$

c) Nếu $\frac{a}{b} = 1 - M$; $\frac{c}{d} = 1 + N$ nếu M > N thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

M và N theo thứ tự gọi là "phần thiếu" hay "phần bù" tới đơn vị của hai phân số đã cho.

*** Nếu hai phân số có "phần bù" tới đơn vị khác nhau, phân số nào có "phần bù" lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn.**

Ví dụ:

$\frac{2005}{2006} = 1 - \frac{1}{2006}$; $\frac{2006}{2007} = 1 + \frac{1}{2007}$

Vì $\frac{1}{2006} > \frac{1}{2007}$ nên $\frac{2005}{2006} < \frac{2006}{2007}$

2. Dùng một số phân số làm trung gian.

Ví dụ : So sánh $\frac{18}{31}$ và $\frac{15}{37}$

Giải: Xét phân số trung gian $\frac{18}{37}$ (Phân số này có tử là tử của phân số thứ nhất, có mẫu là mẫu của phân số thứ 2). Ta thấy:

$\frac{18}{31} > \frac{18}{37}$ và $\frac{18}{37} > \frac{15}{31}$ suy ra $\frac{18}{31} > \frac{15}{37}$ (tính chất bắc cầu)

(Ta cũng có thể lấy phân số $\frac{15}{31}$ làm phân số trung gian).

b) Ví dụ : So sánh $\frac{12}{47}$ và $\frac{19}{17}$

Giải: cả hai phân số $\frac{12}{47}$ và $\frac{19}{77}$ đều xấp xỉ $\frac{1}{4}$ nên ta dùng phân số $\frac{1}{4}$ làm trung gian.

Ta có: $\frac{12}{47} > \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$

$\frac{19}{77} < \frac{19}{76} = \frac{1}{4}$

Suy ra $\frac{12}{47} > \frac{19}{77}$

II. Bài tập áp dụng:

Bài 1: So sánh

a) $\frac{64}{85}$ và $\frac{73}{81}$ b) $\frac{n+1}{n+2}$ và $\frac{n}{n+3}$ ($n \in N^*$)

H- ớng dẫn: b) Dùng phân số $\frac{64}{81}$ (hoặc $\frac{73}{85}$) làm phân số trung gian.

b) dùng phân số $\frac{n+1}{n+3}$ (hoặc $\frac{n}{n+2}$) làm phân số trung gian.

Bài 2: So sánh

a) $\frac{67}{77}$ và $\frac{73}{83}$ b) $\frac{456}{461}$ và $\frac{123}{128}$ c) $\frac{2003.2004-1}{2003.2004}$ và $\frac{2004.2005-1}{2004.2005}$

H- ớng dẫn: Mẫu của hai phân số đều hơn tử cùng một số đơn vị nên ta sử dụng so sánh "phần bù"của hai phân số tới đơn vị .

Bài 3: So sánh:

a) $\frac{11}{12}$ và $\frac{16}{49}$ b) $\frac{58}{89}$ và $\frac{36}{53}$

H- ớng dẫn: a) Hai phân số $\frac{11}{32}$ và $\frac{16}{49}$ đều xấp xỉ $\frac{1}{3}$ nên ta dùng phân số $\frac{1}{3}$ làm trung gian .

b) Hai phân số $\frac{58}{89}$ và $\frac{36}{53}$ đều xấp xỉ $\frac{2}{3}$ nên ta dùng phân số $\frac{2}{3}$ làm phân số trung gian .

Bài 4: So sánh các phân số .

$A = \frac{2535.232323}{353535.2323}$; $B = \frac{3535}{3534}$; $C = \frac{2323}{2322}$

H- ớng dẫn : Rút gọn A = ...= 1

$B = 1 + \frac{1}{3534}$

$C = 1 + \frac{1}{2322}$

Từ đó suy ra : $A < B < C$.

Bài 5: So sánh :

$$A = \frac{5.(11.13-22.26)}{22.26-44.52} \quad \text{và} \quad B = \frac{138^2-690}{137^2-548}$$

H- ớng dẫn : Rút gọn $A = ...= \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$

$B = ...= \frac{138}{137} = 1 + \frac{1}{137}$

Vì $\frac{1}{4} > \frac{1}{137}$ nên $A > B$

Bài 6: So sánh .

a) $\frac{53}{57}$ và $\frac{531}{571}$; b) $\frac{25}{26}$ và $\frac{25251}{26261}$

H- ớng dẫn :

a) $\frac{53}{57} = \frac{530}{570} = 1 - \frac{40}{570}$; $\frac{531}{571} = 1 - \frac{40}{571}$

b) $\frac{25}{26} = 1 + \frac{1}{26} = 1 + \frac{1010}{26260}$; $\frac{25251}{26261} = 1 + \frac{1010}{26261}$

Bài 7: Cho a , b , m $\in$ N*

Hãy so sánh $\frac{a+m}{b+m}$ với $\frac{a}{b}$.

H- ớng dẫn : Ta xét ba tr- ờng hợp $\frac{a}{b} = 1$; $\frac{a}{b} < 1$; $\frac{a}{b} > 1$.

a) Tr- ờng hợp : $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$ thì $\frac{a+m}{b+m} = \frac{a}{b} = 1$

b) Tr- ờng hợp : $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow a + m = b + m$

$\frac{a+m}{b+m} = 1 - \frac{b-a}{b+m}$; $\frac{a}{b} = 1 - \frac{b-a}{b}$

c) Tr- ờng hợp : $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow a+m > b + m \Rightarrow$......

Bài 8: Cho $A = \frac{10^{11}-1}{10^{12}-1}; B = \frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$.

Hãy so sánh A với B.

H- ớng dẫn: Dễ thấy A<1. áp dụng kết quả bài trên nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$ với m>o.

Bài 9:So sánh các phân số sau mà không cần thực hiện các phép tính ở mẫu.

$A = \frac{54.107-53}{53.107+54}$. $B = \frac{135.269-133}{134.269+135}$.

H- ớng dẫn: Tử của phân số A

54.107-53 = (53 +1).107 - 53 =...

Tử của phân số B

135.269-133= (134+1).269 - 133=...

Bài 10: So sánh:

a, $(\frac{1}{80})^7$ với $(\frac{1}{243})^6$.

b, $(\frac{3}{8})^5$ với $(\frac{5}{243})^3$.

H- ớng dẫn:

$$a = (\frac{1}{80})^7 > (\frac{1}{81})^7 = \frac{1}{3^{28}}$$

$$(\frac{1}{243})^6 = \frac{1}{3^{30}}.$$

$$b,\ (\frac{3}{8})^5 = \frac{243}{2^{15}}$$

$$(\frac{5}{243})^3 = \frac{243}{3^{15}}.$$

Chọn phân số $\frac{243}{3^{15}}$ làm phân số trung gian để so sánh.

Bài 11: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+...+\frac{1}{43}+\frac{1}{44} > \frac{5}{6}$.

H- ớng dẫn:

Từ $\frac{5}{6} = \frac{3}{6}+\frac{2}{6} = \frac{15}{30}+\frac{15}{45}$.

$$= (\frac{1}{30}+....+\frac{1}{30}) + (\frac{1}{45}+...+\frac{1}{45}).$$

Từ đó ta thấy:

$\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{29} > \frac{1}{30}+\frac{1}{30}+...+\frac{1}{30}$ (Có 15 phân số).

$\frac{1}{30}+\frac{1}{31}+...+\frac{1}{44} > \frac{1}{45}+\frac{1}{45}+...+\frac{1}{45}$ (Có 15 phân số).

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

PHÉP CHIA HẾT VÀ CHIA CÓ DƯ

I- L□ THUY□T C□N NH□.

1. Định nghĩa.

Với mọi a, b∈N (b≠0) ta luôn tìm đ- ợc số tự nhiên r sao cho

$a = bq + r$ ($0 \leq r < b$)

a là số bị chia, b là số chia, q là th- ơng, r là số d-

- Nếu r = 0 ta đ- ợc phép chia hết, tanói rằng a chia hết cho b (a: ⁝b), hay a là bội của b, hay b chia hết a, hay b là - ớc của a (b/a).
- Nếu r > 0,ta đ- ợc phép chia có d- , ta nói rằng a không chia hết cho b (a⁝:b).

2. Các tính chất về phép chia hết. (10 tính chất)

1) Số 0 chia hết cho mọi số b≠0.
2) Số a chia hết cho mọi a≠0.
3) Nếu a: ⁝b, b: ⁝c thì a⁝c.

4) Nếu a và b cùng chia hết cho m thì a+b và a-b đều chia hết cho m.

5) - Nếu một trong hai số a và b chia hết cho m, số kia không chia hết cho m thì a+b và a-b đều không chia hết cho m.
- Nếu tổng hoặc hiệu hai số chia hết cho m và một trong hai số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m.

6) Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m. Suy ra a ⁝: m thì a^n : ⁝m ($n \in N^*$).

7) Nếu a: ⁝m, b: ⁝n thì ab : ⁝ mn
Suy ra nếu a : ⁝ b thì a^n : ⁝ b^n.

8) Nếu một số chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau thì nó chia hết cho tích của hai số đó.

9) Nếu tích ab chia hết cho m, trong đó b và m là hai số nguyên tố cùng nhau thì a chia hết cho m.

10) Nếu một tích chia hết cho số nguyên tố p thì tồn tại một thừa số của tích chia hết cho p. Suy ra nếu a^n ⁝ p, p là ngyên tố thì a ⁝ p.

3. Các dấu hiệu chia hết. (9 dấu hiệu)

Cho số tự nhiên $M = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$.

1) M⁝ 2 $\Leftrightarrow a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$
2) M⁝5 $\Leftrightarrow a_0 \in \{0; 5\}$
3) M⁝3 $\Leftrightarrow (a_{n-1} + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \vdots 3$
4) M⁝9 $\Leftrightarrow (a_{n-1} + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \vdots 9$
5) M⁝4 $\Leftrightarrow a_1 a_0 \vdots 4$
6) M⁝25 $\Leftrightarrow a_1 a_0 \vdots 25$
7) M⁝8 $\Leftrightarrow a_2 a_1 a_0 \vdots 8$
8) M⁝125 $\Leftrightarrow a_2 a_1 a_0 \vdots 125$
9) M⁝11 $\Leftrightarrow \{(a_0 + a_2 + \ldots) - (a_1 + a_3 + \ldots)\} \vdots 11$
$\Leftrightarrow \{(a_1 + a_3 + \ldots) - (a_0 + a_2 + \ldots)\} \vdots 11$

4. Các ph- ơng pháp giải các bài toán về chia hết.

Có các ph- ơng pháp chính sau:

PP 1.Để chứng minh A(n) chia hết cho một số nguyên tố p,có thể xét mọi tr- ờng hợp về số d- khi chia n cho p

Ví dụ1: Chứng minh rằng $A(n)= n(n^2-+1)(n^2+4) \vdots 5$ với mọi số nguyên n.

Giải: Xét mọi tr- ờng hợp:

Với $n \vdots 5$,rõ ràng $A(n) \vdots 5$

Với $n=5k\pm 1 \Rightarrow n^2= 25k^2 \pm 10 \vdots 5 \Rightarrow A(n) \vdots 5$

Với $n= 5h\pm 2 \Rightarrow n^2= 25k^2 \pm 20k+4 \vdots 5 \Rightarrow n^2+1 \vdots 5 \Rightarrow A(n) \vdots 5$

A(n) là tích của ba thừa số trong mọi tr- ờng hợp đều có một thừa số chia hết cho 5 vậy $A(n) \vdots 5$

PP 2. .Để chứng minh A(n) chia hết cho một hợp số m,ta phân tích m ra thừa số.Giả sử m=p.q.Nếu p và q là số nguyên tố,hay p và q nguyên tố cùng nhau thì ta tìm cách chứng minh $A(n)\vdots p$ và $A(n)\vdots q$(từ đó suy ra $A(n)\vdots p.q=m$).

Ví dụ2: Chứng minh tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6

Giải: Ta có A(n) = n(n+1)(n+2) và 6=2.3(2 và 3 là số nguyên tố),ta tìm cách chứng minh $A(n) \vdots 2$ và $A(n) \vdots 3$

Trong hai số tự nhiên liên tiếp bao giờ cũng có một số chia hết cho 2 vậy $A(n) \vdots 2$

Trong ba số tự nhiên liên tiếp bao giờ cũng có một số chia hết cho 3 vậy $A(n) \vdots 3$

$A(n) \vdots 2$ và $A(n) \vdots 3$ vậy $A(n) \vdots 2.3=6$

Nếu q và p không nguyên tố cùng nhau thì ta phân tích A(n) ra thừa số,chẳng hạn A(n)=B(n).C(n) và tìm cách chứng minh $B(n) \vdots p$ và $C(n)\vdots q$

(suy ra $A(n) =B(n).C(n) \vdots p.q = m$)

Ví dụ 3 Chứng minh rằng tích của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8

Giải: Gọi số chẵn đầu tiên là 2n,số chẵn tiếp theo là 2n+2,tích của chúng sẽ là A(n) = 2n(2n+2) ta có 8=4.2 và A(n) = 2n(2n+2)=4.n(n+1) đây là tích của hai thừa số một thừa số là $4\vdots 4$ và thừa số kia là n(n+1) là tích hai số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 2

Vì vậy $A(n) = 2n(2n+2)=4.n(n+1) \vdots 2.4 =8$

PP 3.Để C/M $A(n) \vdots m$, có thể biến đổi A(n) thành tổng của nhiều số hạng và C/M mỗi số hạng chia hết cho m.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng $n^3-13n \vdots 6$ với mọi n thuộc Z

Giải: Ta phải chứng minh $A(n) = n^3-13n \vdots 6$

Chú ý rằng 13n=12n+n mà $12n\vdots 6$,ta biến đổi A(n) thành

$A(n) = (n^3-n)-12n = n(n^2-1)-12n=(n-1)n(n+1)-12n$

Mà (n-1)n(n+1) là tích của ba số nguyên liên tiếp nên $(n-1)n(n+1) \vdots 6$ (Ví dụ 2)

Và $12n\vdots 6$

Vì vậy $(n-1)n(n+1)-12n\vdots 6$ hay $A(n) = n^3-13n \vdots 6$

PP 4.Để C/M một tổng không chia hết cho m,có thể chứng minh một số hạng của tổng không chia hết cho m còn tất cả các số hạng còn lại chia hết cho m

Ví dụ 5: Chứng minh rằng với mọi số n lẻ :

n^2+4n+5 không chia hết cho 8

Giải: Đặt n=2k+1 (nlẻ) ta có :

$$n^2+4n+5=(2k+1)^2+4(2k+1)+5$$
$$=(4k^2+4k+1+)+(8k+4)+5$$
$$=(4k^2+4k)+(8k+8)+2$$

Đây là tổng của ba số hạng số hạng đầu bằng $(4k^2+4k)=4k(k+1) \vdots 8$ (ví dụ 3),Số hạng thứ hai chia hết cho 8 số hạng thứ ba không chia hết cho 8 vậy tổng trên không chia hết cho 8

PP 5.Ph- ơng pháp phản chứng.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng $a^2 - 8$ không chia hết cho 5 với $a \in N$.

Giải: Chứng minh bằng ph- ơng pháp phản chứng.

Giả sử $A(n)=a^2 - 8 \vdots 5$,nghĩa là A(n) phải có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5, suy ra a^2 (là một số chính ph- ơng) phải có chứ số tận cùng là một trong các chữ số 3;8 - Vô lý(vì một số chính ph- ơng bao giờ cũng có các chữ số tận cùng là:0;1;4;6;9)

Vậy $a^2 - 8$ không chia hết cho 5.

PP 6.Ph- ơng pháp qui nạp.

Ví dụ7: Chứng minh rằng $16^n-15n-1 \vdots 225$

Giải:

Với n=1 thì $16^n-15n-1=16-15-1=0 \vdots 225$

Giả sử $16^k-15k-1 \vdots 225$

Ta chứng minh $16^{k+1}-15(k+1)-1 \vdots 225$

Thực vậy: $16^{k+1}-15(k+1)-1=16.16^k-15^k-15-1$

$$=(16^k-15k-1)+15.16^k-15$$

Theo giả thiết qui nạp $16^k-15k-1 \vdots 225$

Còn $15.16^k-15=15(16^k-1) \vdots 15.15=225$

Vậy $16^n-15n-1 \vdots 225$

PP7 : Nguyên kí Diriclê

II- M□T S□ BÀI TỐP V□ PH□P CHIA H□T VÀ CHIA C□ D- .

Bài 1: Khi chia số a cho số b ta đ- ợc th- ơng là 18 và số d- là 24. Hỏi th- ơng và số d- thay đổi thế nào nếu số bị chia và số chia giảm đi 6 lần.

Giải: Theo định nghĩa của phép chia và theo đề bài ta có:

$a = b18 + 24$ (1) $(b > 24)$

Nếu số bị chia và số chia b giảm đi 6 lần thì từ (1) ta có:

$a: 6 = (b18 + 24) \vdots 6$

$= b18 \vdots 6 + 24 \vdots 6$

$= (b\vdots 6)\ 18 + 4 \qquad (b\vdots 6 > 4)$

Vậy nếu số bị chia và số chia giảm đi 6 lần thì th- ơng không thay đổi còn số d- giảm 6 lần.

Bài 2: Khi chia một số tự nhiên a cho 4 ta đ- ợc số d- là 3 còn khi chia a cho 9 ta đ- ợc số d- là 5. Tìm số d- trong phép chia a cho 36.

Giải: Theo đề bài ta có: $a = 4q_1 + 3 = 9q_2 + 5$

(q_1 và q_2 là th- ơng trong hai phép chia)

Suy ra $\quad a + 13 = 4q_1 + 3 + 13 = 4(q_1 + 4)$ (1)

$\quad\quad\quad\; a + 13 = 9q_2 + 5 + 13 = 9(q_2 + 2)$ (2)

Từ (1)(2) ta nhận thấy a + 13 là bội của 4 và 9 mà (4; 9) = 1 nên alà bội của 4.9 = 36.

Ta có $a + 13 = 36k$ ($k \in N^*$)

$\Rightarrow a = 36k - 13 = 36(k - 1) + 23$

Vậy a chia hết cho 36có số d- là 23.

Bài 4: Tìm các chữ số x, y, z, để số 579xyz chia hết cho 5;7 và 9.

Giải: Vì các số 5; 7; 9 đôi một nguyên tố cùng nhau nên ta phải tìm các chữ số x, y, z sao cho 579xyz chia hết cho 5.7.9 = 315.

Ta có 579xyz= 579000 + xyz = 1838.315 + 30 + xyz

Suy ra 30 + xyz chia hết cho 315

Vì $30 \le 30 + xyz < 1029$ nên:

Nếu $30 + xyz = 315 \Rightarrow xyz = 315 - 30 = 285$

Nếu $30 + xyz = 630 \Rightarrow xyz = 630 - 30 = 600$

Nếu $30 + xyz = 945 \Rightarrow xyz = 945 - 30 = 915$

Vậy $\quad x = 2;\ y = 8;\ z = 5$

$\quad\quad\ x = 6;\ y = 0;\ z = 0$

$x = 9;\ y = 1;\ z = 5$

Bài 5: Tìm $n \in N$ biết 2n + 7 chia hết cho n + 1.

Giải:

Vì $(2n + 7) \vdots (n + 1) \quad \Rightarrow [2n + 7 - 2(n + 1)] \vdots n + 1$

$\Rightarrow 5 \vdots n + 1 \Rightarrow n + 1$ là - ớc của 5

Với $n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0$

Với $n + 1 = 5 \Rightarrow n = 4$

Đáp số: n = 0; n = 4

Bài tập:

1.CMR:

a) $89^{26} - 45^{21} \vdots 2$; $2009^{2008} - 2008^{2009}$ không chia hết cho 2

b) $10^n - 4 \vdots 3$; $9.10^n + 18 \vdots 27$

c) $41^{10} - 1 \vdots 10$; $9^{2n} - 14 \vdots 5$

2.CMR

a) $(a^2-1)a^2 \vdots 12$ với a >1

b) $(n-1)(n+1)n^2(n^2+1) \vdots 60$ với mọi n

(Sử dụng PP 2)

3 CMR với mọi n lẻ:

a) $4^n + 15n - 1 \vdots 9$

b) $10^n + 18n - 28 \vdots 27$

(Gợi ý: dùng qui nạp)

4. Tìm số d- trong phép chia sau:

a)bình ph- ơng của một số lẻ cho 8

b) 2^{1000} cho 5

c) 2^{1000} cho 25

5.Chứng minh rằng với mọi $n \in Z$:

a) $n^2-n \vdots 2$; b)$n^3-n \vdots 3$; c) $n^5-n \vdots 5$

(phân tích thành các tích và áp dụng PP1)

CHUYÊN ĐỀ: TÌM SỐ TẬN CÙNG

Chúng ta xuất phát từ tính chất sau :

Tính chất 1 :

a) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

b) Các số có chữ số tận cùng là 4, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

c) Các số có chữ số tận cùng là 3, 7, 9 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 1.

d) Các số có chữ số tận cùng là 2, 4, 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n (n thuộc N) thì chữ số tận cùng là 6.

Việc chứng minh tính chất trên không cần thiết với lớp 6. Như vậy, muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a.

- Nếu chữ số tận cùng của a là 0, 1, 5, 6 thì x cũng có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6.
- Nếu chữ số tận cùng của a là 3, 7, 9, vì $a^m = a^{4n + r} = a^{4n}.a^r$ với r = 0, 1, 2, 3 nên từ tính chất 1c => chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của a^r.
- Nếu chữ số tận cùng của a là 2, 4, 8, cũng như trường hợp trên, từ tính chất 1d => chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của $6.a^r$.

Bài toán 1 : Tìm chữ số tận cùng của các số :

a) 7^{99} b) 14^{1414} c) 4^{567}

Lời giải :

a) Trước hết, ta tìm số dư của phép chia 99 cho 4 :

$9^9 - 1 = (9 - 1)(9^8 + 9^7 + \dots + 9 + 1)$ chia hết cho 4

=> 99 = 4k + 1 (k thuộc N) => $7^{99} = 7^{4k + 1} = 7^{4k}.7$

Do 7^{4k} có chữ số tận cùng là 1 (theo tính chất 1c) => 7^{99} có chữ số tận cùng là 7.

b) Dễ thấy $14^{14} = 4k$ (k thuộc N) => theo tính chất 1d thì $14^{1414} = 14^{4k}$ có chữ số tận cùng là 6.

c) Ta có $5^{67} - 1$ chia hết cho 4 => $5^{67} = 4k + 1$ (k thuộc N)

=> $4^{567} = 4^{4k + 1} = 4^{4k}.4$, theo tính chất 1d, 4^{4k} có chữ số tận cùng là 6 nên 4^{567} có chữ số tận cùng là 4.

Tính chất sau được => từ tính chất 1.

Tính chất 2 : *Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 1 (n thuộc N) thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.*

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

Bài toán 2 : Tìm chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \dots + 2004^{8009}$.

Lời giải :

Nhận xét : Mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n - 2) + 1}$, n thuộc {2, 3, …, 2004}).

Theo tính chất 2, mọi lũy thừa trong S và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng :
$(2 + 3 + \ldots + 9) + 199.(1 + 2 + \ldots + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 200(1 + 2 + \ldots + 9) + 9 = 9009$.
Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.
Từ tính chất 1 tiếp tục => tính chất 3.

Tính chất 3 :

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 7 ; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 3.

b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 8 ; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ có chữ số tận cùng là 2.

c) Các số có chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9, khi nâng lên lũy thừa bậc 4n + 3 sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

Bài toán 3 : Tìm chữ số tận cùng của tổng $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \ldots + 2004^{8011}$.

Lời giải :

Nhận xét : Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+3}$, n thuộc {2, 3, …, 2004}).
Theo tính chất 3 thì 2^3 có chữ số tận cùng là 8 ; 3^7 có chữ số tận cùng là 7 ; 4^{11} có chữ số tận cùng là 4 ; …
Như vậy, tổng T có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của tổng : $(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 1 + 8 + 7 + 4 = 200(1 + 8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 8 + 7 + 4 = 9019$.
Vậy chữ số tận cùng của tổng T là 9.
* Trong một số bài toán khác, việc tìm chữ số tận cùng dẫn đến lời giải khá độc đáo.

Bài toán 4 : Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000}.

Lời giải : 1995^{2000} tận cùng bởi chữ số 5 nên chia hết cho 5. Vì vậy, ta đặt vấn đề là liệu $n^2 + n + 1$ có chia hết cho 5 không ?
Ta có $n^2 + n = n(n + 1)$, là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chữ số tận cùng của $n^2 + n$ chỉ có thể là 0 ; 2 ; 6 => $n^2 + n + 1$ chỉ có thể tận cùng là 1 ; 3 ; 7 => $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5.
Vậy không tồn tại số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1$ chia hết cho 1995^{2000}.
Sử dụng tính chất *"một số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9"*, ta có thể giải được bài toán sau :

Bài toán 5 : Chứng minh rằng các tổng sau không thể là số chính phương :
a) $M = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ (với k chẵn)
b) $N = 2004^{2004k} + 2003$
Sử dụng tính chất *"một số nguyên tố lớn hơn 5 chỉ có thể tận cùng bởi các chữ số 1 ; 3 ; 7 ; 9"*, ta tiếp tục giải quyết được bài toán :

Bài toán 6 : Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng : $p^{8n} + 3.p^{4n} - 4$ chia hết cho 5.

* Các bạn hãy giải các bài tập sau :

Bài 1 : Tìm số dư của các phép chia :

a) $2^1 + 3^5 + 4^9 + \ldots + 2003^{8005}$ cho 5

b) $2^3 + 3^7 + 4^{11} + \ldots + 2003^{8007}$ cho 5

Bài 2 : Tìm chữ số tận cùng của X, Y :

$X = 2^2 + 3^6 + 4^{10} + \ldots + 2004^{8010}$

$Y = 2^8 + 3^{12} + 4^{16} + \ldots + 2004^{8016}$

Bài 3 : Chứng minh rằng chữ số tận cùng của hai tổng sau giống nhau :

$U = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \ldots + 2005^{8013}$

$V = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \ldots + 2005^{8015}$

Bài 4 : Chứng minh rằng không tồn tại các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn :

$19^x + 5^y + 1980z = 1975^{430} + 2004$.

* Các bạn thử nghiên cứu các tính chất và phương pháp tìm nhiều hơn một chữ số tận cùng của một số tự nhiên, chúng ta sẽ tiếp tục trao đổi về vấn đề này.

*** Tìm hai chữ số tận cùng**

Nhận xét : Nếu $x \in N$ và $x = 100k + y$, trong đó $k ; y \in N$ thì hai chữ số tận cùng của x cũng chính là hai chữ số tận cùng của y.

Hiển nhiên là $y \le x$. Như vậy, để đơn giản việc tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên x thì thay vào đó ta đi tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên y (nhỏ hơn).

Rõ ràng số y càng nhỏ thì việc tìm các chữ số tận cùng của y càng đơn giản hơn.

Từ nhận xét trên, ta đề xuất phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau :

Trường hợp 1 : Nếu a chẵn thì $x = a^m \vdots 2^m$. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} \vdots 25$.

Viết $m = p^n + q$ ($p ; q \in N$), trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q \vdots 4$ ta có :

$x = a^m = a^q(a^{pn} - 1) + a^q$.

Vì $a^{n-1} \vdots 25 \Rightarrow a^{pn} - 1 \vdots 25$. Mặt khác, do $(4, 25) = 1$ nên $a^q(a^{pn} - 1) \vdots 100$.

Vậy hai chữ số tận cùng của am cũng chính là hai chữ số tận cùng của aq. Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của aq.

Trường hợp 2 : Nếu a lẻ , gọi n là số tự nhiên sao cho $a^{n-1} \vdots 100$.

Viết $m = u^n + v$ ($u ; v \in N$, $0 \le v < n$) ta có :

$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v$.

Vì $a^n - 1 \vdots 100 \Rightarrow a^{un} - 1 \vdots 100$.

Vậy hai chữ số tận cùng của a^m cũng chính là hai chữ số tận cùng của a^v. Tiếp theo, ta tìm hai chữ số tận cùng của a^v.

Trong cả hai trường hợp trên, chìa khóa để giải được bài toán là chúng ta phải tìm được số tự nhiên n. Nếu n càng nhỏ thì q và v càng nhỏ nên sẽ dễ dàng tìm hai chữ số tận cùng của a^q và a^v.

Bài toán 7 :

Tìm hai chữ số tận cùng của các số :

a) a^{2003} b) 7^{99}

Lời giải : a) Do 2^{2003} là số chẵn, theo trường hợp 1, ta tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $2^n - 1 \vdots 25$.
Ta có $2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} + 1 = 1025 \vdots 25 \Rightarrow 2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1) \vdots 25 \Rightarrow 2^3(2^{20} - 1) \vdots 100$. Mặt khác :
$2^{2003} = 2^3(2^{2000} - 1) + 2^3 = 2^3((2^{20})^{100} - 1) + 2^3 = 100k + 8$ ($k \in N$).
Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{2003} là 08.
b) Do 7^{99} là số lẻ, theo trường hợp 2, ta tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho $7^n - 1 \vdots 100$.
Ta có $7^4 = 2401 \Rightarrow 74 - 1 \vdots 100$.
Mặt khác : $9^9 - 1 \vdots 4 \Rightarrow 9^9 = 4k + 1$ ($k \in N$)
Vậy $7^{99} = 7^{4k+1} = 7(7^{4k} - 1) + 7 = 100q + 7$ ($q \in N$) tận cùng bởi hai chữ số 07.
Bài toán 8 :
Tìm số dư của phép chia 3^{517} cho 25.
Lời giải : Trước hết ta tìm hai chữ số tận cùng của 3^{517}. Do số này lẻ nên theo trường hợp 2, ta phải tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $3^n - 1 \vdots 100$.
Ta có $3^{10} = 9^5 = 59049 \Rightarrow 3^{10} + 1 \vdots 50 \Rightarrow 3^{20} - 1 = (3^{10} + 1)(3^{10} - 1) \vdots 100$.
Mặt khác : $5^{16} - 1 \vdots 4 \Rightarrow 5(5^{16} - 1) \vdots 20$
$\Rightarrow 5^{17} = 5(5^{16} - 1) + 5 = 20k + 5 \Rightarrow 3^{517} = 3^{20k+5} = 3^5(3^{20k} - 1) + 3^5 = 3^5(3^{20k} - 1) + 243$, có hai chữ số tận cùng là 43.
Vậy số dư của phép chia 3^{517} cho 25 là 18.
Trong trường hợp số đã cho chia hết cho 4 thì ta có thể tìm theo cách gián tiếp. Trước tiên, ta tìm số dư của phép chia số đó cho 25, từ đó suy ra các khả năng của hai chữ số tận cùng. Cuối cùng, dựa vào giả thiết chia hết cho 4 để chọn giá trị đúng.
Các thí dụ trên cho thấy rằng, nếu a = 2 hoặc a = 3 thì n = 20 ; nếu a = 7 thì n = 4.
Một câu hỏi đặt ra là : Nếu a bất kì thì n nhỏ nhất là bao nhiêu ? Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).
Tính chất 4 : Nếu $a \in N$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{20} - 1 \vdots 25$.
Bài toán 9 : Tìm hai chữ số tận cùng của các tổng :
a) $S_1 = 1^{2002} + 2^{2002} + 3^{2002} + ... + 2004^{2002}$
b) $S_2 = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + ... + 2004^{2003}$
Lời giải :
a) Dễ thấy, nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4 ; nếu a lẻ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 4 ; nếu a chia hết cho 5 thì a^2 chia hết cho 25.
Mặt khác, từ tính chất 4 ta suy ra với mọi $a \in N$ và $(a, 5) = 1$ ta có a100 - 1 $\vdots$ 25.
Vậy với mọi $a \in N$ ta có $a^2(a^{100} - 1) \vdots 100$.
Do đó $S_1 = 1^{2002} + 2^2(2^{2000} - 1) + ... + 2004^2(2004^{2000} - 1) + 2^2 + 3^2 + ... + 2004^2$.
Vì thế hai chữ số tận cùng của tổng S_1 cũng chính là hai chữ số tận cùng của tổng $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 2004^2$. áp dụng công thức :
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$
$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + ... + 2004^2 = 2005 \times 4009 \times 334 = 2684707030$, tận cùng là 30.
Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_1 là 30.

b) Hoàn toàn tương tự như câu a, $S_2 = 1^{2003} + 2^3(2^{2000} - 1) + ... + 2004^3(2004^{2000} - 1) + 2^3 + 3^3 + 2004^3$. Vì thế, hai chữ số tận cùng của tổng S_2 cũng chính là hai chữ số tận cùng của $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 2004^3$.
áp dụng công thức :

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

=> $1^3 + 2^3 + ... + 2004^3 = (2005 \text{ x } 1002)^2 = 4036121180100$, tận cùng là 00.
Vậy hai chữ số tận cùng của tổng S_2 là 00.
Trở lại bài toán 5 (TTT2 số 15), ta thấy rằng có thể sử dụng việc tìm chữ số tận cùng để nhận biết một số không phải là số chính phương. Ta cũng có thể nhận biết điều đó thông qua việc tìm hai chữ số tận cùng.
Ta có tính chất sau đây (bạn đọc tự chứng minh).
Tính chất 5 : Số tự nhiên A không phải là số chính phương nếu :
+ A có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8 ;
+ A có chữ số tận cùng là 6 mà chữ số hàng chục là chữ số chẵn ;
+ A có chữ số hàng đơn vị khác 6 mà chữ số hàng chục là lẻ ;
+ A có chữ số hàng đơn vị là 5 mà chữ số hàng chục khác 2 ;
+ A có hai chữ số tận cùng là lẻ.
Bài toán 10 : Cho n Є N và n - 1 không chia hết cho 4. Chứng minh rằng $7^n + 2$ không thể là số chính phương.
Lời giải : Do n - 1 không chia hết cho 4 nên n = 4k + r (r Є {0, 2, 3}). Ta có $7^4 - 1 = 2400 \vdots 100$. Ta viết $7^n + 2 = 7^{4k+r} + 2 = 7^r(7^{4k} - 1) + 7^r + 2$.
Vậy hai chữ số tận cùng của $7^n + 2$ cũng chính là hai chữ số tận cùng của $7^r + 2$ (r = 0, 2, 3) nên chỉ có thể là 03, 51, 45. Theo tính chất 5 thì rõ ràng $7^n + 2$ không thể là số chính phương khi n không chia hết cho 4.
*** Tìm ba chữ số tận cùng**
Nhận xét : Tương tự như trường hợp tìm hai chữ số tận cùng, việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 1000.
Nếu x = 1000k + y, trong đó k ; y Є N thì ba chữ số tận cùng của x cũng chính là ba chữ số tận cùng của y ($y \le x$).
Do 1000 = 8 x 125 mà (8, 125) = 1 nên ta đề xuất phương pháp tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$ như sau :
Trường hợp 1 : Nếu a chẵn thì $x = a^m \vdots 2^m$. Gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1 \vdots 125$.
Viết $m = p^n + q$ (p ; q Є N), trong đó q là số nhỏ nhất để $a^q \vdots 8$ ta có :
$x = a^m = a^q(a^{pn} - 1) + a^q$.
Vì $a^n - 1 \vdots 125$ => $a^{pn} - 1 \vdots 125$. Mặt khác, do (8, 125) = 1 nên $a^q(a^{pn} - 1) \vdots 1000$.
Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^q. Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của a^q.
Trường hợp 2 : Nếu a lẻ , gọi n là số tự nhiên sao cho $a^n - 1 \vdots 1000$.
Viết $m = u^n + v$ (u ; v Є N, $0 \le v < n$) ta có :
$x = a^m = a^v(a^{un} - 1) + a^v$.
Vì $a^n - 1 \vdots 1000$ => $a^{un} - 1 \vdots 1000$.

Vậy ba chữ số tận cùng của a^m cũng chính là ba chữ số tận cùng của a^v. Tiếp theo, ta tìm ba chữ số tận cùng của a^v.
Tính chất sau được suy ra từ tính chất 4.

Tính chất 6 :

Nếu a Є N và (a, 5) = 1 thì $a^{100} - 1 \vdots 125$.

Chứng minh : Do $a^{20} - 1$ chia hết cho 25 nên $a^{20}, a^{40}, a^{60}, a^{80}$ khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

$\Rightarrow a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1 \vdots 5$.Vậy $a^{100} - 1 = (a^{20} - 1)(a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1) \vdots 125$.

Bài toán 11 :

Tìm ba chữ số tận cùng của 123^{101}.

Lời giải : Theo *tính chất 6*, do (123, 5) = 1 => $123^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).
Mặt khác :
$123^{100} - 1 = (123^{25} - 1)(123^{25} + 1)(123^{50} + 1) \Rightarrow 123^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).
Vì (8, 125) = 1, từ (1) và (2) suy ra : $123^{100} - 1$ chi hết cho 1000
$\Rightarrow 123^{101} = 123(123^{100} - 1) + 123 = 1000k + 123$ (k ∩ N).
Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 123.

Bài toán 12 :

Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$.

Lời giải : Theo *tính chất 6*, do (9, 5) = 1 => $9^{100} - 1$ chi hết cho 125 (1).
Tương tự bài 11, ta có $9^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).
Vì (8, 125) = 1, từ (1) và (2) suy ra : $9^{100} - 1 \vdots 1000$
$\Rightarrow 3^{399...98} = 9^{199...9} = 9^{100p + 99} = 9^{99}(9^{100p} - 1) + 9^{99} = 1000q + 9^{99}$ (p, q Є N).
Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của 9^{99}.
Lại vì $9^{100} - 1 \vdots 1000$ => ba chữ số tận cùng của 9^{100} là 001 mà $9^{99} = 9^{100} : 9$ => ba chữ số tận cùng của 9^{99} là 889 (dễ kiểm tra chữ số tận cùng của 9^{99} là 9, sau đó dựa vào phép nhân $\overline{??9} \times 9 = \overline{...001}$ để xác định $\overline{??9} = 889$).
Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399...98}$ là 889.
Nếu số đã cho chia hết cho 8 thì ta cũng có thể tìm ba chữ số tận cùng một cách gián tiếp theo các bước : Tìm dư của phép chia số đó cho 125, từ đó suy ra các khả năng của ba chữ số tận cùng, cuối cùng kiểm tra điều kiện chia hết cho 8 để chọn giá trị đúng.

Bài toán 13 :

Tìm ba chữ số tận cùng của 2004^{200}.

Lời giải : do (2004, 5) = 1 (*tính chất 6*)
$\Rightarrow 2004^{100}$ chia cho 125 dư 1
$\Rightarrow 2004^{200} = (2004^{100})^2$ chia cho 125 dư 1
$\Rightarrow 2004^{200}$ chỉ có thể tận cùng là 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876. Do 2004^{200} chia hết cho 8 nên chỉ có thể tận cùng là 376.
Từ phương pháp tìm hai và ba chữ số tận cùng đã trình bày, chúng ta có thể mở rộng để tìm nhiều hơn ba chữ số tận cùng của một số tự nhiên.
Sau đây là một số bài tập vận dụng :

Bài 1 : Chứng minh $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4.

Bài 2 : Chứng minh $9^{20002003}$, $7^{20002003}$ có chữ số tận cùng giống nhau.
Bài 3 : Tìm hai chữ số tận cùng của :
a) 3^{999} b) 11^{1213}
Bài 4 : Tìm hai chữ số tận cùng của :
$S = 2^3 + 2^{23} + ... + 2^{40023}$
Bài 5 : Tìm ba chữ số tận cùng của :
$S = 1^{2004} + 2^{2004} + ... + 2003^{2004}$
Bài 6 : Cho (a, 10) = 1. Chứng minh rằng ba chữ số tận cùng của a^{101} cũng bằng ba chữ số tận cùng của a.
Bài 7 : Cho A là một số chẵn không chia hết cho 10. Hãy tìm ba chữ số tận cùng của A^{200}.
Bài 8 : Tìm ba chữ số tận cùng của số :
$1993^{19941995 ...2000}$
Bài 9 : Tìm sáu chữ số tận cùng của 5^{21}.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM X, Y NGUYÊN

I/ PH□□NG PH□P D□NG T□NH CH□T CHIA H□T:

1/ Ph- ơng pháp phát hiện tính chia hết:

<u>Ví dụ 1</u>:

$$3x + 17y = 159 \quad (1)$$

<u>Giải</u>:

Giả sử x, y là các số nguyên thoả mãn (1). Ta thấy 159 và 3x đều chia hết cho 3 nên 17y cũng chia hết cho 3, do đó y chia hết cho 3 (vì 17 và 3 nguyên tố cùng nhau)

Đặt y = 3t (t là số nguyên). Thay vào (1), ta đ- ợc:

$$3x + 17.3t = 159$$

$$\Leftrightarrow x + 17t = 53$$

$$\Rightarrow x = 53 - 17t$$

Do đó $\begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases} \quad (t \in Z)$

Đảo lại thay các biểu thức của x và y vào (1) đ- ợc nghiệm đúng.

Vậy (1) có vô số (x; y) nguyên đ- ợc biểu thị bởi công thức:

$$\begin{cases} x = 53 - 17t \\ y = 3t \end{cases} \quad (t \in Z)$$

2/ Ph- ơng pháp đ- a về ph- ơng trình - ớc số:

<u>Ví dụ 2</u>: Tìm x,y nguyên thoả mãn :

$$x.y - x - y = 2$$

<u>Giải</u>:

Ta có: $x.y - x - y = 2 \Leftrightarrow x.(y - 1) - y = 2$

$$\Leftrightarrow x.(y - 1) - (y - 1) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x - 1).(y - 1) = 3$$

Do x, y là các số nguyên nên x - 1, y - 1 cũng là các số nguyên và là - ớc của 3. Suy ra các tr- ờng hợp sau:

$$\begin{cases} x - 1 = 3 \\ y - 1 = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 1 = 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x - 1 = -1 \\ y - 1 = -3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x - 1 = -3 \\ y - 1 = -1 \end{cases}$$

Giải các hệ này ta có các cặp : (4; 2), (2; 4), (0; -2), (-2; 0)

3/ Ph- ơng pháp tách ra giá trị nguyên:

<u>Ví dụ 3</u>: Tìm x,y nguyên ở ví dụ 2 bằng cách khác

<u>Giải</u>:

Ta có: $x.y - x - y = 2$

$$\Leftrightarrow x.(y-1) = y+2$$

Ta thấy $y \neq 1$ (vì nếu y=1 thì x.0 = 3 (không có giá trị x,y nào thoả mãn)

Do đó $x = \dfrac{y+2}{y-1} = 1 + \dfrac{3}{y-1}$

Do x nguyên nên $\dfrac{3}{y-1}$ nguyên. => y-1 là - ớc của 3 => y-1=3; y-1=-3; y-1=1; y-1=-1

Ta cũng có đáp số nh- ở ví dụ 2

II/ PH□□NG PH□P X□T S□ D□ T□NG V□:

Ví dụ 4: Chứng minh rằng không có x,y nguyên nào thoả mãn các biểu thức sau:

a/ $x^2 - y^2 = 1998$

b/ $x^2 + y^2 = 1999$

Giải:

a/ Ta thấy x^2 ; y^2 chia cho 4 chỉ có số d- là: 0 ; 1

nên $x^2 - y^2$ chia cho 4 có số d- là : 0 ; 1 ; 3 còn vế phải 1998 chia cho 4 d- 2. Vậy biểu thức không có giá trị nguyên nào thoả mãn.

b/ T- ơng tự ta có $x^2 + y^2$ chia cho 4 có số d- là : 0; 1; 2 còn vế phải 1999 chia cho 4 d- 3

Vậy biểu thức không có giá trị nguyên nào thoả mãn

Ví dụ 5: Tìm x,y nguyên thoả mãn :

$$9x + 2 = y^2 + y \quad (1)$$

Giải:

Ta có ph- ơng trình (1) $\Leftrightarrow$ 9x+2 = y(y+1)

Ta thấy vế trái của ph- ơng trình là số chia cho 3 d- 2 nên y.(y+1) chia cho 3 cũng d- 2.

Chỉ có thể: y = 3k+1; y+1 = 3k+2 ($k \in Z$)

Khi đó: 9x+2 = (3k+1).(3k+2)

$$\Leftrightarrow 9x = 9k.(k+1)$$

$$\Leftrightarrow x = k.(k+1)$$

Thử lại:

x= k.(k+1); y = 3k+1 thoả mãn ph- ơng trình đã cho.

Vậy ph- ơng trình (1) có nghiệm tổng quát:

$$\begin{cases} x = k.(k+1) \\ y = 3k+1 \end{cases} \qquad (k \in Z)$$

III/ PH□□NG PH□P D□NG B□T □□NG TH□C:

1. Ph- ơng pháp sắp thứ tự các ẩn:

Ví dụ 6: Tìm 3 số nguyên d- ơng sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng

Giải:

Gọi các số nguyên d- ơng phải tìm là x, y, z. Ta có: x + y + z = x.y.z (1)

Do x, y, z có vai trò nh- nhau ở trong ph- ơng trình (1) nên có thể sắp thứ tự các ẩn nh- sau:

$1 \le x \le y \le z$

Do đó : x.y.z = x + y +z $\le 3z$

Chia cả hai vế cho số d- ơng z ta đ- ợc: x.y ≤ 3

Do đó: x.y = $\{1;2;3\}$

+Với x.y =1 => x=1, y=1thay vào (1)ta đ- ợc 2 +z = z loại

+Với x.y = 2 =>x=1, y=2 thay vào (1) ta đ- ợc x = 3

+Với x.y = 3 => x=1, y=3 thay vào (1) ta đ- ợc z = 2 loại vì trái với sắp xếp $y \le z$

Vậy ba số phải tìm là 1; 2; 3

2. Ph- ơng pháp xét từng khoảng giá trị của ẩn:

<u>Ví dụ 7</u>: Tìm x,y nguyên thoả mãn :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$$

<u>Giải</u>:

Do vai trò bình đẳng của x và y. Giả sử $x \ge y$, dùng bất đẳng thức để giới hạn khoảng giá trị của số nhỏ y

Ta có:

$$\frac{1}{y}<\frac{1}{3} \Rightarrow y>3 \quad (1)$$

Mặt khác do $x \ge y \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \le \frac{1}{y}$

Do đó

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le \frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y} \Rightarrow \frac{2}{y} \ge \frac{1}{3} \quad \text{nên } y \le 6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $3<y \le 6$. Do $y \in Z^{+} \Rightarrow y=\{4;5;6\}$

+Với y =4 ta đ- ợc: $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \Rightarrow x=12$

+ Với y = 5 ta đ- ợc: $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ loại vì x không là số nguyên

+ Với y = 6 ta đ- ợc: $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6} \Rightarrow x=6$

Vậy các nghiệm nguyên d- ơng của ph- ơng trình là: (4; 12), (12; 4) , (6; 6)

3/ Ph- ơng pháp chỉ ra nghiệm nguyên:

<u>Ví dụ 8</u>: Tìm số tự nhiên x sao cho $2^x+3^x=5^x$

<u>Giải</u>:

Chia hai vế cho 5^x, ta đ- ợc:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1 \quad (1)$$

+Với $x=0 \Rightarrow$ vế trái của (1) bằng 2 (loại)

+ Với x = 1 thì vế trái của (1) bằng 1 (đúng)

+ Với $x \ge 2$ thì:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x<\frac{2}{5};\left(\frac{3}{5}\right)^x<\frac{3}{5}$$

Nên: $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x<\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=1$ (loại)

Vậy x = 1

IV/ PH□□NG PH□P D□NG T□NH CH□T C□A M□T S□ CH□NH PH□□NG:

1/Sử dụng tính chất chia hết của một số chính ph- ơng:

- Các tính chất th- ờng dùng:
    1. số chính ph- ơng không tận cùng bằng 2, 3, 7, 8
    2. Số chính ph- ơng chia hết cho số nguyên tố p thì chia hết cho p^2
    3. Số chính ph- ơng chia cho 3 thì có số d- là 0; 1, chia cho 4 có số d- là 0; 1, chia cho 8 có số d- là 0; 1; 4

Ví du 11:

Tìm các số nguyên x để 9x+5 là tích của hai số nguyên liên tiếp

Giải:

Giả sử $9x+5 = n(n+1)$ với n nguyên thì $36x+20 = 4n^2+4n$

$\Rightarrow 36x+21= 4n^2+4n+1$

$\Rightarrow 3(12x+7) = (2n+1)^2$ (1)

Từ (1) => $(2n+1)^2 \vdots 3$, do 3 là số nguyên tố => $(2n+1)^2 \vdots 9$

Mặt khác ta có 12x+7 không chia hết cho 3 nên 3(12x+7) không chia hết cho 9

Vậy chứng tỏ không tồn tại số nguyên x để 9x+5 là tích của hai số nguyên liên tiếp.

***2/ Tạo ra bình ph- ơng đúng*:**

Ví du 12:

Tìm x,y nguyên thoả mãn :

$$2x^2+4x+2 = 21-3y^2 \quad (1)$$

Giải:

Ph- ơng trình (1) $2(x+1)^2 = 3(7-y^2)$ (2)

Ta thấy vế trái chia hết cho 2 => $3(7-y^2) \vdots 2 \Rightarrow 7-y^2 \vdots 2 \Rightarrow y$ lẻ

Ta lại có $7-y^2 \geq 0$ (vì vế trái ≥ 0) nên chỉ có thể $y^2 = 1$.

Khi đó ph- ơng trình (2) có dạng $2(x^2+1) = 18 \Rightarrow x+1 = \pm 3 \Rightarrow x = \{-4;2\}$.

Các cặp số (2; 1), (2; -1), (-4; 1), (-4; -1) thoả mãn ph- ơng trình (2) nên là nghiệm của ph- ơng trình đã cho.

3/ Xét các số chính ph- ơng liên tiếp:

Hiển nhiên giữa hai số chính ph- ơng liên tiếp không có số chính ph- ơng. Do đó với mọi số nguyên a, x ta có:

1. Không tồn tại x để $a^2<x^2<(a+1)^2$
2. Nếu $a^2<x^2<(a+2)^2$ thì $x^2=(a+1)^2$

Ví du 13:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên k cho tr- ớc không tồn tại số nguyên d- ơng x sao cho $x(x+1) = k(k+2)$

Giải:

Giả sử $x(x+1) = k(k+2)$ với k nguyên, x nguyên d- ơng.

Ta có $x^2+x = k^2+2k$ => $x^2+x+1 = k^2+2k+1 = (k+1)^2$

Do $x>0$ nên $x^2<x^2+x+1 = (k+1)^2$ (1)

Cũng do $x>0$ nên $(k+1)^2 = x^2+x+1 < x^2+2x+1 = (x+1)^2$ (2)

Từ (1) và (2) => $x^2 < (k+1)^2 < (x+1)^2$ Vô lí.

Vậy không tồn tại số nguyên d- ơng x để : $x(x+1) = k(k+2)$

4/ Sử dụng tính chất " nếu hai số nguyên d- ơng nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính ph- ơng thì mỗi số đều là số chính ph- ơng"

Ví dụ 14:

Tìm x,y nguyên thoả mãn : $xy=z^2$ (1)

Giải:

Tr- ớc hết ta có thể giả sử (x, y, z) = 1. Thật vậy nếu bộ ba số x_0, y_0, z_0, thoả mãn (1) và có ƯCLN bằng d giả sử $x_0=dx_1$; $y_0=dy_1$; $z_0=dz_1$ có - ớc chung bằng d thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta có: $z^2=xy$ mà $(x;y)=1$ nên $x=a^2$, $y=b^2$ với a,b nguyên d- ơng

=> $z^2=xy=(ab)^2$ do đó z=ab.

Nh- vậy : $\begin{cases} x = ta^2 \\ y = tb^2 \text{ với } t > 0 \\ z = tab \end{cases}$

Đảo lại ta thấy công thức trên thoả mãn (1). Vậy công thức trên là nghiệm nguyên d- ơng của (1)

5/ Sử dụng tính chất: " nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính ph- ơng thì một trong hai số nguyên liên tiếp đó bằng 0 "

Ví dụ 15: Tìm x,y nguyên thoả mãn :

$$x^2+xy+y^2=x^2y^2 \quad (1)$$

Giải: Thêm xy vào hai vế của ph- ơng trình (1), ta đ- ợc: $x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = xy(xy+1) \quad (2)$$

Ta thấy xy và xy+1 là hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính ph- ơng nên tồn tại một số bằng 0.

Nếu xy = 0 từ (1) => $x^2+y^2=0$ nên x=y=0

Nếu xy+1=0 => xy= -1 nên (x; y)=(1;-1) hoặc (x;y)=(-1;1).

Thử các cặp số (0;0), (1;-1), (-1;1) đều là nghiệm của ph- ơng trình (1)

V/ PH□□NG PH□P L□I V□ H□N (NGUY□N T□C C□C H□N):

Ví dụ 16: Tìm x,y nguyên thoả mãn :

$$x^3+2y^3=4z^3 \quad (1)$$

Giải:

Từ (1) ta thấy $x \vdots 2$, đặt $x=2x_1$ với x_1 nguyên. hay vào (1) rồi chia hai vế cho 2 ta

đ- ợc $4x_1^3+y^3=2z^3$ (2). Từ (2) ta thấy $y \vdots 2$, đặt $y=2y_1$ với y_1 nguyên thay vào (2) rồi chia hai vế cho 2 ta đ- ợc: $2x_1^3+4y_1^3=z^3$ (3)

Từ (3) ta thấy $z \vdots 2$ đặt $z = 2z_1$ với z_1 nguyên. Thây vào (3) rồi chia hai vế cho 2, ta

đ- ợc: $x_1^3+2y_1^3= 4z_1^3$ (4)

Nh- vậy nếu (x; y; z) là nghiệm của (1) thì (x_1; y_1; z_1) cũng là nghiệm của (1). Trong đó $x = 2x_1$; $y = 2y_1$; $z = 2z_1$.

Lập luận t- ơng tự nh- vậy ta đi đến x, y, z chia hết cho 2^k với $k \in N$. Điều này chỉ xảy ra khi x = y = z = 0

Vậy ph- ơng trình (1) có nghiệm duy nhất : x = y = z = 0

C. BÀI TỐP:

Bài 1: Tìm x,y nguyên > 0 thoả mãn :

a. $5x-y = 13$

b .$23x+53y= 109$

c. $12x-5y = 21$

d. $12x+17y = 41$

Bài 2: Tìm x,y nguyên > 0 thoả mãn :

a/ $1+y+y^2+y^3 = t^3$

b/ $1+y+y^2+y^3+y^4 = t^4$

Bài 3: Tìm x,y nguyên > 0 thoả mãn :

a/ $5(x+y)+2 = 3xy$

b/ $2(x+y) = 5xy$

c/ $3x+7 = y(x-3)$

Bài 4: Tìm x,y nguyên > 0 thoả mãn :

$5(x+y+z+t)+10 = 2xyzt$

Bài 5: Tìm 12 số nguyên d- ơng sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng

Bài 6: Chứng minh rằng, với n là số tự nhiên khác 0. nhất cũng có một giá trị trong tập hợp số tự nhiên khác 0 sao cho:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n= x_1x_2x_3\ldots x_n$$

Bài 7: Tìm x,y nguyên >0 thoả mãn :

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}=3$$

Bài 8: Tìm x,y nguyên >0 thoả mãn :

a/ $4(x+y+z) = xyz$

b/ $x+y+z+9-xyz = 0$

Bài 10: Chứng minh ph- ơng trình $2x^2-5y^2=7$ không có nghiệm nguyên

Bài 11: Tìm x,y nguyên >0 thoả mãn :

$$x^2+y^2-z^2+z+1=2(x+y-xy)$$

Bài 12: Tìm x,y nguyên >0 thoả mãn :

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}=1$$

CHUYÊN ĐỀ 1: ĐOẠN THẲNG.

1. Điểm. Đường thẳng:

a, Điểm:

- Điểm là một khái niệm cơ bản của hình học, ta không định nghĩa điểm mà chỉ hình dung nó, chẳng hạn bằng một hạt bụi rất nhỏ, một chấm mực trên mặt giấy,...
- Hai điểm không trùng nhau là hai điểm phân biệt.
- Bất cứ một hình hình học nào cũng đều là một tập hợp các điểm. Người ta gọi tên điểm bằng các chữ cái in hoa.

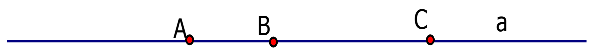
b, Đường thẳng:

- Đường thẳng là một khái niệm cơ bản, ta không định nghĩa mà chỉ hình dung đường thẳng qua hình ảnh thực tế như một sợi chỉ căng thẳng, vết bút chì vạch theo cạnh thước,...
- Đường thẳng cũng là tập hợp các điểm.
- Đường thẳng không bị giới hạn về cả hai phía. Người ta đặt tên đường thẳng bằng một chữ thường, hoặc hai chữ thường, hoặc hai điểm bất kì thuộc đường thẳng.

c, Quan hệ giữa điểm và đường thẳng: (được diễn tả bằng một trong các cách sau)

+ Điểm A thuộc đường thẳng a, kí hiệu $A \in a$	+ Điểm B không thuộc đường thẳng a, kí hiệu $B \notin a$
+ Điểm A nằm trên đường thẳng a.	+ Điểm B không nằm trên đường thẳng a.
+ Đường thẳng a chứa điểm A.	+ Đường thẳng a không chứa điểm B.
+ Đường thẳng a đi qua điểm A.	+ Đường thẳng a không đi qua điểm B.

- Khi ba điểm cùng thuộc một đường thẳng, ta nói là ba điểm thẳng hàng. Khi ba điểm không cùng thuộc bất kì đường thẳng nào, ta nói chúng không thẳng hàng.
- Trong 3 điểm thẳng hàng, có một điểm và chỉ một điểm nằm giữa hai điểm còn lại.



Với 3 điểm thẳng hàng A, B, C ta có thể nói:

+ Điểm B nằm giữa hai điểm A và C.

+ Hai điểm A và B nằm cùng phía đối với điểm C, Hai điểm B và C nằm cùng phía đối với điểm A.

+ Hai điểm A và C nằm khác phía đối với điểm B.

- Nhận xét: Có một đường thẳng và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm A và B.

d, Đường thẳng trùng nhau, cắt nhau, song song:

Hai đường thẳng a, b bất kì có thể:

+ Trùng nhau: có vô số điểm chung.

+ Cắt nhau: chỉ có 1 điểm chung - điểm chung đó gọi là giao điểm.

+ Song song: không có điểm chung nào.

- Chú ý:

+ Hai đường thẳng không trùng nhau còn được gọi là hai đường thẳng *phân biệt.*

+ Khi có nhiều đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm ta nói chúng *đồng quy* tại điểm đó.

+ Khi có nhiều đường thẳng nhưng trong đó không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy, ta nói các đường thẳng này *đôi một cắt nhau* hoặc *cắt nhau từng đôi một*.

2. Tia:

- Hình gồm điểm O và một phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm O được gọi là một tia gốc O, còn gọi là một nửa đường thẳng gốc O.
- Khi đọc (hay viết) tên một tia, phải đọc (hay viết) tên gốc trước.
- Hai tia chung gốc và tạo thành một đường thẳng gọi là hai tia đối nhau.
- Chú ý:

+ Mỗi điểm trên đường thẳng là gốc chung của hai tia đối nhau.
+ Hai tia Ox, Oy đối nhau. Nếu điểm A thuộc tia Ox và điểm B thuộc tia Oy thì điểm O nằm giữa hai điểm A và B.

- Hai tia trùng nhau có cùng gốc và có một điểm chung khác gốc.
- Hai tia không trùng nhau còn được gọi là hai tia phân biệt.

3. Đoạn thẳng:

- Đoạn thẳng AB là hình gồm điểm A, điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B. Các điểm A, B gọi là hai mút (hoặc hai đầu) đoạn thẳng AB.
- Khi hai đoạn thẳng có một điểm chung, ta nói hai đoạn thẳng ấy cắt nhau.
- Mỗi đoạn thẳng có một độ dài. Độ dài đoạn thẳng là một số dương. Độ dài đoạn thẳng AB cũng còn gọi là khoảng cách giữa hai điểm A và B.

    + Khi hai điểm A và B trùng nhau, ta nói độ dài bằng 0.

- Hai đoạn thẳng bằng nhau nếu có cùng độ dài. Đoạn thẳng lớn hơn nếu có độ dài lớn hơn.
- Trên một tia gốc O, với bất kì số m > 0, bao giờ cũng xác định được một điểm M để độ dài OM = m.
- Trên tia Ox, nếu có hai điểm M, N với OM = a, ON = b và 0 < a < b thì điểm M nằm giữa hai điểm O và N.
- Cộng độ dài đoạn thẳng: Nếu điểm M nằm giữa hai điểm A và B thì AM + MB = AB. Ngược lại nếu AM + MB = AB thì điểm M nằm giữa hai điểm A và B

4. Trung điểm của đoạn thẳng:

- Là điểm nằm giữa và cách đều hai đầu đoạn thẳng. Trung điểm của đoạn thẳng còn gọi là điểm chính giữa của đoạn thẳng.

Tóm tắt: $\text{M là trung diem doan thang AB} \Rightarrow \begin{cases} \text{M nam giua 2 diem A, B} \\ \text{MA = MB} \end{cases}$

hoặc $\text{M la trung diem cua doan thang AB} \Leftrightarrow \begin{cases} AM + MB = AB \\ \text{MA = MB} \end{cases}$

hoặc $\text{M la trung diem cua doan thang AB} \Leftrightarrow \text{AM = BM} = \frac{1}{2}AB$

PHƯƠNG PHÁP NHÂN NHẨM

-Áp dụng tính nhẩm nhân hai số, bình phương của một số khi có thể được.

- Cơ sở tính toán từ các công thức sau và tương tự: (chú ý các phần "**thừa-thiếu**": a,b)

$$* \ (100 + a)(100 + b) = 100.100 + 100b + 100a + ab$$
$$= 100(\mathbf{100 + a + b}) + ab \quad \text{dạng: } \overline{XY00} + ab$$

$$* \ (50 + a)(50 + b) = 50.50 + 50b + 50a + ab$$
$$= 50(50 + a + b) + ab$$
$$= \frac{50 + a + b}{2}100 + ab \quad \text{dạng: } \overline{XY00} + ab$$

ÁP DỤNG :

1/. Nhân hai số "gần" 100

-Vd1: 10**7**.1**12** (phần thừa của 100 là 7 và 12)

100+7+12 = 1**19**
7.12 = 84 } kết quả: 1**1 9**84

-Vd2: 97.88 (so với 100: thiếu 3, thừa 12)

88-3 = 85
3.12 = **36** } kết quả: 85**36**

-Vd3: 94.112 (so với 100: thiếu 6, thừa 12)

112-6 = 106
6.12 = 72 } kết quả: 10600 -72 = 10 528

2/. Nhân hai số "gần" 50 *nhớ chia 2

- Vd1: 57.53 (so với 50: thừa 7và 3)

(57+3):2 = 30
7.3 = **21** } kết quả: 30**21**

- Vd2: 36.48 (so với 50: thiếu 14 và 2)

(36-2):2 = 17
14.2 = **28** } kết quả: 17**28**

- Vd3: 37.53 (so với 50: thiếu 13, thừa 3)

(37+3):2 = 20
13.3 = 39 } kết quả: **20**00-39 = 1961

- Vd4: 37.52 (so với 50: thiếu 13, thừa 2)

(37+2):2 = 19,5
13.2 = 26 } kết quả: **19**50-26 = 1924