tủ sách -Toán học kì thú-

THCS
Trần Phú

Hình học 7

Phân loại, hệ thống kiến thức và bài tập
Góc, vuông góc, song song, tam giác và các đường đồng quy.

Đỗ Minh Triết

HÌNH HỌC 7

Đỗ Minh Triết

Ngày 4 tháng 7 năm 2017

Xuất bản bởi Toán học kì thú

facebook.com/ToanHocThuVi

toanhockithu@hotmail.com

Lời nói đầu

Không có lời nói đầu cho quyển sách này. Tác giả thích thì viết thôi. Mục đích viết là để phục vụ công tác giảng dạy của bản thân. Dù vậy, mong là quyển sách này có ích cho những ai đã tìm đến nó.

Sách được chia làm 3 phần:

Tóm tắt lí thuyết. Tóm tắt, sơ lược lại những kiến thức cần nắm rõ để giải quyết bài Toán và những vấn đề liên quan.

Phân loại và các ví dụ. Phân loại các dạng bài tập, hướng dẫn, phân tích cùng các ví dụ minh hoạ cho mỗi dạng. Ngoài ra, mục cuối sẽ là những ví dụ cho các bài tập tổng hợp, kết hợp, vận dụng các kiến thức để giải quyết vấn đề.

Bài tập tự luyện Những bài tập dành cho bạn đọc vận dụng và tự giải quyết, có lời giải hoặc gợi ý cuối sách.

Sai sót là điều không tránh được, mọi ý kiến, đóng góp xin liên hệ qua

Đỗ Minh Triết
Website: facebook.com/ToanHocThuVi
E-mail: toanhockithu@hotmail.com | dominhtriet.gm@gmail.com
SĐT: 0164 952 6053

Vũng Tàu, Ngày 4 tháng 7 năm 2017

Tác giả

Đỗ Minh Triết

Mục lục

Chương 1

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

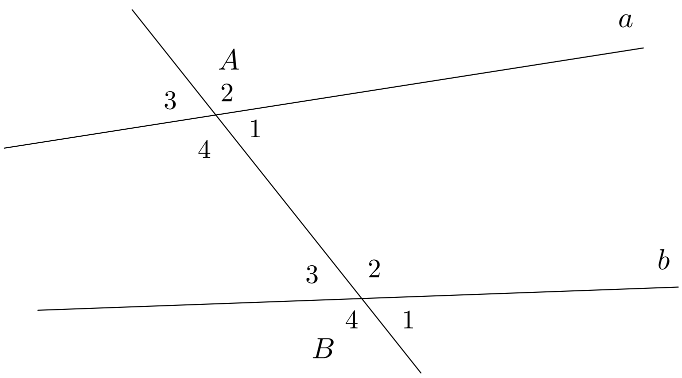
1.1. Các loại góc, song song, vuông góc

Góc đối đỉnh: Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia. Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.
Ví dụ: $\widehat{A}_1$ và $\widehat{A}_3$, $\widehat{A}_2$ và $\widehat{A}_4$, $\widehat{B}_1$ và $\widehat{B}_3$, $\widehat{B}_2$ và $\widehat{B}_4$.

Góc so le trong: $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_3$, $\widehat{A}_4$ và $\widehat{B}_2$.

Góc đồng vị: $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_1$, $\widehat{A}_2$ và $\widehat{B}_2$, $\widehat{A}_3$ và $\widehat{B}_3$, $\widehat{A}_4$ và $\widehat{B}_4$.

Góc trong cùng phía: $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_2$, $\widehat{A}_4$ và $\widehat{B}_3$.



Định lí 1. .

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

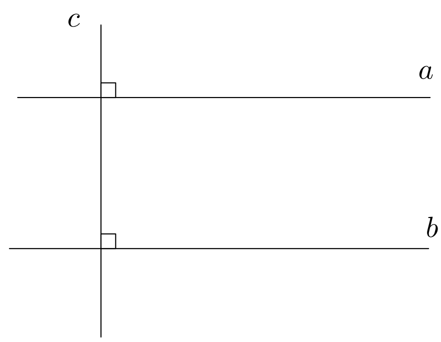
Có một và chỉ một đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước (tiên đề Euclid).

Định lí 2 (Dấu hiệu nhận biết và tính chất hai đường thẳng song song). *Nếu đường thẳng c cắt hai đường thằng a và b thì khi đó, $a//b$ khi và chỉ khi trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong (hoặc một cặp góc đồng vị) bằng nhau (hoặc một cặp góc trong cùng phía bù nhau).*

Quan hệ giữa tính vuông góc và song song:

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng khác thì chúng song song nhau.

$$\left.\begin{array}{l} a \perp c \\ b \perp c \end{array}\right\} \Rightarrow a//b$$

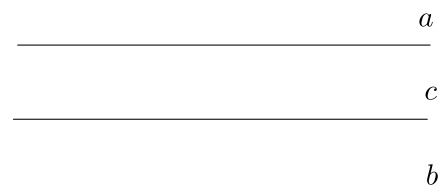


Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thăng còn lại.

$$\left.\begin{array}{l} a//b \\ c \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp b$$

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng khác thì chúng song song nhau.

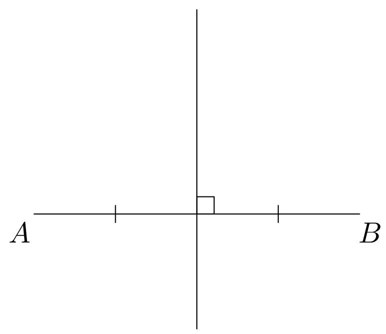
$$\left.\begin{array}{l} a//c \\ b//c \end{array}\right\} \Rightarrow a//b$$



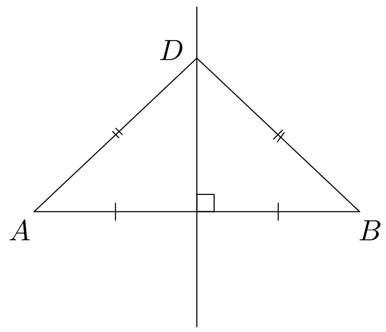
1.2. Các đường và tính chất

Đường trung trực

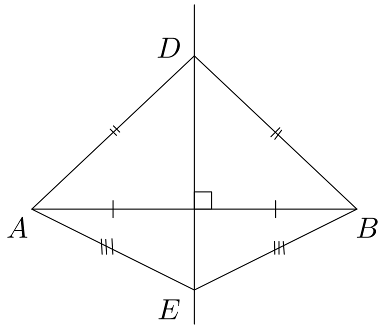
Định nghĩa. Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc tại trung điểm của đoạn thẳng đó.



Tính chất. Điểm nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng thì cách đều hai đầu đoạn thẳng đó và ngược lại.



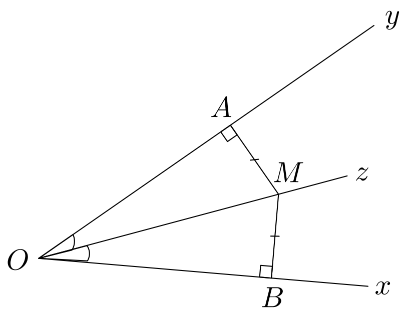
Cách chứng minh. Một là chứng minh theo định nghĩa. Hai là sử dụng tính chất, đó là xác định hai điểm cách đều hai đầu đoạn thẳng, khi đó đường thẳng đi qua hai điểm này chính là đường trung trực của đoạn thẳng đó.



Tia (đường) phân giác

Định nghĩa. Tia phân giác của một góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh đó hai góc bằng nhau.

Tính chất. Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó và ngược lại, điểm nằm bên trong góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.



1.3. Tam giác

Định lí 3 (Góc). *Tổng ba góc của một tam giác bằng* 180^o.

Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.

Mỗi góc ngoài của tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

Định nghĩa 1 (Tam giác bằng nhau). Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh, các góc tương ứng bằng nhau.

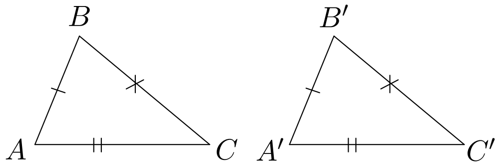
$$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ nếu } \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C' \end{cases}$$

(Để kí hiệu sự bằng nhau của hai tam giác, ta phải viết theo các đỉnh, các cạnh tương ứng bằng nhau)

Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác:

Trường hợp 1 (c.c.c): Ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia.

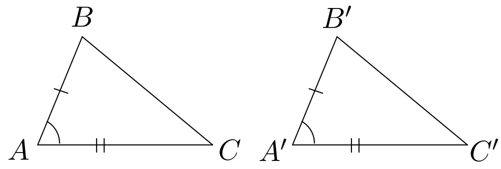
$$AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C'$$



Trường hợp 2 (c.g.c): Hai cạnh và góc xen giữa.

$$AB = A'B', \ AC = A'C'$$

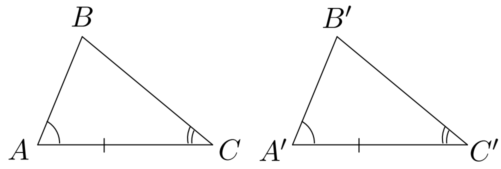
$$\widehat{A} = \widehat{A'}$$



Trường hợp 3 (g.c.g): Một cạnh và hai góc kề.

$$AC = A'C'$$

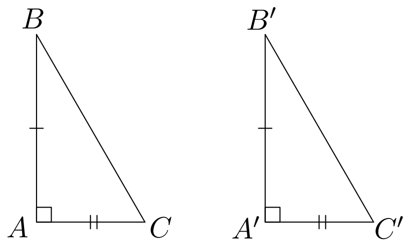
$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \ \widehat{C} = \widehat{C'}$$



Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông:

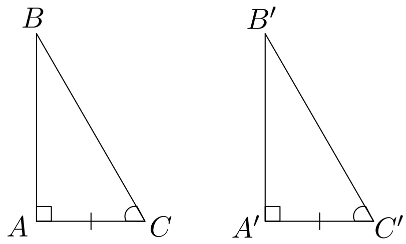
Trường hợp 1 (2cgv): Hai cạnh góc vuông.

$$AB = A'B', \ AC = A'C'$$



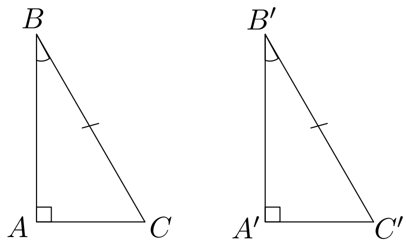
Trường hợp 2 (cgv.gn): Cạnh góc vuông, góc nhọn kề.

$$AC = A'C', \ \widehat{C} = \widehat{C'}$$



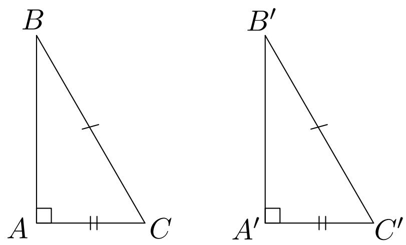
Trường hợp 3 (ch.gn): Cạnh huyền, góc nhọn.

$$BC = B'C', \ \widehat{B} = \widehat{B'}$$



Trường hợp 4 (ch.cgv): Cạnh huyền, cạnh góc vuông.

$$BC = B'C', \ AC = A'C'$$



Định lí 4 (Định lí Pythagoras). *Trong tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.*

Đảo: Nếu một tam giác có bình phương một cạnh bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại thì đó là tam giác vuông.

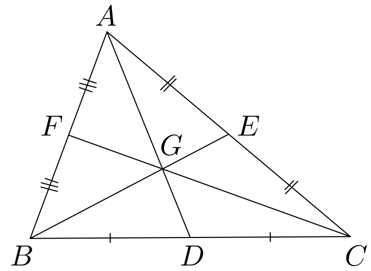
Định lí 5. *Trong tam giác, góc (cạnh) đối diện cạnh (góc) lớn hơn thì lớn hơn.*

Định lí 6 (BĐT tam giác và hệ quả). *Trong tam giác, độ dài một cạnh luôn lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng độ dài hai cạnh còn lại.*

Tính chất các đường đồng quy trong tam giác:

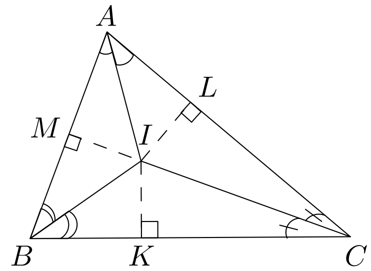
Ba đường trung tuyến của tam giác đồng quy tại một điểm, gọi là trọng tâm, cách mỗi đỉnh bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

$$\frac{GA}{AD} = \frac{GB}{BE} = \frac{GC}{CF} = \frac{2}{3}$$



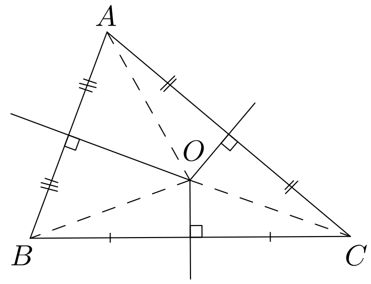
Ba đường phân giác trong tam giác đồng quy tại một điểm, điểm này cách đều ba cạnh của tam giác.

$$IK = IL = IM$$

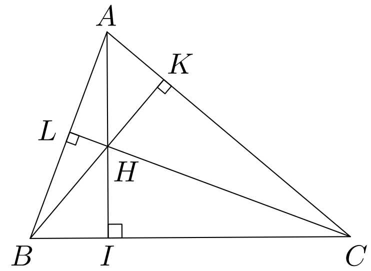


Ba đường trung trực của tam giác đồng quy tại một điểm, gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, nó cách đều ba đỉnh của tam giác

$$OA = OB = OC$$



Ba đường cao trong tam giác đồng quy tại một điểm, gọi là trực tâm



1.4. Một số định lí, tính chất quan trọng khác

1. ΔABC cân tại A khi và chỉ khi hai trong bốn đường sau trùng nhau: đường trung tuyến, đường cao, đường phân giác xuất phát từ đỉnh A, đường trung trực của

cạnh BC.

2. ΔABC vuông tại A khi và chỉ khi đường trung tuyến xuất phát từ A bằng nửa cạnh BC.

3. Cạnh đối diện góc 30^o trong tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền.

4. Trong một tam giác

   (a) đường phân giác trong và ngoài xuất phát từ một đỉnh vuông góc với nhau.

   (b) hai đường phân giác ngoài của hai góc đồng quy với đường phân giác trong của góc còn lại.

Chương 2

BÀI TẬP CƠ BẢN

Nội dung chương này là hệ thống các bài tập cơ bản, không phân dạng, bắt buộc người học phải quyết được, kiến thức cần sử dụng chủ yếu thuộc chương I, II sách giáo khoa. Hệ thống bài tập này được dùng song song với quá trình học trên trường lớp của học sinh.

2.1. Bài tập chương I

2.1.1. Bài tập tự luyện

Hai góc đối đỉnh

Bài tập 1. .

a) Vẽ $\widehat{ABC} = 70^o$.

b) Vẽ và tính $\widehat{ABC'}$ kề bù $\widehat{ABC}$.

c) Vẽ và tính $\widehat{C'BA'}$ kề bù $\widehat{ABC'}$.

Bài tập 2. Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 50^o. Tính số đo các góc còn lại.

Bài tập 3. Cho ba đường thẳng xx', yy', zz' cùng đi qua điểm O. Viết tên các cặp góc bằng nhau.

Bài tập 4. Vẽ hai góc chung đỉnh có cùng số đo nhưng không đối đỉnh.

Bài tập 5. Vẽ hai đường thẳng cắt nhau sao cho trong các góc tạo thành có một góc 50^o. Tính số đo các góc còn lại.

a) Vẽ $\widehat{xAy} = 50^o$.

b) Vẽ $\widehat{x'Ay'}$ đối đỉnh $\widehat{xAy}$.

c) Vẽ tia phân giác At của $\widehat{xAy}$.

d) Vẽ tia đối At' của tia At. Chứng minh At' là tia phân giác của $\widehat{x'Ay'}$.

e) Viết tên năm cặp góc đối đỉnh.

Bài tập 6. .

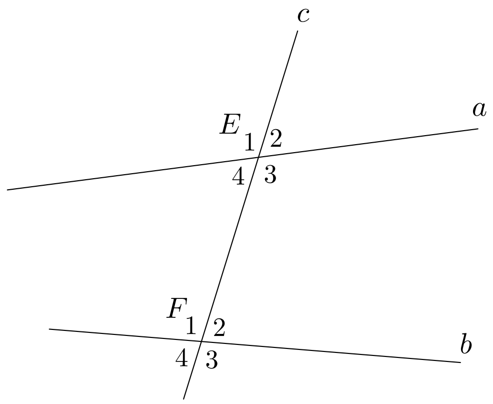
a) Cho $\widehat{mOn}$. Vẽ $\widehat{nOt}$ kề bù với $\widehat{mOn}$, $\widehat{mOz}$ kề bù $\widehat{mOn}$. Hỏi $\widehat{mOn}$ và $\widehat{tOz}$ có đối đỉnh không? Vì sao?

b) Cho $\widehat{hBk}$. Vẽ tia phân giác Bm của $\widehat{hBk}$, Bm' là tia đối của tia Bm, $\widehat{kBh'}$ kề bù $\widehat{hBk}$. Hỏi $\widehat{m'Bh'}$ và $\widehat{hBm}$ có đối đỉnh không? Vì sao?

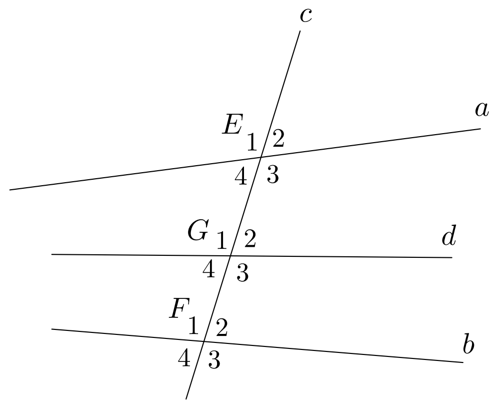
c) Cho $\widehat{xOy}$. Vẽ $\widehat{yOz}$ kề bù $\widehat{xOy}$. Vẽ $\widehat{xOt}$ kề bù $\widehat{xOy}$; On, Om lần lượt là tia phân giác của $\widehat{zOy}$ và $\widehat{tOx}$. Hỏi $\widehat{zOn}$ và $\widehat{xOm}$ có đối đỉnh không? Vì sao?

Góc tạo bởi một đường cắt hai đường. Vuông góc. Song song

Bài tập 7. Kể tên tất cả các cặp góc so le trong, góc đồng vị, trong cùng phía trong hình vẽ sau

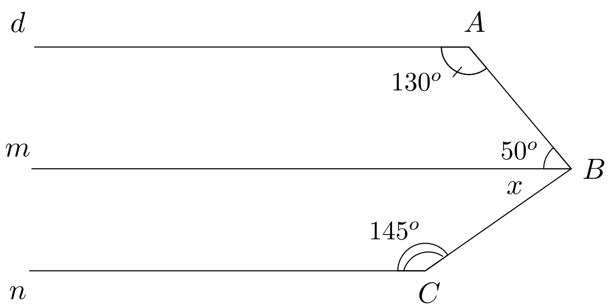


a)



b)

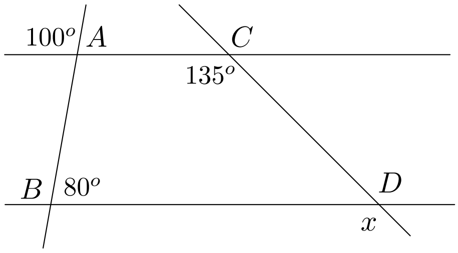
Bài tập 8. Cho hình vẽ



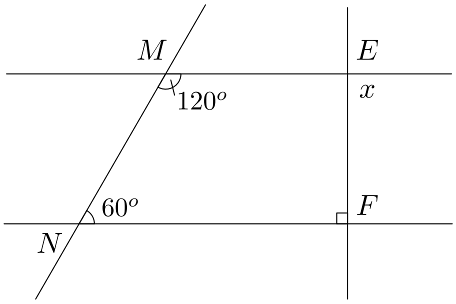
a) Chứng minh $Ad//Bm$.

b) Tìm x để $Bm//Cn$.

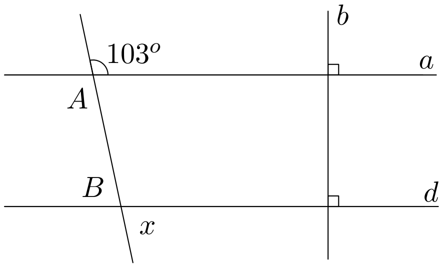
Bài tập 9. Vẽ lại hình sau và tìm số đo của x.



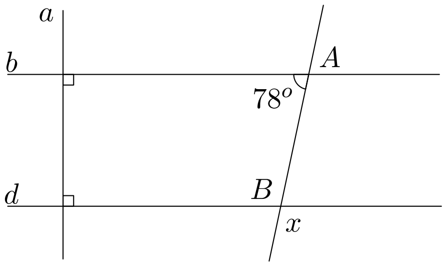
a)



b)

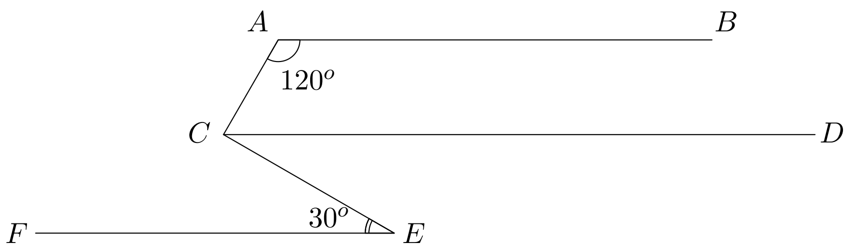


c)

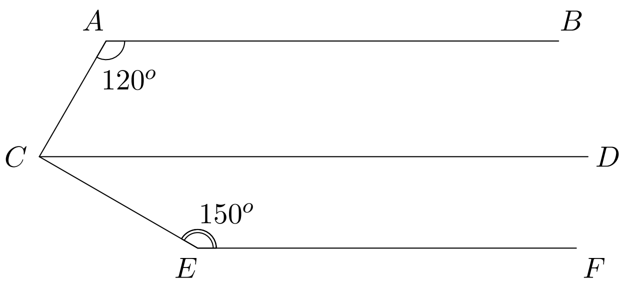


d)

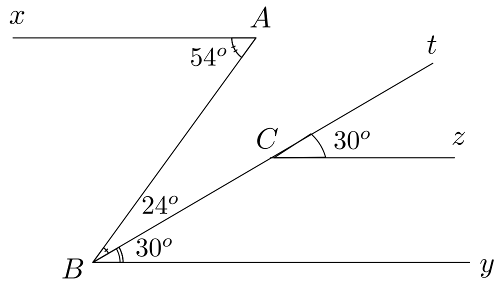
Bài tập 10. a) Cho hình vẽ:



Cho AB song song EF. Tính số đo $\widehat{ACE}$ biết AB cũng song song CD.
b) Yêu cầu như trên đối với hình vẽ

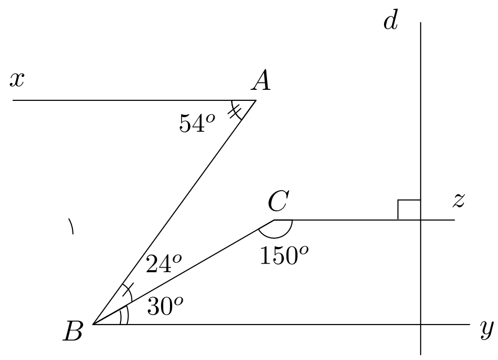


Bài tập 11. Cho hình vẽ:



Chứng minh hai tia Ax và Cz song song với nhau.

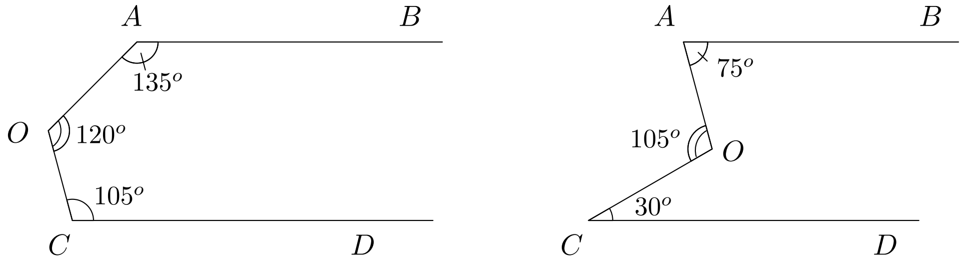
Bài tập 12. Cho hình vẽ:



a) Chứng minh hai tia Ax và Cz song song với nhau.

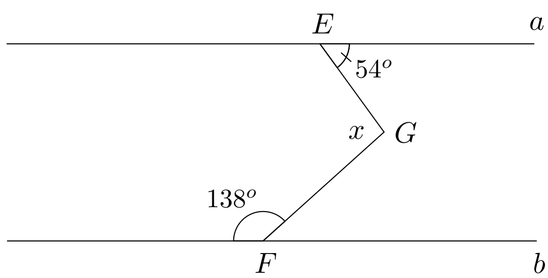
b) Cho đường thẳng d vuông góc với Cz. Chứng minh d vuông góc By.

Bài tập 13. Cho hình vẽ, chứng minh $AB//CD$

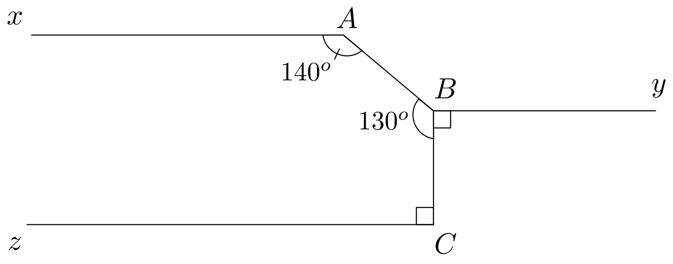


a) b)

Bài tập 14. Cho hình vẽ, biết $a//b$, tính x

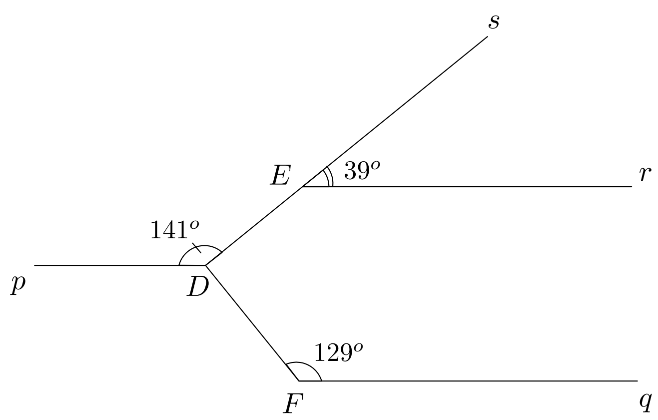


Bài tập 15. Cho hình vẽ



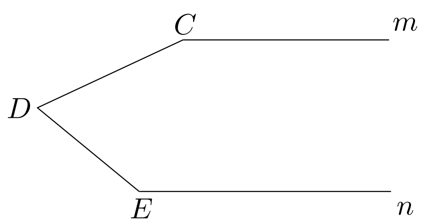
Đường thẳng nào song song với By? Vì sao?

Bài tập 16. Cho hình vẽ



Biết $Er//Dp//Fq$. Chứng minh $\widehat{EDF}$ vuông.

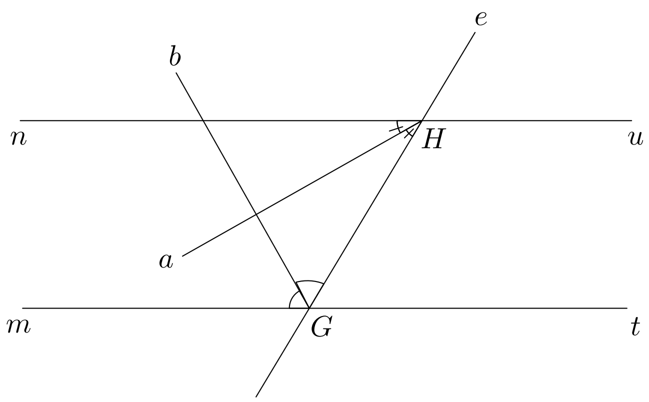
Bài tập 17. Cho hình vẽ



Chứng minh
a) Nếu $Cm//En$ thì $\widehat{C}+\widehat{D}+\widehat{E}=360^o$.
b) Nếu $\widehat{C}+\widehat{D}+\widehat{E}=360^o$ thì $Cm//En$.

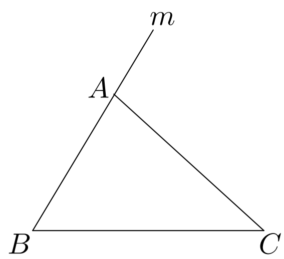
Bài tập 18. Chứng minh nếu hai góc nhọn $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'Oy'}$ có $Ox//Ox'$, $Oy//Oy'$ thì chúng bằng nhau.

Bài tập 19. Cho hình vẽ



Biết $nu//mt$, Ha, Gb lần lượt là tia phân giác của $\widehat{nHG}$ và $\widehat{mGH}$. Chứng minh $Ha \perp Gb$.
Hướng dẫn: Sử dụng tính chất: Hai tia phân giác của hai góc kề bù vuông góc với nhau.

Bài tập 20. Cho hình vẽ



Chứng minh $\widehat{mAC} = \widehat{B} + \widehat{C}$.

2.1.2. Bài tập tổng hợp chương I

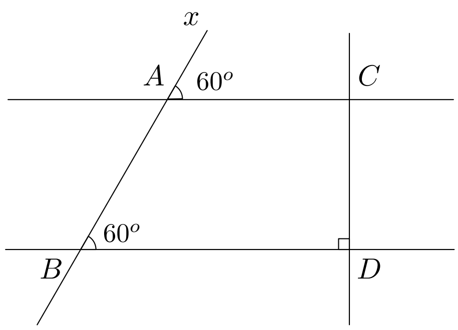
Bài tập 21. Cho $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt. Vẽ Oz, Ot lần lượt là tia đối của tia Ox, Oy. Biết $\widehat{xOy} + \widehat{zOt} = 100^o$. Tính $\widehat{xOy}$.

Bài tập 22. Cho đường thẳng t và bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh nếu $AB \perp t$, $BC \perp t$, $AD \perp t$ thì bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Bài tập 23. Cho ΔABC. Lấy D sao cho $\widehat{BAD}$ so le trong với $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$. Lấy E sao cho $\widehat{EAC}$ so le trong với $\widehat{ACB}$ và $\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$. Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

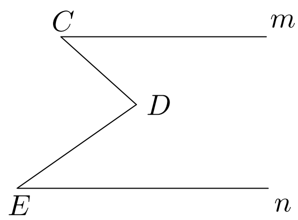
Bài tập 24. Cho $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt. Lấy M thuộc tia Oy ($M \neq O$). Vẽ tia Ma sao cho $\widehat{yMa}$ đồng vị với $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yMa} = \widehat{xOy}$. Vẽ tia Mb sao cho $\widehat{OMb}$ so le trong với $\widehat{xOy}$ và $\widehat{OMb} = \widehat{xOy}$. Chứng minh Ma và Mb là hai tia đối nhau.

Bài tập 25. Cho hình vẽ



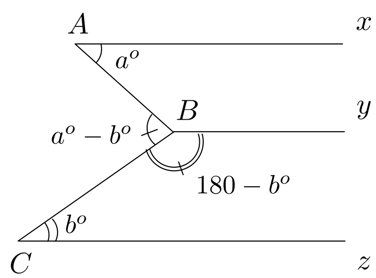
Chứng minh $CD \perp AC$.

Bài tập 26. Cho hình vẽ



Biết $Cm//En$, chứng minh $\widehat{CDE} = \widehat{mCD} + \widehat{nED}$.

Bài tập 27. Cho hình vẽ

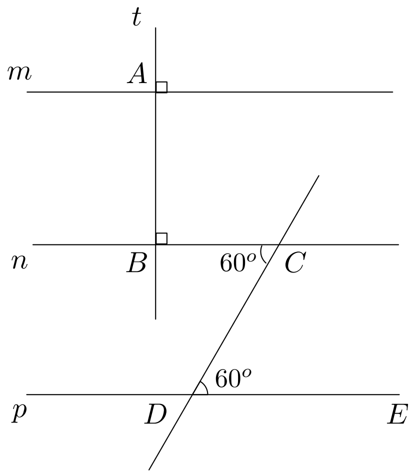


Chứng minh

a) $By//Cz$.

b) $Ax//By$.

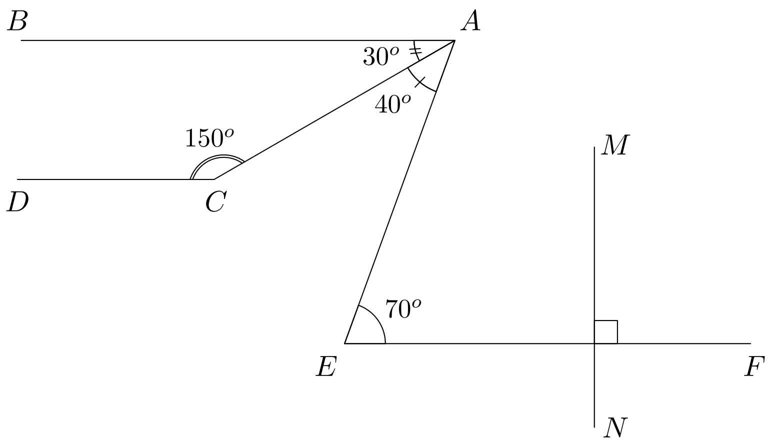
Bài tập 28. Cho hình vẽ



Chứng minh $m//p$.

Bài tập 29 (*). Cho ΔABC có M thuộc cạnh BC. Lấy E thuộc AC sao cho $ME//AB$. Lấy F thuộc AB sao cho $MF//AC$. Xác định M để MA là tia phân giác của $\widehat{EMF}$.

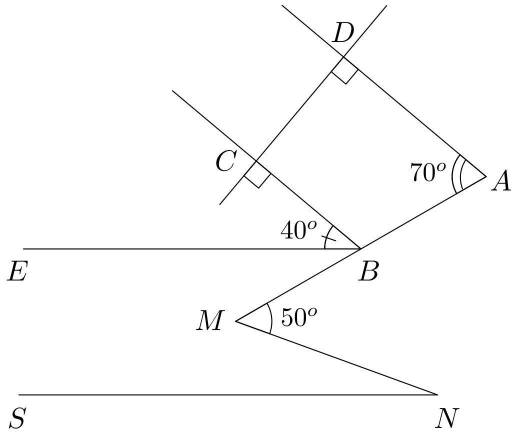
Bài tập 30. Cho hình vẽ



Chứng minh
a) $AB//EF$.
b) $CD//EF$.
c) $MN \perp CD$.

Bài tập 31. Cho đoạn thẳng MN. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa MN, vẽ các tia Ma, Nb sao cho $\widehat{NMa} = x^o$, $\widehat{MNb} = 3x^o$. Tìm a để $Ma//Nb$.

Bài tập 32. Cho hình vẽ



a) Chứng minh $AD//BC$.
b) Tính $\widehat{EBM}$ và $\widehat{MNS}$.

Bài tập 33. Cho hai góc kề bù $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$. OM, ON lần lượt là tia phân giác của $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$. Lấy D thuộc tia Om $(D \neq O)$. Vẽ đường thẳng t đi qua D và vuông góc OM. Chứng minh
a) $\widehat{MON} = 90^o$.
b) $t//ON$.

2.2. Bài tập chương II

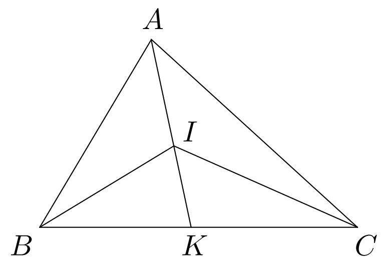
2.2.1. Bài tập tự luyện

Góc của tam giác

Bài tập 34. Bài 1 SGK/tr107.

Bài tập 35. Cho ΔABC có $\widehat{B} = 70^o$, $\widehat{C} = 40^o$. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BC tại D. Tính $\widehat{ADC}$ và $\widehat{ADB}$.

Bài tập 36. Cho hình vẽ



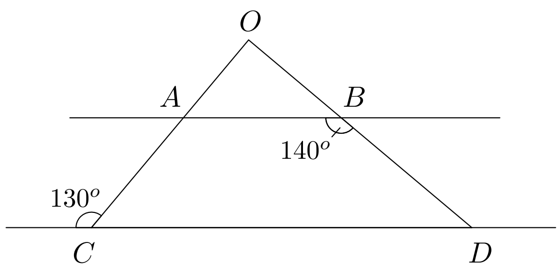
So sánh $\widehat{BIK}$ và $\widehat{BAK}$, $\widehat{BIC}$ và $\widehat{BAC}$.

Bài tập 37. Bài 6 SGK/tr109.

Bài tập 38. Cho ΔABC vuông tại A, AH vuông góc BC tại H.
a) Tìm các cặp góc phụ nhau.
b) Tìm các cặp góc nhọn bằng nhau.

Bài tập 39. Cho ΔABC nhọn. Kẻ BH vuông góc AC tại H, CK vuông góc AB tại K. So sánh $\widehat{ABH}$ và $\widehat{ACK}$.
(Có thể mở rộng bài Toán cho trường hợp ΔABC tù, vuông)

Bài tập 40. Cho hình vẽ.



Biết $AB//CD$. Tính $\widehat{O}$.

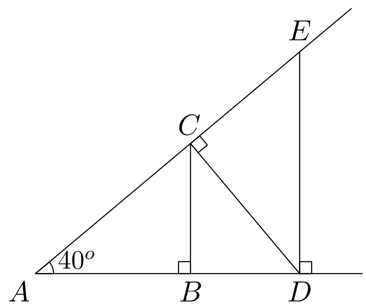
Bài tập 41. Cho ΔABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = 30^o$. Ax là tia phân giác của góc ngoài tại A. Chứng minh $Ax//BC$.

Bài tập 42. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 100^o$, $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^o$. Tính $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$.

Bài tập 43. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 75^o$, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Tính $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$.

Bài tập 44. Tính các góc của ΔABC, biết $\widehat{A} = 2\widehat{B}$, $\widehat{C} = \dfrac{3}{2}\widehat{B}$.

Bài tập 45. Cho hình vẽ



a) Kể tên tất cả các tam giác vuông.

b) Tính số đo các góc nhọn tại C, D, E.

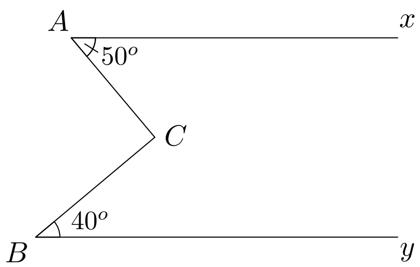
Bài tập 46. Cho ΔABC có $\widehat{B} = 70^o$, $\widehat{C} = 30^o$. AD là tia phân giác của $\widehat{A}$ ($D \in BC$). AH vuông góc BC tại H. Tính $\widehat{BAC}$, $\widehat{ADH}$, $\widehat{HAD}$.

Bài tập 47. Cho ΔABC có hai tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I. Tính $\widehat{BIC}$ trong mỗi trường hợp

a) $\widehat{B} = 80^o$, $\widehat{C} = 40^o$.

b) $\widehat{A} = 80^o$.

Bài tập 48. Cho hình vẽ



Tính $\widehat{BAC}$ biết $Ax//By$.

Bài tập 49. Chứng minh tổng ba góc ngoài của một tam giác bằng 360^o.

Bài tập 50. Cho ΔABC vuông tại A và E là một điểm nằm trong tam giác đó. Chứng minh $\widehat{BEC}$ tù.

Bài tập 51. Cho ΔABC vuông tại A, AH vuông góc BC tại H. Các tia phân giác của $\widehat{C}$ và $\widehat{BAH}$ cắt nhau tại I. Chứng minh $\widehat{AIC}$ vuông.

Bài tập 52. Chứng minh nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì hai tia phân giác của hai góc trong cùng phía vuông góc nhau.

Bài tập 53. Cho ΔABC có $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^o$. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BC tại D. Tính $\widehat{ADC}$ và $\widehat{ADB}$.

Bài tập 54. Cho ΔABC có $\widehat{B} = 110^o$, $\widehat{C} = 30^o$. Ax là tia đối của tia AC. Tia phân giác của $\widehat{BAx}$ cắt AC tại K. Chứng minh ΔKAB có hai góc bằng nhau.

Bài tập 55. Cho ΔABC vuông tại A. Gọi d là đường thẳng vuông góc BC tại C. Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt AC tại D, cắt d tại E. Chứng minh ΔCDE có hai góc bằng nhau.

Tam giác bằng nhau

Bài tập 56. Cho ΔABC có $AB = AC$, M là trung điểm BC. Chứng minh AM vuông góc BC và là tia phân giác của $\widehat{A}$.

Bài tập 57. Cho $\widehat{xOy}$. Trên tia Ox, Oy, lần lượt lấy A, B sao cho $OA = OB$. Vẽ Om là tia phân giác của $\widehat{xOy}$. Lấy C thuộc tia Om. Chứng minh $\Delta OAC = \Delta OBC$.

Bài tập 58. Cho đoạn thẳng AB với trung điểm M. Từ M, vẽ đường thẳng vuông góc AB. Lấy K thuộc đường thẳng đó. Chứng minh KM là tia phân giác của $\widehat{AKB}$.

Bài tập 59. Cho hai đoạn thẳng cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Chứng minh $AC//BD$.

Bài tập 60. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 90^o$. Trên tia đối của tia CA, lấy D sao cho $CD = CA$. Trên tia đối của tia CB, lấy E sao cho $CE = CB$. Tính $\widehat{CDE}$.

Bài tập 61. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 90^o$. Trên cạnh BC, lấy E sao cho $BE = BA$. Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt AC tại D.
a) So sánh DA và DE.
b) Tính $\widehat{BED}$.

Bài tập 62 (*). Cho ΔABC nhọn. Vẽ đoạn thẳng AD vuông góc AB và bằng AB (D và C khác phía đối với AB). Vẽ đoạn thẳng AE vuông góc AC và bằng AC (E và B khác phía đối với AC). Chứng minh
a) $DC = BE$.
b) $DC \perp BE$.

Bài tập 63 (*). Cho ΔABC, K, E lần lượt là trung điểm của AB, AC. Trên tia đối của tia KC, lấy M sao cho $KM = KC$. Trên tia đối của tia EB, lấy N sao cho $EN = EB$. Chứng minh A là trung điểm MN.

Bài tập 64. Cho ΔABC nhọn, M là trung điểm BC. Đường thẳng vuông góc AB tại B cắt đường thẳng AM tại D. Trên tia MA, lấy E sao cho $ME = MD$. Chứng minh CE vuông góc AB.

Bài tập 65 (*). Cho ΔABC có $\widehat{A} = 110^o$, M là trung điểm BC. Trên tia đối của tia MA, lấy K sao cho $MK = MA$.
a) Tính $\widehat{ACK}$.
b) Vẽ ra phía ngoài các đoạn thẳng AD, AE sao cho AD vuông góc AB, $AD = AB$, AE vuông góc AC, $AE = AC$. Chứng minh $\Delta CAK = \Delta AED$.
c) Chứng minh MA vuông góc DE.

Bài tập 66. Cho ΔADE có $\widehat{D} = \widehat{E}$. Tia phân giác của hai góc này lần lượt cắt AE, AD tại M, N. So sánh DN và EM.

Bài tập 67. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB//CD$, $AD//BC$. Chứng minh $AB = CD$, $AD = BC$.

Bài tập 68. Cho ΔABC có $AB = AC$. Lấy D, E lần lượt thuộc cạnh AB, AC sao cho $AD = AE$.
a) Chứng minh $BE = CD$.
b) Gọi O là giao điểm BE và CD. Chứng minh $\Delta BOD = \Delta COE$.

Bài tập 69. Cho ΔABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$ Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BC tại D. Chứng minh $DB = DC$, $AB = AC$.

Bài tập 70. Cho ΔABC vuông tại A. Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt AC tại D. Kẻ DE vuông góc BC. Chứng minh $AB = BE$.

Bài tập 71. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = AC$ Kẻ đường thẳng xy qua A sao cho B, C nằm cùng phía với xy. Kẻ BD, CE vuông góc xy. Chứng minh
a) $\Delta BAD = \Delta ACE$.
b) $DE = BD + CE$.

Bài tập 72 (*). Cho ΔABC, vẽ phía ngoài ΔABD vuông tại A, ΔACE vuông tại A, $AB = AD$, $AC = AE$. Kẻ AH vuông góc BC, AM vuông góc AH, EN vuông góc AH. Chứng minh
a) $DM = AH$.
b) MN đi qua trung điểm DE.

Bài tập 73 (*). Cho ΔABC có $\widehat{A} = 60^o$. BD, CE lần lượt là tia phân giác của $\widehat{B}, \widehat{C}$, chúng cắt nhau tại I. Chứng minh $ID = IE$.
Hướng dẫn: Kẻ tia phân giác của $\widehat{BIC}$.

Tam giác cân

Bài tập 74. .
a) Tính góc đáy của một tam giác cân có góc đỉnh bằng a^o.
b) Tính góc đỉnh của một tam giác cân có góc đáy bằng b^o.

Bài tập 75. Cho ΔABC cân tại A có D là một điểm thuộc cạnh AB thỏa $AD = DC = BC$. Tính các góc của ΔABC.

Bài tập 76. Cho ΔABC cân tại A có $\widehat{A} = 100^o$. Lấy M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AB sao cho $AM = AN$. Chứng minh $MN//BC$.

Bài tập 77. Cho ΔABC cân tại A có M là trung điểm AC, N là trung điểm AB. Chứng minh $BM = CN$ theo hai cách.

Bài tập 78. Cho ΔABC cân tại A có H thuộc cạnh AC, K thuộc cạnh AB sao cho $AH = AK$. Gọi O là giao điểm của BH và CK. Chứng minh ΔOBC cân.

Bài tập 79. Cho ΔABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC và tia CB, lần lượt lấy D và E sao cho $BD = CE$. Chứng minh ΔADE cân.

Bài tập 80. Cho ΔABC. Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt AC tại D. Trên tia đối của tia BA, lấy E sao cho $BE = BC$. Chứng minh $BD//EC$.

Bài tập 81. Cho ΔABC vuông cân tại A. Trên tia đối của tia BA, lấy D sao cho $BD = BC$. Tính $\widehat{BCD}$.

Bài tập 82. Cho ΔABC cân tại A. Lấy D thuộc cạnh BC. Qua D, vẽ các đường thẳng song song AB, AC, lần lượt cắt tại F, E. Chứng minh $DE + DF = AB$.

Bài tập 83. Cho ΔABC đều. Lấy các điểm D, E, F lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $AD = BE = CF$. Chứng minh ΔDEF cũng đều.

Bài tập 84. Cho ΔABC. Các tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I. Qua I, vẽ đường thẳng song song BC, cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Chứng minh $DE = BD + CE$.

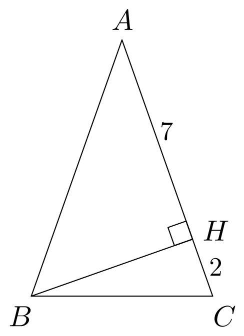
Bài tập 85. Tính cạnh góc vuông của một tam giác vuông biết cạnh huyền bằng 13cm, cạnh góc vuông kia bằng 12cm.

Định lí Pythagoras

Bài tập 86. Cho ΔABC nhọn. Vẽ AH vuông góc BC tại H. Tính chu vi ΔABC biết $AC = 20$cm, $AH = 12$cm, $BH = 5$cm.

Bài tập 87. Tính độ dài cạnh góc vuông của một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng: a) 2cm; b) $\sqrt{2}$cm.

Bài tập 88. Tính cạnh đáy BC của ΔABC cân tại A ở hình sau



Bài tập 89. Một tam giác vuông có các cạnh góc vuông tỉ lệ 7 và 24, chu vi 112cm. Tính độ dài cạnh huyền.

Bài tập 90. Tìm số tự nhiên a, biết bộ ba số $a, 8, 15$ là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

Bài tập 91. Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông biết chúng tỉ lệ với 3, 4 và độ dài cạnh huyền là 100.

Tam giác vuông bằng nhau

Bài tập 92. Cho ΔABC cân tại A. Vẽ AD vuông góc BC. Chứng minh AD là tia phân giác của $\widehat{A}$.

Bài tập 93. Cho ΔABC cân tại A. Vẽ BD vuông góc AC, CE vuông góc AB. K là giao điểm của BD và CE. Chứng minh AD là tia phân giác của $\widehat{A}$.

Bài tập 94. Cho ΔABC có M là trung điểm BC, AM là tia phân giác của $\widehat{A}$. Kẻ MH vuông góc AB, MK vuông góc AC. Chứng minh
a) $MH = MK$.
b) $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Bài tập 95. Cho ΔABC cân tại A. Các đường trung trực của AB, AC cắt nhau tại I. Chứng minh AI là tia phân giác của $\widehat{A}$.

Bài tập 96. Cho ΔABC có M là trung điểm BC, AM là tia phân giác của $\widehat{A}$. Chứng minh ΔABC cân.

Bài tập 97. Cho ΔABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC và tia CB, lần lượt lấy D, E sao cho $BD = CE$. Vẽ BH vuông góc AD, CK vuông góc AE. Chứng minh
a) $BH = CK$.
b) $\Delta ABH = \Delta ACK$.

Bài tập 98. Cho ΔABC. Các tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I. Chứng minh AI là tia phân giác của $\widehat{A}$.

Bài tập 99. Cho ΔABC có $AB < AC$. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt đường trung trực của BC tại I. Vẽ IH vuông góc AB, IK vuông góc AC. Chứng minh $BH = CK$.

Bài tập 100. Cho ΔABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC và tia CB, lần lượt lấy D, E sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$. Vẽ BH vuông góc AD, CK vuông góc AE. Chứng minh
a) $BD = CE$.
b) $BH = CK$.

Bài tập 101. Cho ΔABC vuông tại A, phân giác BD. Kẻ DE vuông góc BC tại E. Gọi F là giao điểm của BA và ED. Chứng minh

a) BD là đường trung trực của AE.

b) $DF = DC$.

c) $AD < DC$.

2.2.2. Bài tập tổng hợp chương II

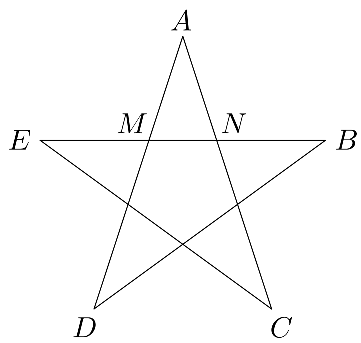
Bài tập 102. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 80^o$, $\widehat{B} = 40^o$. CD là tia phân giác của $\widehat{C}$. Tính $\widehat{ACB}$ và $\widehat{ADC}$.

Bài tập 103. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 60^o$. Tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I.

a) Biết $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$, tính $\widehat{ACB}$.

b) Tính $\widehat{BIC}$.

Bài tập 104. Cho hình vẽ



a) Chứng minh $\widehat{AMN} = \widehat{B} + \widehat{D}$.

b) Tính $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E}$.

Bài tập 105. Cho ΔABC vuông tại A. BD là tia phân giác của $\widehat{B}$, E thuộc cạnh BC sao cho $BE = BA$. Chứng minh

a) $\Delta ABD = \Delta EBD$.

b) $DE \perp BC$.

c) $DC = DF$ với F là giao điểm của DE và AB.

Bài tập 106. Cho ΔABC. Trên tia đối của tia CA, lấy D sao cho $CD = CA$. Trên tia đối của tia CB, lấy E sao cho $CE = CB$. Vẽ đường thẳng m qua C và song song AB. Chứng minh

a) $\Delta ABC = \Delta DEC$.

b) $AB//DE$.

c) $m//DE$.

Bài tập 107. Cho ΔABC, D là trung điểm BC. Trên tia đối của tia DA, lấy E sao cho $DE = DA$. Chứng minh

a) $\Delta ADB = \Delta EDC$.

b) $AB//CE$.

c) $\widehat{ABE} = \widehat{ECA}$.

Bài tập 108. Cho ΔABC vuông tại A $(AB > AC)$. M là trung điểm BC. Trên tia đối của tia MA, lấy D sao cho $MD = MA$. Vẽ $AH \perp BC$. Trên tia đối của tia HA, lấy E sao cho $HE = HA$. Chứng minh

a) $CD \perp AC$.

b) ΔCAE cân.

c) $BD = CE$.

d) $AE \perp ED$.

Gợi ý: a) $\Delta MAB = \Delta MDC$ (c.g.c)

b) $\Delta HAC = \Delta HEC$ (c.g.c)

c) $\Delta MBD = \Delta MCA$ (c.g.c)

d) ΔMAE cân tại M, ΔMDE cân tại M.

$$\widehat{AED} = \widehat{MEA} + \widehat{MED} = \widehat{MAE} + \widehat{MDE} \Rightarrow \widehat{AED} = 90^o$$

Bài tập 109 (*). Cho ΔABC vuông cân tại A. H là trung điểm BC. M thuộc cạnh BH. Vẽ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$. Chứng minh

a) $AH \perp BC$.

b) $AD = CE$, $BD = AE$.

c) $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

Bài tập 110. Cho ΔABC vuông cân tại A. Đường thẳng d qua A và không cắt cạnh BC. Vẽ $BM \perp d$, $CN \perp d$. Chứng minh

a) $\Delta MAB = \Delta NCA$.

b) $BM^2 + CN^2 = AB^2$.

Bài tập 111. Cho ΔABC vuông cân tại A, M là trung điểm BC, E thuộc đoạn MC. Vẽ $BH \perp AE$, $CK \perp AE$. Chứng minh

a) $BH = AK$.

b) $\Delta HBM = \Delta KAM$.

c) ΔMHK vuông cân.

Gợi ý: c) $MH = MK$, $\widehat{BMH} = \widehat{AMK}$.

Bài tập 112. Cho ΔABC, M là trung điểm BC. Vẽ $BD \perp AM, CE \perp AM$. Chứng minh

a) $BD = CE$, $DM = CM$.

b) $AB + AC > 2AM$.

Gợi ý: c) Cách 1: Lấy F sao cho M là trung điểm AF.
Cách 2: $AB + AC > AD + AE = AD + AE + (MD - ME)$
$= (AD + MD) + (AE - ME) = AM + AM = 2AM$

Bài tập 113. Cho ΔABC cân tại A, $\widehat{A}$ nhọn. Vẽ $BD \perp AC$, $CE \perp AB$. Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh

a) $AD = AE$.

b) AI là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

c) $DE//BC$.

d) Ba điểm A, I, M thẳng hàng; với M là trung điểm BC.

Chương 3

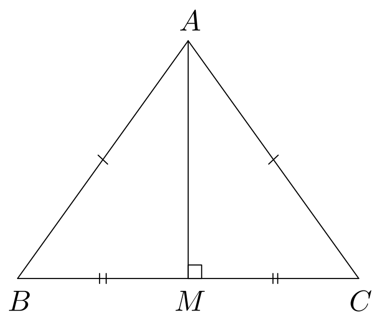
CÁC DẠNG TOÁN HÌNH HỌC

Đặc trưng của việc giải quyết các vấn đề Hình học là phải sáng tạo, sử dụng phối hợp những kiến thức đơn giản đã biết, thường là không có công thức chung cho các bài Toán như bên Số học, Đại số. Tuy vậy, chương này cũng cố gắng phân dạng hệ thống các bài Toán Hình học với những cách giải thông thường cũng như nâng cao, kèm theo đó là ví dụ và lời giải minh họa.

3.1. Tam giác bằng nhau

Ví dụ 1. *Cho ΔABC có $AB = AC$, M là trung điểm BC. Chứng minh $AM \perp BC$.*

Chứng minh



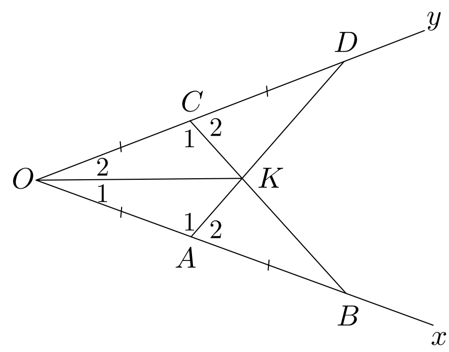
Xét ΔAMB và ΔAMC

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \text{ (gt)} \\ MB = MC \text{ (gt)} \\ AM \text{ chung} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC \text{ (c.c.c)}$$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC}$ (2 cạnh tương ứng)
mà đây là hai góc kề bù
$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^o$ hay $AM \perp BC$. □

Ví dụ 2. *Cho $\widehat{xOy}$. Lấy A, B thuộc tia Ox, C, D thuộc tia Oy sao cho $OA = AB = OC = CD$. Gọi K là giao điểm của AD và BC. Chứng minh*
a) $\Delta OCB = \Delta OAD$.
b) $\Delta KAB = \Delta KCD$.
c) $\Delta KOA = \Delta KOC$.

Chứng minh



a) Ta có

$$\left.\begin{array}{l} OA = AB \text{ (gt)} \\ OC = CD \text{ (gt)} \end{array}\right\} \Rightarrow OA + AB = OC + CD$$

hay $OB = OD$.

Xét ΔOCB và ΔOAD

$$\left.\begin{array}{l} OC = OA \text{ (gt)} \\ OB = OD \text{ (cmt)} \\ \widehat{O} \text{ chung} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OCB = \Delta OAD \text{ (c.g.c)}$$

b) Theo a), $\Delta OCB = \Delta OAD$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \widehat{C}_1 = \widehat{A}_1 \text{ (hai góc tương ứng)} \Rightarrow \widehat{C}_2 = \widehat{A}_2 \text{ (kề bù hai góc bằng nhau)} \\ \widehat{OBC} = \widehat{ODA} \text{ (hai góc tương ứng)} \end{array}\right.$$

Xét ΔKAB và ΔKCD

$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \text{ (gt)} \\ \widehat{A}_2 = \widehat{C}_2 \text{ (cmt)} \\ \widehat{OBC} = \widehat{ODA} \text{ (cmt)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta KAB = \Delta KCD \text{ (g.c.g)}$$

c) Xét ΔKOA và ΔKOC

$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \text{ (gt)} \\ OK \text{ chung} \\ KA = KC \text{ (do } \Delta KAB = \Delta KCD) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta KOA = \Delta KOC \text{ (c.c.c)}$$

□

3.2. Quan hệ song song

Các cách chứng minh hai đường thẳng song song:

1. Sử dụng dấu hiệu song song: Hai góc so le trong, đồng vị bằng nhau hoặc hai góc trong cùng phía bù nhau.

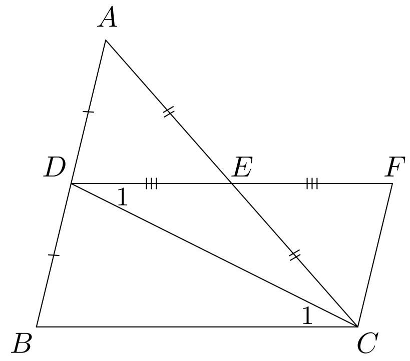
2. Hai đường thẳng cùng vuông góc hoặc song song với đường thẳng khác.

3. Dùng phương pháp phản chứng.

Ví dụ 3 (cách 1). *Cho ΔABC, D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC. Lấy F sao cho E là trung điểm DF. Chứng minh rằng*
a) $DB = CF$.
b) $\Delta BDC = \Delta FCD$.
c) $DE // BC$ và $DE = \dfrac{1}{2}BC$.

Chứng minh

a) Xét ΔAED và ΔCEF



$$\left.\begin{array}{l} EA = EC \text{ (gt)} \\ ED = EF \text{ (gt)} \\ \widehat{AED} = \widehat{CEF} \text{ (đđ)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AED = \Delta CEF \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow AD = CF$ (2 cạnh tương ứng).
mà $AD = DB$ (gt).
Vậy $DB = CF$.
b) Từ a), $\Delta AED = \Delta CEF \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{F}$ (2 góc tương ứng)
mà đây là 2 góc so le trong $\Rightarrow AB//CF$
$\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{FCD}$ (so le trong)
Xét ΔBDC và ΔFCD

$$\left.\begin{array}{l} DB = CF \text{ (cmt)} \\ DC \text{ chung} \\ \widehat{BDC} = \widehat{FCD} \text{ (cmt)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BDC = \Delta FCD \text{ (c.g.c)}$$

c) Từ b), $\Delta BDC = \Delta FCD \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$ (2 góc tương ứng)
mà đây là 2 góc so le trong $\Rightarrow DE//BC$.
Cũng từ b), $\Delta BDC = \Delta FCD \Rightarrow BC = DF \Rightarrow DE = \dfrac{DF}{2} = \dfrac{BC}{2}$. □

Ví dụ 4 (cách 1, 2). *Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$). Trên tia đối của tia AC, lấy D sao cho $AD = AB$. Trên tia đối của tia AB, lấy E sao cho $AE = AC$. Chứng minh rằng*

a) $BC = DE$.

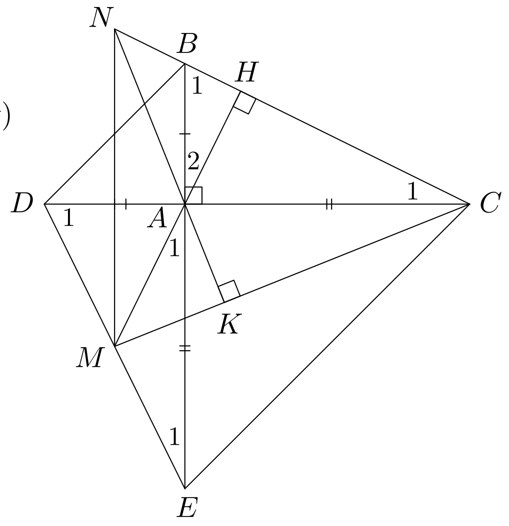
b) ΔABD vuông cân và $BD//CE$.

c) Kẻ đường cao AH của ΔABC. Gọi M là giao điểm của AH và DE. Từ A, kẻ đường vuông góc CM tại K, cắt BC tại N. Chứng minh $MM//AB$.

d) ΔMAE cân tại M.

e) $AM = \dfrac{DE}{2}$.

Chứng minh



a) Xét ΔABC và ΔADE vuông tại A

$$\left.\begin{array}{l} AB = AD \text{ (gt)} \\ AC = AE \text{ (gt)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta ADE \text{ (2cgv)}$$

$\Rightarrow BC = DE$ (2 cạnh tương ứng)

b) ΔABD vuông tại A và $AB = AD$ nên ΔABD vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{DBE} = 45^o$

ΔACE vuông tại A và $AC = AE$ nên ΔACE vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{BEC} = 45^o$

mà $\widehat{DBE}$ và $\widehat{BEC}$ là hai góc so le trong.

$\Rightarrow BD//CE$.

c) ΔMNC có hai đường cao MB, NK cắt nhau tại A nên A là trực tâm

$\Rightarrow CA \perp MN$

mà $AC \perp AB$ nên $MN//AB$.

d) Ta có

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{E}_1 \text{ phụ } \widehat{D}_1 \\ \widehat{D}_1 = \widehat{B}_1 \ (\Delta ABC = \Delta ADE) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{E}_1 \text{ phụ } \widehat{B}_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ (đđ)} \\ \widehat{A}_2 \text{ phụ } \widehat{B}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_1 \text{ phụ } \widehat{B}_1$$

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{E}_1 \Rightarrow \Delta MAE$ cân tại M.

e) Gọi I là giao điểm DA và MN.

Vì $MN//AB$ nên

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{DMI} = \widehat{E}_1 \text{ (đồng vị)} \\ \widehat{IMA} = \widehat{A}_1 \text{ (so le trong)} \\ \widehat{E}_1 = \widehat{A}_1 \text{ (cmt)} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DMI} = \widehat{IMA}$$

Xét ΔDIM và ΔAIM vuông tại I

$$\left.\begin{array}{l} MI \text{ chung} \\ \widehat{DMI} = \widehat{IMA} \text{ (cmt)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DIM = \Delta AIM \text{ (cgv.gn)}$$

$\Rightarrow MD = MA$ (2 cạnh tương ứng)

mà ΔMAE cân tại A nên $MD = MA = ME$.

Vậy $MA = \dfrac{DE}{2}$. □

3.3. Quan hệ vuông góc

Các cách chứng minh hai đường thẳng vuông góc:

1. Sử dụng định lí: "Đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường còn lại".

2. Sử dụng định lí Pythagoras đảo.

3. Hai tia phân giác của hai góc kề bù vuông góc nhau.

4. Dựa vào tính chất ba đường cao của tam giác, đường trung trực của đoạn thẳng.

5. Dựa vào tính chất của tam giác cân, tam giác đều.

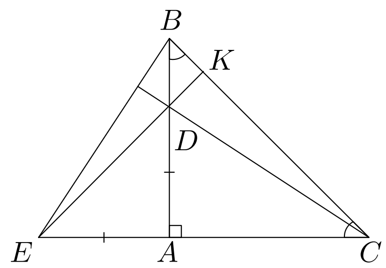
6. Dựa vào định lí nhận biết một tam giác vuông: đường trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng.

7. Trong một tam giác, nếu một góc bằng tổng hai góc còn lại thì đó là góc vuông.

Ví dụ 5 (cách 4). *Cho ΔABC vuông cân tại A. Lấy D thuộc cạnh AB. Trên tia đối của tia AC, lấy E sao cho $AE = AD$. Chứng minh $CD \perp BE$.*

Chứng minh

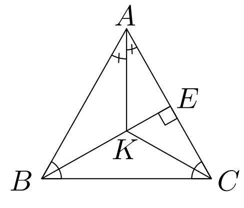
Gọi K là giao điểm của ED và BC.
Vì $AD = AE$ nên ΔADE vuông cân
$\Rightarrow \widehat{KEC} = \widehat{KCE} = 45^o \Rightarrow \Delta\widehat{EKC} = 90^o$ hay $EK \perp BC$.
ΔBEC có hai đường cao BA, EK cắt nhau tại D nên D là trực tâm.
Vậy $CD \perp BE$. □



Ví dụ 6 (cách 4, 5). *Cho ΔABC cân tại A có BE là đường cao. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BE tại K. Chứng minh $CK \perp AB$.*

Chứng minh

ΔABC cân tại A nên tia phân giác AK cũng là đường cao
AK, BE là hai đường cao của ΔABC và $\{K\} = AK \cap BE$ nên K là trực tâm.
Do đó $CK \perp AB$. □



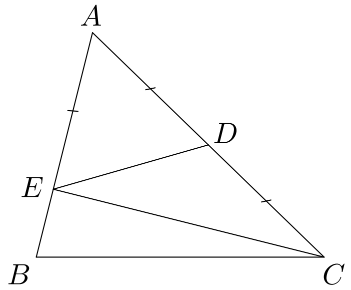
Ví dụ 7 (cách 7). *Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ có $\widehat{A} = 60^o$. D là trung điểm AC. Trên tia AB, lấy E sao cho $AE = AD$. Chứng minh*

a) ΔADE đều.

b) ΔDEC cân.

c) $CE \perp AB$.

Chứng minh



a) ΔADE có $AD = AE$ và $\widehat{A} = 60^o$ nên ΔADE đều.
b) ΔADE đều nên $DE = DA$, mà $DA = DC$ (gt) nên $DE = DC$ hay ΔDEC cân.
c) Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{AED} + \widehat{DEC} = \widehat{EAD} + \widehat{ECD}$
Vậy $\widehat{AEC} = 90^o$ hay $CE \perp AB$. □

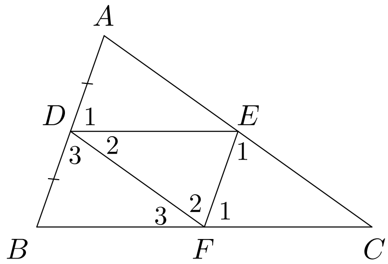
3.4. Đoạn thẳng bằng nhau

Các cách chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau:

1. Hai đoạn thẳng cùng bằng một đoạn thẳng thứ ba.
2. Hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau.
3. Dựa vào tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông.
4. Dựa vào tính chất tam giác cân, tam giác đều.
5. Dựa vào định nghĩa trung điểm đoạn thẳng, đường trung tuyến của tam giác, đường trung trực của đoạn thẳng, tia phân giác của một góc.
6. Dựa vào tính chất giao điểm ba đường phân giác trong tam giác, giao điểm ba đường trung trực trong tam giác.
7. Hai đoạn thẳng cùng bằng tổng, hiệu của hai đoạn thẳng bằng nhau đôi một.

Ví dụ 8 (cách 1, 2). *Cho ΔABC, D là trung điểm AB. Đường thẳng qua D và song song BC cắt AC tại E, đường thẳng qua E và song song AB cắt BC tại F. Chứng minh*
a) $AD = EF$.
b) $\Delta ADE = \Delta EFC$.
c) $AE = EC$.

Chứng minh



a) Ta có

$$DE//BC \Rightarrow \widehat{D}_2 = \widehat{F}_3 \text{ (so le trong)}$$
$$EF//AB \Rightarrow \widehat{D}_3 = \widehat{F}_2 \text{ (so le trong)}$$

Xét ΔDEF và ΔFBD

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{D}_2 = \widehat{F}_3 \\ \widehat{D}_3 = \widehat{F}_2 \\ DF \text{ chung} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DEF = \Delta FBD \text{ (g.c.g)}$$

$\Rightarrow EF = DB$ (2 cạnh tương ứng)
mà $DB = AD$ nên $EF = AD$.
b) Ta có

$$\left.\begin{array}{l} DE//BC \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{B} \text{ (đồng vị)} \\ EF//AB \Rightarrow \widehat{F}_1 = \widehat{B} \text{ và } \widehat{A} = \widehat{E}_1 \text{ (đồng vị)} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{F}_1$$

Xét ΔADE và ΔEFC

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{D}_1 = \widehat{F}_1 \\ AD = EF \text{ (cmt)} \\ \widehat{A} = \widehat{E}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADE = \Delta EFC \text{ (g.c.g)}$$

c) $\Rightarrow AE = EC$ (2 cạnh tương ứng) □

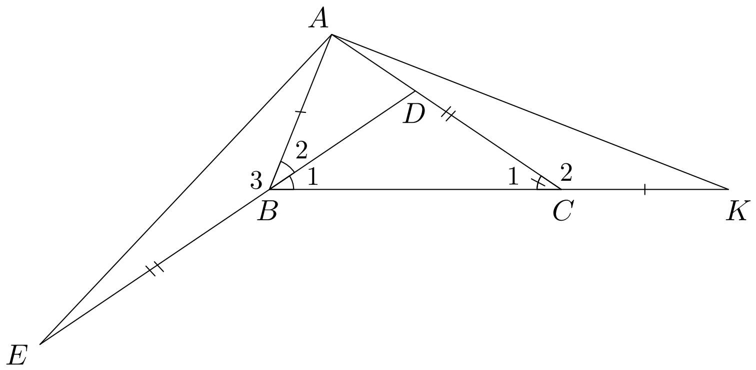
3.5. Góc bằng nhau

Các cách chứng minh hai góc bằng nhau:

1. Hai góc đối đỉnhh hay hai góc so le trong, đồng vị được tạo bởi một đường cắt hai đường song song.
2. Hai góc cùng bằng một góc hay cùng phụ, cùng bù với một góc (hoặc với hai góc tương ứng bằng nhau).
3. Hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau.
4. Dựa vào định nghĩa tia phân giác của một góc.
5. Hai góc đáy của một tam giác cân.
6. Hai góc của một tam giác đều.
7. Hai góc cùng bằng tổng, hiệu của hai góc tương ứng bằng nhau.

Ví dụ 9 (cách 2). *Cho ΔABC có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt AC tại D. Trên tia đối của tia BD, lấy E sao cho $BE = AC$. Trên tia đối của tia CB, lấy K sao cho $CK = AB$. Chứng minh*
a) $\widehat{ACK} = \widehat{ABE}$.
b) $AE = AK$.

Chứng minh



a) Ta có

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{C}_1 = \frac{1}{2}\widehat{B} = \widehat{B}_2\\ \widehat{C}_2 \text{ kề bù } \widehat{C}_1\\ \widehat{B}_3 \text{ kề bù } \widehat{B}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{C}_2 = \widehat{B_3}$$

b) Xét ΔABE và ΔKCA

$$\left.\begin{array}{l}BE = AC \text{ (gt)}\\ AB = CK \text{ (gt)}\\ \widehat{B}_3 = \widehat{C}_2 \text{ (cmt)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABE = \Delta KCA \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow AE = AK$ (2 cạnh tương ứng). □

3.6. Tam giác cân, đều

Các cách chứng minh tam giác cân:

1. Tam giác có hai cạnh hoặc hai góc bằng nhau.
2. Tam giác có một đỉnh nằm trên đường trung trực của cạnh đối diện.
3. Tam giác có hai trong bốn đường sau là trùng nhau: đường trung tuyến, đường cao, đường phân giác xuất phát từ một đỉnh, đường trung trực của cạnh đối diện đỉnh đó.
4. Tam giác có hai đường trung tuyến hoặc hai đường cao bằng nhau.

Các cách chứng minh tam giác đều:

1. Tam giác có ba cạnh bằng nhau.
2. Tam giác có hai góc bằng 60^o.
3. Tam giác cân có một góc 60^o.

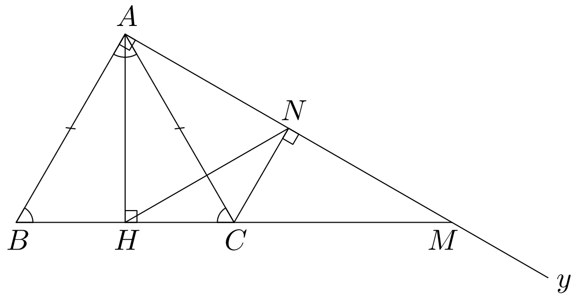
Ví dụ 10. *Cho ΔABC đều có cạnh $10cm$. Từ A, vẽ tia Ay vuông góc với AB, cắt BC tại M.*

a) Chứng minh ΔACM cân.

b) Vẽ CN vuông góc AM tại N. Chứng minh ΔAHN đều.

c) Tính HN.

Chứng minh



a) Ta có

$\widehat{CAM} = \widehat{BAM} - \widehat{BAC} = 90^o - 60^o = 30^o$

ΔABM vuông tại A nên

$$\widehat{M} = 90^o - \widehat{B} = 90^o - 60^o = 30^o$$

$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{M}$ nên ΔACM cân tại C.

b) ΔACN vuông tại N nên $\widehat{ACN} = 90^o - \widehat{CAN} = 90^o - 30^o = 60^o$.

Xét ΔACH vuông tại H và ΔACN vuông tại N

$$\left.\begin{array}{l} AC \text{ chung} \\ \widehat{ACH} = \widehat{ACN} = 60^o \text{ (cmt)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACH = \Delta ACN \text{ (ch.gn)}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AH = AN \text{ (2 cạnh tương ứng)} \\ \widehat{CAH} = \widehat{CAN} = 30^o \text{ (2 góc tương ứng)} \Rightarrow \widehat{HAN} = 60^o \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \Delta AHN$ đều.

c) ΔABC đều nên đường cao AH cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow BH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{10}{2} = 5\text{cm}$

Áp dụng định lí Pythagoras cho ΔABH vuông tại H

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Rightarrow AH = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$\Rightarrow HN = AH = 5\sqrt{3}$ (cm) (ΔAHN đều) □

3.7. Ba điểm thẳng hàng

Các cách chứng minh ba điểm thẳng hàng:

1. Sử dụng hai góc kề bù: Nếu $\widehat{xBA}$ và $\widehat{xBC}$ là hai góc kề bù (hay $\widehat{ABC} = 180^o$) thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.

2. Chứng minh tổng hai trong ba đoạn thẳng tạo bởi ba điểm bằng đoạn còn lại.

3. Một điểm thuộc đường thẳng đi qua hai điểm còn lại.

4. Nếu AB, AC trùng nhau hay cùng song song hoặc vuông góc với đường thẳng khác thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.

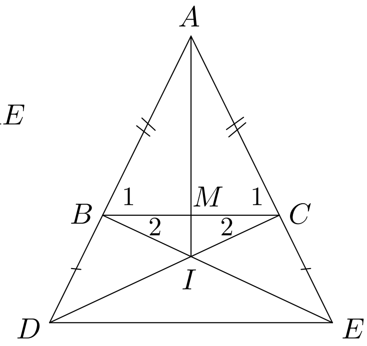
Ví dụ 11 (cách 1). *Cho ΔABC cân tại A. Trên tia đối của tia BA và CA, lần lượt lấy D, E sao cho $BD = CE$. Gọi I là giao điểm của BE và CD. Chứng minh*

a) $IB = IC$, $ID = IE$.

b) $BC//DE$.

c) Ba điểm A, M, I thẳng hàng, với M là trung điểm BC.

Chứng minh



a) Ta có

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \text{ (gt)} \\ BD = CE \text{ (gt)} \end{array}\right\} \Rightarrow AB+BD = AC+CE \text{ hay } AD = AE$$

Xét ΔABE và ΔACD

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \text{ (gt)} \\ AE = AD \text{ (cmt)} \\ \widehat{A} \text{ chung} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABE = \Delta ACD \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow BE = CD$ (2 cạnh tương ứng) (1)
và $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ (2 góc tương ứng)
mà ΔABC cân tại A nên $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$
$\Rightarrow \widehat{ABE} - \widehat{B}_1 = \widehat{ACD} - \widehat{C}_1$
$\Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{C}_2$ hay ΔIBC cân $\Rightarrow IB = IC$ (2)
Từ (1), (2) $\Rightarrow BE - IB = CD - IC$ hay $IE = ID$.
b) ΔABC và ΔADE cân tại A nên $\widehat{B}_1 = \widehat{ADE}$, mà đây là hai góc đồng vị nên $BC//DE$.
c) ΔABC cân tại A nên đường trung tuyến AM cũng là đường cao $\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^o$
ΔIBC cân tại I nên đường trung tuyến IM cũng là đường cao $\Rightarrow \widehat{IMB} = 90^o$
$\Rightarrow \widehat{AMI} = 180^o$ hay ba điểm A, M, I thẳng hàng. □

Ví dụ 12 (cách 4). *Cho ΔABC. D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC. Trên tia đối của tia DC, EB, lần lượt lấy M, N sao cho $DM = DC$, $EN = EB$. Chứng minh*

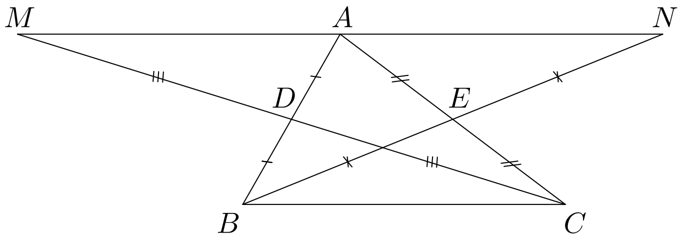
a) $\Delta ADM = \Delta BDC$.

b) $AM//BC$.

c) A, M, N thẳng hàng.

Chứng minh

a) Xét ΔADM và ΔBDC



$DA = DB$ (gt)
$DM = DC$ (gt)
$\widehat{ADM} = \widehat{BDC}$ (đđ)

$\Rightarrow \Delta ADM = \Delta BDC$ (c.g.c)
b) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{DCB}$ (2 góc tương ứng)
mà đây là hai góc so le trong $\Rightarrow AM//BC$ (1).
c) Tương tự, $\Delta AEN = \Delta CEB$ (c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{ANE} = \widehat{EBC}$ (2 góc tương ứng)
mà đây là hai góc so le trong $\Rightarrow AN//BC$ (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AM \equiv AN$ hay A, M, N thẳng hàng. □

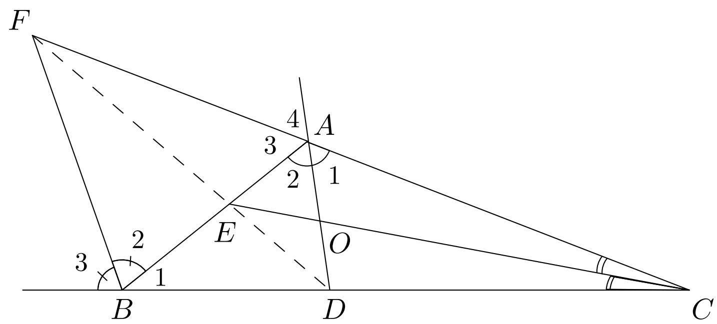
Ví dụ 13 (cách ?). *Cho ΔABC có $\widehat{A} = 120^o$, AD, CE lần lượt là tia phân giác của $\widehat{A}$, $\widehat{C}$, chúng cắt nhau tại O. Tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh B cắt AC tại F. Chứng minh*

a) $BO \perp BF$.

b) $\widehat{BDF} = \widehat{ADF}$.

c) D, E, F thẳng hàng.

Chứng minh



a) ΔABC có CE, AD là hai tia phân giác cắt nhau tại O nên BO cũng là tia phân giác của ΔABC.
ΔABC có BO và BF lần lượt là tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh B nên $BO \perp BF$.
b) Ta có $\widehat{A}_3 = 180^o - \widehat{BAC} = 180^o - 120^o = 60^o$
$\Rightarrow \widehat{A}_4 = 180^o - \widehat{FAD} = 180^o - 120^o = 60^o$
Do đó ΔADB có hai tia phân giác ngoài AF, BF cắt nhau tại F nên DF là tia phân giác trong của ΔADB (1).
Vậy $\widehat{BDF} = \widehat{ADF}$.
c) ΔADC có CO, AB lần lượt là tia phân giác trong và ngoài cắt nhau tại E nên DE

là tia phân giác ngoài của ΔADC (2).
Từ (1), (2) $\Rightarrow DF \equiv DE$ hay ba điểm D, E, F thẳng hàng. $\square$

3.8. Ba đường thẳng đồng quy

Các cách chứng minh ba điểm thẳng hàng:

1. Một đường đi qua giao điểm của hai đường còn lại.

2. Chứng minh một điểm nào đó thuộc cả ba đường.

3. Sử dụng tính chất các đường đồng quy trong tam giác.

3.9. Tổng hợp

Ví dụ 14. *Cho ΔABC vuông tại A, $BC = 10cm$, $AC = 6cm$, đường trung tuyến CM.*

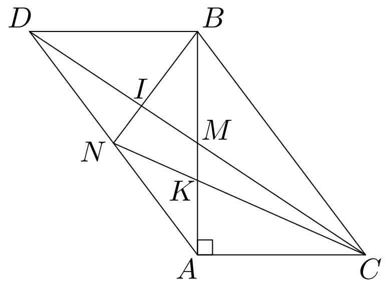
a) Tính BM.

b) Trên tia đối của tia MC, lấy D sao cho $MD = MC$.
Chứng minh $\Delta MAC = \Delta MBD$ và $AC = BD$.

c) Chứng minh $AC + BC > 2CM$.

d) Lấy K thuộc đoạn thẳng AM sao cho $AK = \frac{2}{3}AM$. Gọi N là giao điểm của CK và AD, I là giao điểm của BN và CD. Chứng minh $CD = 3ID$.

Chứng minh



a) Áp dụng định lí Pythagoras cho ΔABC vuông tại A, ta được

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 10^2 - 6^2 = 36$$
$$\Rightarrow AB = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}$$
$$\Rightarrow BM = \frac{AB}{2} = 3 \text{ (cm)}$$

b) Xét ΔMAC và ΔMDB, ta có

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \\ MA = MB \text{ (gt)} \\ MC = MD \text{ (gt)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MAC = \Delta MDB \text{ (c.g.c)}$$

c) $\Rightarrow AC = DB$ (2 cạnh tương ứng)
$\Rightarrow AC+BC = DB+BC > CD$ (BĐT trong ΔBCD)
mà $CD = 2CM$ nên $AC + BC > 2CM$.
d) Xét ΔACD có

$$\left.\begin{array}{l} AM \text{ là đường trung truyến} \\ K \in AM \\ AK = \frac{2}{3}AM \end{array}\right\} \Rightarrow K \text{ là trọng tâm của } \Delta ACD$$

$\Rightarrow CK$ hay CN là đường trung tuyến của ΔACD
$\Rightarrow N$ là trung điểm AD.
ΔABD có hai đường trung tuyến DM và BN cắt nhau tại I
$\Rightarrow I$ là trọng tâm ΔABD
$\Rightarrow ID = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}CD = \frac{1}{3}CD \Rightarrow CD = 3ID$. □

Ví dụ 15. *Cho ΔABC vuông tại A, $AB = 5cm$, $BC = 10cm$.*

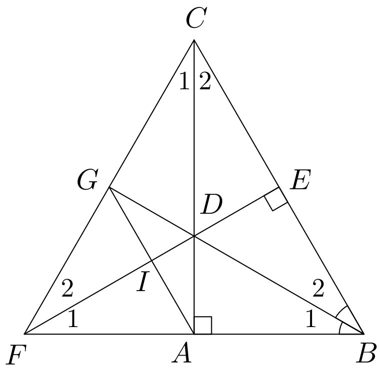
a) Tính AC.

b) Vẽ đường phân giác BD của ΔABC, E là hình chiếu của D trên BC. Chứng minh $\Delta ABD = \Delta EBD$.

c) Gọi F là giao điểm của hai đường ED và BA. Chứng minh $\Delta ABC = \Delta AFC$.

d) Qua A, vẽ đường thẳng song song BC, cắt CF tại G. Chứng minh ba điểm B, D, G thẳng hàng.

Giải



a) Áp dụng định lí Pythagoras cho ΔABC vuông tại A, ta được

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 5^2 = 75$$
$$\Rightarrow AC = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

b) Xét ΔABD vuông tại A và ΔEBD vuông tại E

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \\ BD \text{ chung}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD = \Delta EBD \text{ (ch.gn)}$$

c) Vì $BC = 2AB$ nên $\widehat{C}_2 = 30^o$, $\widehat{ABC} = 60^o$ (1).
ΔBCF có hai đường cao CA, FE cắt nhau tại D nên D là trực tâm
$\Rightarrow BD$ cũng là đường cao của ΔBCF
mà BD là đường phân giác nên ΔBCF cân tại B (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta BCF$ đều. Từ đó $\Delta ABC = \Delta AFC$.
d) Gọi I là giao điểm của FD và AG, K là giao điểm của BD và FC.
Ta có

$$\left.\begin{array}{l}AK // BC \\ BC \perp FE\end{array}\right\} \Rightarrow AK \perp FE$$

Xét ΔKFI và ΔAFI vuông tại I

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2 \\ FI \text{ chung}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta KFI = \Delta AFI \text{ (cgv.gn)}$$

$\Rightarrow IK = IA$ (2 cạnh tương ứng) và $\widehat{K}_1 = \widehat{A}_1$ (2 góc tương ứng)
Xét ΔDKI và ΔDAI vuông tại I

$$\left.\begin{array}{l}DI \text{ chung} \\ IK = IA\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DKI = \Delta DAI \text{ (2cgv)}$$

$\Rightarrow \widehat{K}_2 = \widehat{A}_2$ (2 góc tương ứng)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{DKF} = \widehat{DAF} = 90^o$ hay $DK \perp FC$
mà $BG \perp FC$ nên $K \equiv G$. ■

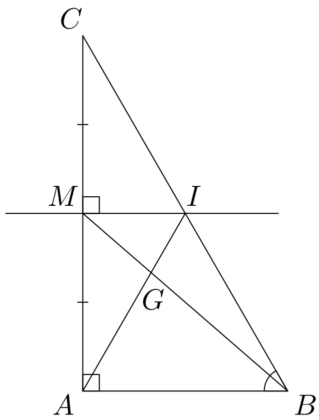
Ví dụ 16. *Cho ΔABC vuông tại A, $\widehat{B} = 60^o$.*

a) *So sánh AB và AC.*

b) *Gọi M là trung điểm AC. Vẽ đường thẳng vuông góc AC tại M, cắt BC tại I. Chứng minh $\Delta\ AIM = \Delta CIM$.*

c) *Chứng minh ΔAIB đều.*

d) *Gọi G là giao điểm của BM và AI. Chứng minh $BC = 6IG$.*



Giải

a) Ta có $\widehat{C} = 90^o - \widehat{B} = 90^o - 60^o = 30^o \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{C} \Rightarrow AC > AB$.

b) MI là đường trung trực của đoạn AC nên $IA = IC$

Xét ΔAIM và ΔCIM, ta có

$$\left.\begin{array}{l} IM \text{ chung} \\ IA = IC \\ MA = MC \text{ (gt)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AIM = \Delta CIM \text{ (c.c.c)}$$

c) $\Rightarrow \widehat{MAI} = \widehat{C} = 30^o$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow \widehat{IAB} = 90^o - \widehat{MAI} = 60^o \Rightarrow \Delta AIB$ có hai góc có số đo 60^o nên là tam giác đều.

d) Ta có

$$\left.\begin{array}{l} IA = IC \text{ (cmt)} \\ IA = IB \text{ do } \Delta AIB \text{ đều} \end{array}\right\} \Rightarrow IA = IB = IC = \frac{1}{2}BC$$

ΔABC có

$$\left.\begin{array}{l} AI, BM \text{ là đường trung tuyến} \\ AI\ \cap\ BM = \{G\} \end{array}\right\} \Rightarrow G \text{ là trọng tâm của } \Delta ABC$$

$$\Rightarrow IG = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BC = \frac{1}{6}BC \Rightarrow BC = 6IG$$

. ■

Ví dụ 17. *Cho ΔABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^o$), vẽ $AH \perp BC$ tại H.*

a) Chứng minh $\Delta ABH = \Delta ACH$.

b) Cho $AH = 4$cm, $BH = 3$cm. Tính AB.

c) Qua H, vẽ đường thẳng song song AC, cắt AB tại M. Gọi G là giao điểm của CM và AH. Chứng minh G là trọng tâm ΔABC và tính AG.

d) Chứng minh $CG < \dfrac{CA+CB}{3}$.

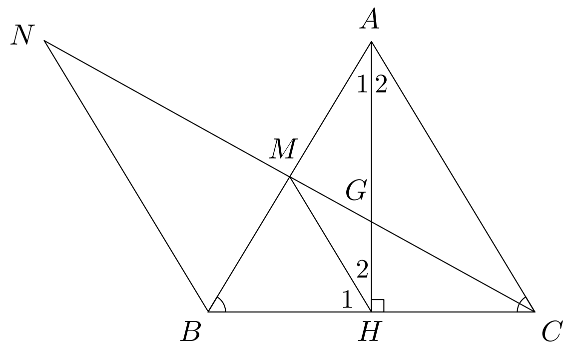
Chứng minh

a), b) Học sinh tự chứng minh.

c) Vì $MH//AC$ nên $\widehat{ACB} = \widehat{H}_1$

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{H}_1$

$\Rightarrow \Delta MBH$ cân tại $M \Rightarrow MB = MH$ (1).



Ta có

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}_1 \text{ phụ với } \widehat{B}\\ \widehat{H}_2 \text{ phụ với } \widehat{H}_1\\ \widehat{B} = \widehat{H}_1 \text{ (cmt)}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{H}_2$$

$\Rightarrow \Delta MAH$ cân tại M.

$\Rightarrow MH = MA$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MA = MB$ hay M là trung điểm AB.

$\Rightarrow CM$ là đường trung tuyến của ΔABC.

ΔABC cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung tuyến,

mà $\{G\} = CM \cap AH$.

Vậy G là trọng tâm của ΔABC.

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.4 = \frac{8}{3} \text{ (cm)}$$

d) Lấy N sao cho M là trung điểm NC.

Xét ΔMBN và ΔMAC

$$\left.\begin{array}{l}MN = MC\\ MA = MB\\ \widehat{NMB} = \widehat{CMA} \text{ (đđ)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MBN = \Delta MAC$$

$\Rightarrow BN = CA$ (2 cạnh tương ứng)

Ta có $NC < BN + CB$ (BĐT trong ΔCBN)

$$\Rightarrow 2CM < CA + CB$$

Vì CM là đường trung tuyến, G là trọng tâm ΔABC nên

$$\Rightarrow 2.\frac{3}{2}CG < CA + CB \Rightarrow CG < \frac{CA+CB}{3}$$

□

Chương 4

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

4.1. Đề bài

Bài tập 1. Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ AK vuông góc BC tại K. Trên tia đối của tia KA, lấy M sao cho $KA = KM$.

a) Chứng minh $\Delta KAB = \Delta KMB$.

b) Trên tia KB, lấy D sao cho $KD = KC$. Tia MD cắt AB tại N.
Chứng minh $MN \perp AB$.

c) So sánh $MD + DB$ với AB.

Bài tập 2. Cho ΔABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^o$). Vẽ tia phân giác AH của $\widehat{A}$ ($H \in BC$), biết $AB = 15$cm, $BH = 9$cm.

a) Chứng minh $\Delta ABH = \Delta ACH$.

b) Vẽ trung tuyến BD, cắt AH tại G. Chứng minh G là trọng tâm của ΔABC. Tính AG.

c) Qua H vẽ đường thẳng song song AC, cắt AB tại E. Chứng minh ba điểm C, G, E thẳng hàng.

Bài tập 3. Cho ΔABC vuông tại A và $\widehat{C} = 30^o$. Trên cạnh BC, lấy D sao cho $BD = BA$.

a) Chứng minh ΔABD đều, tính $\widehat{DAC}$.

b) Vẽ DE vuông góc AC tại E. Chứng minh $\Delta ADE = \Delta CDE$.

c) Cho $AB = 5$cm. Tính BC và AC.

d) Vẽ AH vuông góc BC tại H. Chứng minh $AH + BC > AB + AC$.

Bài tập 4. Cho ΔABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC và CB, lần lượt lấy M, N sao cho $BM = CN$. Vẽ BH vuông góc AM tại H, CE vuông góc AN tại E.

a) Biết $AB = 10$cm, $BH = 6$cm. Tính AH.

b) Chứng minh ΔAMN cân.

c) Chứng minh $BH = CE$.

d) Gọi K là giao điểm của BH và CE. Chứng minh $\Delta AHK = \Delta AEK$.

e) Chứng minh $KH + KE < 2KA$.

Bài tập 5. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 6$cm, $AC = 8$cm và đường trung tuyến AM.

a) Tính AM.

b) Trên tia đối của tia MA, lấy D sao cho $MD = MA$. Chứng minh $\Delta AMB = \Delta DMC$.

c) Chứng minh $AC \perp DC$.

d) Chứng minh $AM < \dfrac{AB + AC}{2}$.

4.2. Gợi ý, lời giải

Gợi ý bài 1.

a) $\Delta KAB = \Delta KMB$ (2cgv)

b) $\Delta KAC = \Delta KMD$ (2cgv) $\Rightarrow \widehat{DMA} = \widehat{MAC} \Rightarrow MD//AC$

c) ΔDAM có DK là đường cao cũng là đường trung tuyến nên nó cân tại D

$\Rightarrow MD = AD$

■

Gợi ý bài 2.

b) $AG = 8$cm.

c) $EH//AC$ nên $\widehat{EHB} = \widehat{ACB}$ (đồng vị) $\Rightarrow EH = EB$.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{EHA} \text{ phụ } \widehat{EHB}\\ \widehat{HAC} \text{ phụ } \widehat{C}\\ \widehat{EHB} = \widehat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{EHA} = \widehat{HAC} = \widehat{HAE}$$

$\Rightarrow EH = EA$

$\Rightarrow E$ là trung điểm AB nên CE là đường trung tuyến của ΔABC.

G là trọng tâm nên $G \in CE$ hay ba điểm C, G, E thẳng hàng.

■

Gợi ý bài 3.

a) Tam giác cân có góc 60^o, $\widehat{DAC} = 30^o$.

b) $\Delta ADE = \Delta CDE$ (cgv.gn).

c) $BC = 10$cm, $AC = 5\sqrt{3}$cm.

d) Cách 1:

$$AH + BC = \frac{AC}{2} + 2AB = (AB + AC) + AB - \frac{AC}{2} = (AB + AC) + (AD - AE)$$

Cách 2:

$$AH + BC = \frac{AC}{2} + 2AD = (AE + AD) + AD$$
$$AB + AC = AD + 2AE = (AE + AD) + AE$$

Trong cả hai cách, vì $AD > AE$ hay $AD - AE > 0$ nên $AH + BC > AB + AC$.

■