

# HÌNH HỌC

## Bài 1. TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU ĐẶC BIỆT CỦA HAI TAM GIÁC VUÔNG

### Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông:

**TH1:** cạnh huyền – góc nhọn:

Nếu cạnh huyền và góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau theo trường hợp cạnh huyền – góc nhọn.

**TH2:** cạnh huyền – cạnh góc vuông:

Nếu cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau theo trường hợp cạnh huyền – cạnh góc vuông.

-----☆☺☆-----

**Bài 1.** Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm. Qua điểm O vẽ đường thẳng xy không vuông góc với AB. Vẽ  $AH \perp xy$  tại H và  $BK \perp xy$  tại K. Chứng minh :  $\Delta AOH = \Delta BOK$ .

**Bài 2.** Cho I là trung điểm đoạn thẳng MN. Qua điểm I vẽ đường thẳng d bất kỳ. Vẽ  $ME \perp d$  tại E và  $NF \perp d$  tại F.

1/ Chứng minh :  $ME = NF$

2/ Chứng minh :  $MF = NE$

**Bài 3.** Cho  $\Delta ABC$  nhọn có  $AH \perp BC$  tại H. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho  $AD = AB$ . Kẻ  $DI \perp AH$  tại I. Chứng minh :  $BH = ID$ .

**Bài 4.** Cho  $\Delta ABC$  nhọn có đường cao AH. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho  $AD = AC$ . Kẻ  $DE \perp AH$  tại E. Chứng minh : A là trung điểm của EH.

**Bài 5.** Cho  $\Delta ABC$ , D thuộc tia đối của tia AB và E thuộc tia đối của tia AC sao cho  $AD = AB$  và  $AE = AC$ . Kẻ  $BH \perp AC$  tại H và  $DK \perp AE$  tại K.

1/ Chứng minh :  $\Delta ABC = \Delta ADE$

2/ Chứng minh :  $\Delta BHC = \Delta DKE$ . Suy ra  $CBH = EDK$ .

**Bài 6.** Cho  $\Delta ABC$ , D thuộc tia đối của tia AB và E thuộc tia đối của tia AC sao cho  $AD = AC$  và  $AE = AB$ . AH, AK lần lượt là đường cao của  $\Delta ABC$  và  $\Delta DAE$ .

1/ Chứng minh :  $\Delta ABC = \Delta ADE$

2/ Chứng minh :  $BH = EK$ .

3/ Chứng minh :  $HAC = DAK$ .

**Bài 7.** Cho  $\Delta ABC$ . Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho  $AD = AC$ . Kẻ DE và CF cùng vuông góc với đường thẳng AB tại E và F.

1/ Chứng minh : A là trung điểm của EF.

2/ Chứng minh :  $DF \parallel CE$ .

**Bài 8.** Cho  $\Delta ABC$  có AM là đường trung tuyến. Kẻ BE và CF cùng vuông góc với đường thẳng AB tại E và F.

1/ Chứng minh :  $BE = CF$

2/ Chứng minh :  $BF \parallel CE$ .

3/ Chứng minh :  $AE + AF = 2AM$ .

**Bài 9.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = AC$ . Kẻ  $BE \perp AC$  tại E và  $CF \perp AB$  tại F. BE cắt CF tại H.

1/ Chứng minh :  $\triangle ABC = \triangle ACF$  2/ Chứng minh :  $\triangle HBC$  cân tại H.

**Bài 10.** Cho  $xOy$ . Lấy  $A \in Ox$ ,  $B \in Oy$  sao cho  $OA = OB$ . Kẻ  $AE \perp Oy$  tại E và  $BF \perp Ox$  tại F.

1/ Chứng minh :  $AE = BF$  2/ Chứng minh :  $BAE = ABF$

**Bài 11.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $AB < AC$ . Kẻ  $AH \perp BC$  tại H. Về phía ngoài  $\triangle ABC$  vẽ đoạn thẳng  $BD \perp AB$ ,  $BD = AB$  và  $CE \perp AC$ ,  $CE = AC$ . Kẻ  $DM \perp BC$  tại M và  $EN \perp BC$  tại N.

1/ So sánh :  $DBM$  với  $BAH$ ;  $ECN$  với  $CAH$ .

2/ Chứng minh :  $DM = BH$  và  $EN = CH$ .

**Bài 12.** Cho  $xOy$  có tia phân giác Ot. Từ  $A \in Ot$  vẽ  $AB \perp Ox$  tại B và  $AC \perp Oy$  tại C. Chứng minh :  $AB = AC$ .

**Bài 13.** Cho  $xOy$  có tia phân giác Ot. Từ  $M \in Ot$  vẽ  $MH \perp Ox$  tại H và  $MK \perp Oy$  tại K. Chứng minh : MO là tia phân giác của góc  $HMK$ .

**Bài 14.** Cho  $xOy$  có  $A \in Ox$ ,  $B \in Oy$  sao cho  $OA = OB$ . Đường vuông góc với Ox tại A và đường vuông góc với Oy tại B cắt nhau tại C. Chứng minh : OC là tia phân giác của góc  $xOy$ .

**Bài 15.** Cho  $xOy$  khác góc bẹt. Lấy điểm A bên trong  $xOy$  rồi kẻ AH vuông góc với Ox tại H và AK vuông góc với Oy tại K. Giả sử có  $AH = AK$ . Chứng minh : OA là tia phân giác  $xOy$ .

**Bài 16.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở D. Chứng minh :  $\triangle DBC$  cân.

**Bài 17.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có AH là đường cao. Chứng minh :  $\triangle AHB = \triangle AHC$ .

**Bài 18.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A = 105^\circ$ ,  $B = 60^\circ$ . Tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Qua điểm A vẽ đường thẳng vuông góc với BD tại O, đường thẳng này cắt BC tại E.

1/ Chứng minh :  $\triangle AOB = \triangle EOB$  2/ Tính :  $\angle DAE$

3/ Chứng minh :  $\triangle ADE$  vuông cân tại D.

**Bài 19.** Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại A có AH là đường cao. Trên các tia đối của tia AC và BA lần lượt lấy các điểm M, N sao cho  $BN = AM$ .

1/ Định dạng  $\triangle AHB$

2/ Chứng minh :  $\triangle AHM = \triangle BHN$

3/ Chứng minh :  $\triangle MHN$  vuông cân tại H.

**Bài 20.** Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại A có  $AH \perp BC$  tại H. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho  $CE = AD$ .

1/ Định dạng  $\triangle AHB$ ,  $\triangle ACH$ .

2/ Chứng minh :  $\triangle ADH = \triangle CEH$

3/ Chứng minh :  $\triangle HDE$  vuông cân.

**Bài 21.** Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn. Kẻ  $BD \perp AC$  tại D và  $CE \perp AB$  tại E. Giả sử có  $BD = CE$ . Chứng minh :  $\triangle ABC$  cân.



## **Bài 1. QUAN HỆ GIỮA CẠNH VÀ GÓC ĐỐI DIỆN TRONG TAM GIÁC**

**Định lý:** Trong một tam giác, đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn. Ngược lại, đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

**Vd:**  $\triangle ABC$  có  $A > B > C \Rightarrow BC > AC > AB$

**Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 5\text{cm}$ ,  $AC = 7\text{cm}$ . So sánh B và C.

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 6\text{cm}$ ,  $BC = 9\text{cm}$ . So sánh A và C.

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AC = 10\text{cm}$ ,  $BC = 12\text{cm}$ . So sánh A và B.

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$ ,  $BC = 5\text{cm}$ . So sánh các góc của  $\triangle ABC$ .

**Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 5\text{cm}$ ,  $AC = 6\text{cm}$ ,  $BC = 7\text{cm}$ . So sánh các góc của  $\triangle ABC$ .

**Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  có  $B = 60^\circ$ ,  $C = 40^\circ$ . So sánh các cạnh của  $\triangle ABC$ .

**Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 5\text{cm}$ ,  $AC = 12\text{cm}$ ,  $BC = 13\text{cm}$ .

1/  $\triangle ABC$  là tam giác gì ? 2/ So sánh các góc của  $\triangle ABC$ .

**Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $AB = 6\text{cm}$ ,  $BC = 10\text{cm}$ .

1/ Tính AC.

2/ So sánh các góc của  $\triangle ABC$ .

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $B = 50^\circ$ . So sánh các cạnh của  $\triangle ABC$ .

**Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có  $A = 50^\circ$ . So sánh các cạnh của  $\triangle ABC$ .

**Bài 11.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $AB = 10\text{cm}$ ,  $AC = 24\text{cm}$ .. So sánh các góc của  $\triangle ABC$ .

**Bài 12.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có  $B = 70^\circ$ . So sánh các cạnh của  $\triangle ABC$ .

**Bài 13.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có  $B = 40^\circ$ . So sánh các cạnh của  $\triangle ABC$ .

**Bài 14.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có góc ngoài đỉnh A bằng  $100^\circ$ . So sánh các cạnh của  $\triangle ABC$ .

**Bài 15.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A = 60^\circ$ ,  $B = 80^\circ$  và có phân giác AD.

1/ Tính  $\angle ADB$ . 2/ So sánh các cạnh của  $\triangle ABD$ .

3/ So sánh các cạnh của  $\triangle ADC$ .

**Bài 16.** Cho  $\triangle ABC$  có góc ngoài đỉnh A bằng  $120^\circ$ .  $B = 70^\circ$ . Kẻ phân giác BE.

1/ Tính  $\angle AEB$ . 2/ So sánh các cạnh của  $\triangle ABE$ .

3/ So sánh các cạnh của  $\triangle BEC$ .

**Bài 17.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $B = 60^\circ$ . Kẻ phân giác BD.

1/ Tính  $\angle ADB$  và  $\angle BDC$ . 2/ So sánh các cạnh của  $\triangle ABD$ .

3/ So sánh các cạnh của  $\triangle BDC$ .

**Bài 18.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $C = 40^\circ$ . Kẻ phân giác CE.

1/ Tính  $\angle AEC$  và  $\angle BEC$ . 2/ So sánh các cạnh của  $\triangle AEC$ .

3/ So sánh các cạnh của  $\triangle BEC$ .

**Bài 20.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại B. Kéo dài trung tuyến AM lấy  $MD = MA$ .

1/ So sánh AB với CD; CD với AC. 2/ So sánh  $\angle BAM$  với  $\angle MAC$ .

**Bài 21.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB < AC < BC$ .

1/ So sánh các góc của  $\triangle ABC$ . 2/ Chứng minh :  $C < 60^\circ$ .

**Bài 22.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có  $B < 60^\circ$ .

1/ Chứng minh :  $A > 60^\circ$  2/ So sánh các cạnh của  $\triangle ABC$ .

**Bài 23.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $B > 45^\circ$ .

1/ So sánh B và C 2/ So sánh các cạnh của  $\triangle ABC$ .

**Bài 24.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $C > 45^\circ$ .

1/ So sánh B và C 2/ So sánh các cạnh của  $\triangle ABC$ .

**Bài 25.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có  $A < 60^\circ$ .

1/ Chứng minh :  $B > 60^\circ$  2/ Chứng minh :  $AB > BC$  và  $AC > BC$ .

**Bài 26.** Cho  $\triangle ABC$  đều. Lấy điểm D bất kỳ trên cạnh BC.

1/ Chứng minh :  $\angle ADB > 60^\circ$  2/ Chứng minh :  $AB > AD$ .  
 3/ So sánh các cạnh của  $\triangle ABD$ .

**Bài 27.** Cho  $\triangle ABC$  đều. Lấy điểm I bất kỳ trên cạnh BC.

1/ Chứng minh :  $\angle AIC > 60^\circ$  2/ Chứng minh :  $AC > AI$ .  
 3/ So sánh các cạnh của  $\triangle AIC$ .

**Bài 28.** Cho  $\triangle ABC$  có phân giác AD.

1/ Chứng minh :  $\angle ADC = \angle ABC + \frac{1}{2} \angle BAC$  2/ So sánh AC và DC.

**Bài 29.** Cho  $\triangle ABC$  có phân giác AD.

1/ Chứng minh :  $\angle ADB = \angle ACB + \frac{1}{2} \angle BAC$  2/ So sánh AB và BD.

**Bài 30.** Cho  $\triangle ABC$  có phân giác BD.

1/ Chứng minh :  $\angle ADB = \angle ACB + \frac{1}{2} \angle ABC$  và  $\angle BDC = \angle BAC + \frac{1}{2} \angle ABC$   
 2/ So sánh BC và DC. 3/ So sánh AB và AD.

**Bài 31.**  $\triangle ABC$  cân tại A có đường cao AH. Kẻ  $HE \perp AB$  ở E,  $HF \perp AC$  tại F.

a/ Chứng minh : AH là đường trung trực của EF  
 b/ Kẻ  $CI \perp EH$  tại I. Chứng minh : CH là tia phân giác  $\angle FCI$ .  
 c/ Chứng minh :  $BF > IC$ .

**Bài 32.**  $\triangle ABC$  có  $AB < AC$ , AD phân giác. Trên AC lấy  $AE = AB$ .

a/ Chứng minh :  $\angle DEC > \angle ADB$ . b/ So sánh DB và DC

**Bài 33.**  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn và  $AB < AC$ . Hai đường cao BD, CE cắt nhau tại I.

a/ So sánh  $\angle ABD$  và  $\angle ACE$ . b/ Chứng minh :  $IB < IC$ .  
 c/ Chứng minh :  $CE > BD$ .

**Bài 34.**  $\triangle ABC$  cân tại A. Trên BC lấy  $BD = DE = EC$ .

a/ Chứng minh :  $BA > AD$ .  
 b/ Trên tia đối của tia DA lấy  $DF = DA$ . Chứng minh :  $EF = AB$ .  
 c/ Chứng minh :  $\angle BAD < \angle DAE$

**Bài 35.**  $\triangle ABC$  cân ở A có điểm D trong tam giác sao cho  $\angle ADB > \angle ADC$ . Trên nửa mặt phẳng bờ là AC không chứa B, dựng tia Ax sao cho  $\angle CAx > \angle BAD$ . Trên Ax lấy  $AE = AD$ . Chứng minh :

a/  $\angle AEC = \angle ADB$  b/  $\angle CDE < \angle CED$   
 c/  $\angle DB < \angle DC$ .

**Bài 36.**  $\triangle ABC$  có  $AB > AC$ , trung tuyến AD.

a/ So sánh  $\angle ADB$  và  $\angle ADC$ .  
 b/ Lấy  $E \in AD$ . So sánh  $\angle EBC$  và  $\angle ECB$ , EB và EC.  
 c/ Điểm M  $\in$  tia đối tia DA. So sánh MC và MB.

**Bài 37.**  $\triangle ABC$  có  $AB > AC$ , D trung điểm BC. Trên AB và AC lấy  $BE = CF$ . Chứng minh :  $DEF = DFE$ .

**Bài 38.**  $\triangle ABC$  cân tại A trong tam giác lấy điểm M sao cho  $MBC > MCB$ . Chứng minh :  $MAC > MAB$

**Bài 39.**  $\triangle ABC$  có  $C = 50^\circ$ , tia phân giác ngoài Cx nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A. Trên tia Cx lấy  $CD = CB$ .

a/ So sánh AB và AD.

b/ Trên tia đối của tia CD lấy  $CC' = CA$ . Chứng minh :  $\triangle CBC' = \triangle CDA$ .

c/ Chứng minh :  $DA + DB > AC + BC$ .

-----☆☺☆-----

## **Bài 1. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC – ĐƯỜNG XIÊN – HÌNH CHIẾU**

### **Dạng 1. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG XIÊN VÀ ĐƯỜNG VUÔNG GÓC**

#### **Định lý quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc:**

Trong 2 đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng, đường vuông góc ngắn nhất.

Ta có  $\begin{cases} MH \text{ là đường vuông góc kẻ từ M lên d} \\ MK \text{ là đường xiên kẻ từ M lên d} \end{cases}$

$\Rightarrow MK > MH$

**Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn. Kẻ  $AH \perp BC$  tại H.

1/ Chứng minh :  $AC > AH$

2/ Chứng minh :  $AB > AH$

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A.

1/ Chứng minh :  $AB > BC$

2/ Chứng minh :  $AC < BC$

**Bài 3.** Chứng minh rằng trong  $\triangle ABC$ , cạnh huyền BC là cạnh lớn nhất.

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn. Kẻ  $AH \perp BC$  tại H.

1/ Chứng minh :  $AH < AB$  và  $AH < AC$

2/ Chứng minh :  $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$

**Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn. Kẻ  $BD \perp AC$  tại D,  $CE \perp AB$  tại E.

1/ Chứng minh :  $AB > BD$

2/ Chứng minh :  $AC > CE$

3/ Chứng minh :  $AB + AC > BD + CE$

**Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn. Kẻ  $BD \perp AC$  tại D,  $CE \perp AB$  tại E.

1/ Chứng minh :  $BC > BD$

2/ Chứng minh :  $BC > CE$

3/ Chứng minh :  $BC > \frac{BD + CE}{2}$

**Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn. Kẻ  $BD \perp AC$  tại D,  $CE \perp AB$  tại E.

1/ Chứng minh :  $AB + AC > BD + CE$

2/ Chứng minh :  $BC > \frac{BD + CE}{2}$

**Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có AH là đường cao

1/ Chứng minh :  $AC > AH$  và  $AC < BC$

2/ Chứng minh :  $AH < BC$

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$ , D nằm giữa A và C (BD không vuông góc với AC). Gọi E và F là chân đường vuông góc hạ từ A và C đến đường thẳng BD.

1/ Chứng minh :  $AE < AD$

2/ Chứng minh :  $AE + CF < AC$

**Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có đường phân giác BD. Kẻ  $DH \perp BC$  tại H.

1/ So sánh  $\triangle ABD$  và  $\triangle HBD$

2/ Chứng minh :  $DA < DC$

**Bài 11.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A. Kẻ  $AH \perp BC$  tại H. Trên BC lấy điểm K sao cho  $BK = BA$ , trên AC lấy I sao cho  $AI = AH$ .

1/ Chứng minh :  $\triangle ABK$  cân

2/ Chứng minh :  $BAH = ACB$

3/ Chứng minh :  $HAK = KAI$ 4/ Chứng minh :  $AC \perp KI$ 5/ Chứng minh :  $BC - AB > AC - AH$ 6/ Chứng minh :  $AH + BC > AB + AC$ 

**Bài 12.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, M là trung điểm của AC. Gọi E, F là chân đường vuông góc vẽ từ A và C đến đường thẳng BM.

1/ Chứng minh :  $ME = MF$ 2/ Chứng minh :  $BE + BF = 2MB$ 3/ Chứng minh :  $AB < BM$ 4/ Chứng minh :  $\frac{BE + BF}{2} > AB$ 

**Bài 13.** Cho  $\triangle DEF$ , I là trung điểm của EF. Từ E và F kẻ  $EH \perp DI$  tại H;  $FK \perp DI$  tại K;

1/ Chứng minh :  $IH = IK$ 2/ Chứng minh :  $DE + DF > DH + DK$ 3/ Chứng minh :  $DH + DK = 2DI$ 4/ Chứng minh :  $DE + DF > 2DI$ 

**Bài 14.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A. Lấy D bất kỳ trên cạnh AB và E thuộc tia đối của tia CA sao cho  $CE = BD$ . Kẻ DH và EK cùng vuông góc với đường thẳng BC tại H và K.

1/ Chứng minh :  $\triangle BHD = \triangle CKE$ 2/ Chứng minh :  $BC = HK$ 3/ Chứng minh :  $BC < DE$ 

**Bài 15.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $AB < AC$  và đường cao AE. Tia phân giác của góc B cắt AE tại H. Kẻ  $FH \perp AB$  tại F.

1/ So sánh HF và HE

2/ Chứng minh :  $HC > HF$ 

**Bài 16.** Cho  $\angle xOy = 60^\circ$  và tia phân giác Oz. Lấy  $M \in Ox$  và  $N \in Oy$ . Kẻ NH và NK cùng vuông góc với Oz tại H và K.

1/ Chứng minh :  $OM + ON = 2(MH + NK)$ 2/ So sánh  $OM + ON$  với  $2MN$ .

**Bài 17.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $AB > AC$ . Kẻ đường cao BD và CE. Lấy điểm F thuộc AB với  $AF = AC$ . Kẻ  $FI \perp AC$  tại I.

1/ So sánh FI và CE.

2/ Kẻ  $FH \perp BD$  tại H. Chứng minh :  $FI = HD$ 3/ Chứng minh :  $AB - AC > BD - CE$ .

**Bài 18.** Cho  $\triangle ABC$  đều, trên BC lấy D, trên AC lấy E sao cho  $BD = CE$ . Kẻ  $Cx$  là phân giác góc C và từ D, E kẻ  $DH \perp Cx$  tại H,  $EK \perp Cx$  tại K.

1/ Chứng minh :  $\triangle DHC, \triangle EKC$  là nửa tam giác đều.2/ Chứng minh :  $CD = 2DH, CE = 2EK$ 3/ Chứng minh :  $DE > \frac{BC}{2}$ .

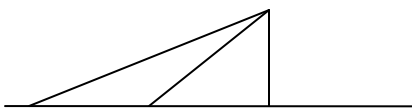
4/ Xác định vị trí của D, E để độ dài DE đạt giá trị nhỏ nhất.

----- ☆ ☺ ☆ -----

## **Dạng 2. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU**

### **Định lý quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc:**

Trong 2 đường xiên kẻ từ điểm nằm ngoài đường thẳng đến một đường thẳng. Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn. Ngược lại, đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.



Ta có  $\left\{ \begin{array}{l} HA \text{ là hình chiếu của đường xiên MA lên } d \\ HB \text{ là hình chiếu của đường xiên MB lên } d \\ HB > HA \end{array} \right.$

$\Rightarrow MB > MA$  (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu)

- Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn. Kẻ  $AH \perp BC$  tại H. Biết rằng  $HB > HC$ . Chứng minh :  $AC > AB$ .
- Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn và  $AB > AC$ . Kẻ  $AH \perp BC$  tại H. Trên AH lấy điểm D. Chứng minh  $BH > CH$ ,  $BD > CD$ .
- Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn và  $AB < AC$ . Kẻ  $AH \perp BC$  tại H. Trên AH lấy điểm D.  
 1/ Chứng minh :  $BH < CH$     b/ Chứng minh :  $BD < CD$
- Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, trên tia đối của tia AC lấy D sao cho  $AD < AC$ .  
 1/ Tìm hình chiếu của BC và BD lên đường thẳng AC.  
 2/ So sánh BC và BD.
- Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB < AC$ . Kẻ  $AE \perp BC$  tại E, tia phân giác của góc B cắt AE tại H. Kẻ  $HF \perp AB$  tại F. Chứng minh :  $HC > HF$ .
- Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A, H là trung điểm của BC, M nằm giữa H và B.  
 1/ Chứng minh :  $AH \perp BC$     2/ Chứng minh :  $AH < AC$   
 3/ Chứng minh :  $AM < AB$     4/ Chứng minh :  $AH < AM < AC$
- Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A. Lấy  $D \in AB$  và  $E \in AC$  ( $D \neq A, B; E \neq A, C$ )  
 1/ Tìm hình chiếu của DE, DC lên AC; của CD, CB lên AB.  
 2/ So sánh : DE và DC; DE và BC.
- Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  có điểm D nằm trong tam giác và  $AD = AB$ . Tia BD cắt đoạn AC tại I. H là trung điểm của BD.  
 1/ Chứng minh :  $AH \perp BD$     2/ So sánh AD với AI  
 3/ Chứng minh :  $AB < AC$ .
- Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $B > C$ . AH là đường cao thuộc cạnh BC, M là điểm thuộc đoạn HB, N là điểm nằm trên tia đối của tia BC.  
 1/ Chứng minh :  $HB < HC$     2/ Chứng minh :  $AM < AB < AN$
- Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có H là trung điểm của BC.  
 1/ Tính :  $AHB$   
 2/ Lấy điểm M trên đoạn thẳng HB và điểm N trên đoạn thẳng HC sao cho  $HM < HN$ . So sánh các đoạn thẳng AB, AM và AN.
- Bài 11.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $B < C$ . Gọi H là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng BC.  
 1/ So sánh : HB và HC.  
 2/ Lấy điểm M trên tia đối của tia BC và điểm N trên đoạn thẳng HC. So sánh AM và AN.
- Bài 12.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có đường phân giác BD. Lấy điểm E trên tia đối của tia AC sao cho  $AE = AC$ .  
 1/  $\triangle BCE$  là tam giác gì ?    2/ So sánh BE với BD.  
 3/ So sánh DA với DC.
- Bài 13.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có đường phân giác BD. Kẻ  $DH \perp BC$  tại H.  
 1/ So sánh DA với DH.    2/ Chứng minh :  $DA < DC$ .  
 3/ Lấy điểm E trên tia đối của tia AC sao cho  $AE < AD$ . So sánh BE với BC.
- Bài 14.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $B > C$  và điểm H là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng BC. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho  $HD = HA$ .  
 1/  $\triangle BAD$ ,  $\triangle CAD$  là tam giác gì ?    2/ So sánh BH với CH và DC với DB.
- Bài 15.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có H là trung điểm của BC. Lấy điểm D trên đoạn thẳng HB và E trên đoạn HC sao cho  $BD < CE$ .  
 1/ Chứng minh :  $HD > HE$ .    2/ So sánh  $ADE$  với  $AED$ .
- Bài 16.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A. Lấy điểm D bất kỳ trên đoạn thẳng AC và điểm E tia đối của tia AC sao cho  $AE = AC$   
 1/ So sánh AE với AD.    2/ Chứng minh :  $BDE > BED$

**Bài 17.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có điểm H là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng BC và  $B > C$ .

1/ Chứng minh :  $HB < HC$

2/ Lấy điểm D bất kỳ trên tia đối của tia HA. So sánh  $\angle DBC$  với  $\angle DCB$ .

**Bài 18.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $B > C$ . Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của điểm A lên BC.

1/ So sánh HB với HC.

2/ Chứng minh điểm H nằm giữa hai điểm B và M.

**Bài 19.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $B < C$ . Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của điểm A lên BC.

1/ So sánh HB với HC.

2/ Chứng minh điểm H nằm giữa hai điểm C và M.

-----☆☺☆-----

### BÀI TẬP LÌM THÊM : ĐOẠN VUÔNG GÓC – ĐOẠN XIÊN – HÌNH CHIẾU

**Bài 1.**  $\triangle ABC$  cân tại A có I trung điểm BC. D thuộc tia đối tia CI. So sánh AD với AB.

**Bài 2.**  $\triangle ABC$  có  $AB > AC$ . Kẻ đường cao AH, lấy điểm D bất kỳ trên AH. So sánh DC và DB.

**Bài 3.**  $\triangle ABC$  vuông tại A và điểm E thuộc cạnh AC

a/ Tìm hình chiếu của BE, BC xuống AC

b/ Chứng minh :  $BE < BC$

c/ Lấy  $I \in AB$ . Chứng minh :  $IE < BC$

**Bài 4.**  $\triangle ABC$  cân tại A có  $M \in BC$ . Chứng minh :  $AM < AC$

**Bài 5.**  $\triangle ABC$  vuông tại A có đường cao AH. Chứng minh :  $AH < \frac{AB + AC}{2}$

**Bài 6.**  $\triangle ABC$  vuông tại A có phân giác BD. Chứng minh :  $DA < DC$ .

**Bài 7.**  $\triangle ABC$  có  $AB < AC$ , H là giao điểm của đường cao AE và phân giác góc B. Kẻ  $HF \perp AB$  tại F. Chứng minh :  $HC > HF$ .

**Bài 8.**  $\triangle ABC$  vuông tại A. Dựng đường thẳng  $xy \perp AC$  ở C. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D và xy ở E. Chứng minh :

a/  $CE > AB$

b/  $DA < DC$

c/  $DB < DE$

**Bài 9.**  $\triangle ABC$  vuông tại A. Lấy  $D \in AB$  và  $E \in AC$ . Chứng minh :  $DE < BC$ .

**Bài 10.**  $\triangle ABC$  vuông tại A. D di động trên đoạn AB và E di động trên đoạn AC. Tìm vị trí của D và E sao cho DE đạt độ dài lớn nhất.

**Bài 11.**  $\triangle ABC$  có điểm D trong  $\triangle$ . Chứng minh rằng nếu  $AD = AB$  thì  $AB < AC$ .

**Bài 12.**  $\triangle ABC$  có  $AB > AC$  và hai đường cao BD, CE. Lấy  $F \in AB$  sao cho  $AF = AC$ , kẻ  $FI \perp AB$  tại I. Chứng minh :

a/  $FI = CE$

b/  $AB - AC > BD - CE$

**Bài 13.**  $\triangle ABC$  cân ở A. Trên AB lấy D trên tia đối của tia CA lấy  $CE = BD$ . Chứng minh :  $BC < DE$

**Bài 14.**  $\triangle ABC$  vuông tại A, trên tia đối của tia AC lấy  $AD < AC$ . Chứng minh :  $BC > BD$ .

-----☆☺☆-----

### Bài 2. BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

**Định lý :** Trong một tam giác :

+ Tổng độ dài hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại.

+ Hiệu độ dài hai cạnh nhỏ hơn cạnh còn lại



Xét $\triangle ABC$ ta có :	$\begin{cases} AB + AC > BC \\ AB - AC < BC \end{cases}$
-----------------------------	--

**Bài 1.** Kiểm tra xem các đoạn thẳng sau đây có tạo thành tam giác được không ? Vì sao ?

- |                                    |                                     |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1/ $AB = 2cm; AB = 3cm; AC = 4cm$  | 2/ $AB = 2cm; AB = 4cm; AC = 6cm$   |
| 3/ $AB = 3cm; AB = 4cm; AC = 6cm$  | 4/ $AB = 6cm; AB = 10cm; AC = 8cm$  |
| 5/ $AB = 6cm; AB = 14cm; AC = 8cm$ | 6/ $AB = 5cm; AB = 10cm; AC = 12cm$ |

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = 1cm, AC = 7cm$ . Hãy tìm độ dài AB, biết độ dài này là một số nguyên.  $\triangle ABC$  là tam giác gì ?

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  cân có  $AB = 3,9cm, BC = 7,9cm$ .

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 1/ $\triangle ABC$ cân tại đỉnh nào ? Tìm AC. | 2/ Tìm chu vi $\triangle ABC$ . |
|---|---------------------------------|

**Bài 4.** Tìm chu vi của tam giác cân  $\triangle ABC$  biết :

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| 1/ $AB = 5cm; AC = 12cm$ | 2/ $AB = 7cm; AC = 13cm$ |
|--------------------------|--------------------------|

**Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  có đường cao AH. Chứng minh :  $2AH + BC > AB + AC$

**Bài 6.** Cho  $\triangle OBC$  cân tại O. Trên tia đối của tia CO lấy điểm A. Chứng minh :  $AB > AC$ .

**Bài 7.** Cho  $\triangle OBC$  cân tại O. Trên tia đối của tia OC lấy điểm A. Chứng minh :  $AB < AC$ .

**Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  có M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy  $MD = MA$ .

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 1/ Chứng minh : $\triangle AMB = \triangle DMC$ | 2/ Chứng minh : $AB + AC > 2AM$ |
|---|---------------------------------|

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB > AC$ . Trên tia AC lấy điểm F sao cho  $AC = AF$ . Gọi AD là đường phân giác của  $\triangle ABC$ . Trên AD lấy điểm E tùy ý.

- |   |                                |
|---|--------------------------------|
| 1/ Chứng minh : $\triangle AEC = \triangle AEF$ | 2/ Chứng minh : $AB - AC = BF$ |
| 3/ Chứng minh : $BE - EC < BF$                  |                                |

**Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  có M là trung điểm của BC. Chứng minh :  $\frac{AB + AC}{2} > AM$ .

**Bài 11.** Cho  $\triangle ABC$  có M thuộc tia phân giác ngoài của C. Trên tia đối của tia CA lấy  $CI = CB$ .

- |                      |                                     |
|----------------------|-------------------------------------|
| 1/ So sánh MI với MB | 2/ Chứng minh : $MA + MB > AC + BC$ |
|----------------------|-------------------------------------|

**Bài 12.** Cho  $\triangle ABC$  có Cx là tia đối của tia CB. Gọi Cy là tia phân giác của góc  $ACx$ . Lấy M bất kỳ trên Cy. Trên Cx lấy N sao cho  $CN = CA$ .

- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 1/ Chứng minh : $\triangle ACM = \triangle NCM$ | 2/ Chứng minh : $AC + BC < MA + MB$ |
|---|-------------------------------------|

**Bài 13.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có  $D \in AB$ . Kẻ  $DE \parallel BC$  ( $E \in AC$ ).

- |  |                      |
|--|----------------------|
| 1/ $\triangle ADE$ là tam giác gì?                             | 2/ So sánh BE và CD. |
| 3/ BE cắt CD tại O. Chứng minh : $OB + OC + OD + OE > DE + BC$ |                      |
| 4/ Chứng minh : $2BE > BD + EC$                                |                      |

**Bài 14.** Cho  $\triangle ABC$  có D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Trên tia đối của tia DA lấy I sao cho D là trung điểm của AI.

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 1/ So sánh AB và CI.                          | 2/ Chứng minh : $AB + AC > 2AD$ |
| 3/ Chứng minh : $AB + AC + BC > AD + BE + CF$ |                                 |

**Bài 14.** Cho  $\triangle ABC$  có AM là phân giác và  $AB > AC$ . Lấy  $I \in AB$  sao cho  $AI = AC$ .

- |                      |                                     |
|----------------------|-------------------------------------|
| 1/ So sánh MC và MI. | 2/ Chứng minh : $MB - MC < AB - AC$ |
|----------------------|-------------------------------------|

**Bài 15.** Cho  $\angle xOy < 90^\circ$  và tia phân giác Oz. Lấy điểm M trong  $\angle xOz$ . Kẻ  $MH \perp Ox$  tại H,  $MK \perp Oy$  tại K. MK cắt tia Oz tại A. Từ A kẻ  $AI \perp Ox$  tại I.

- |                           |                                  |
|---------------------------|----------------------------------|
| 1/ So sánh AI và AK.      | 2/ So sánh MH với MI; MI với MK. |
| 3/ Chứng minh : $MH < MK$ |                                  |

**Bài 16.** Cho  $\triangle ABC$  có điểm M nằm trong tam giác. BM cắt AC tại D.

- |                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| 1/ Chứng minh : $MB + MC < DB + DC$ | 2/ So sánh $DB + DC$ với $AB + AC$           |
| 3/ Chứng minh : $MB + MC < AB + AC$ | 4/ So sánh $MA + MB + MC$ với $AB + BC + CA$ |

**Bài 17.** Cho B, C thuộc đoạn AD sao cho  $AB = CD$ . Lấy điểm M nằm ngoài đường thẳng AD. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Trên tia đối của tia IM lấy  $IJ = IM$ .

- 1/ Chứng minh :  $MA \parallel DJ$  và  $MC \parallel BJ$
- 2/ MB kéo dài cắt AJ tại H. So sánh  $MA + AH + HJ$  với  $MB + BJ$ .
- 3/ Chứng minh :  $MA + MD > MB + MC$

-----☆☺☆-----

### **BÀI TẬP LÀM THÊM: BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC :**

**Bài 1.**  $\Delta ABC$  có trung tuyến AM. Chứng minh :  $2AM < AB + AC + BC$

**Bài 2.**  $\Delta ABC$  có điểm D  $\in$  cạnh BC. Chứng minh :  $2AD > AB + AC - BC$

**Bài 3.**  $\Delta ABC$  có trung điểm AM. Chứng minh :  $AB + AC > 2AM$

**Bài 4.**  $\Delta ABC$  cân tại A. Từ điểm D  $\in$  cạnh AB vẽ đường thẳng song song BC cắt AC tại E. Chứng minh :  $2BE > DE + BC$

**Bài 5.**  $\Delta ABC$  vuông tại A có AH là đường cao, AD là trung tuyến. Kẻ  $HI \perp AB$  tại I và kéo dài lấy  $IK = IH$ . Chứng minh :

- a/  $\Delta ABK = \Delta ABH$
- b/  $BK \parallel AD$
- c/  $AB + AC > AK + AD$

**Bài 6.**  $\Delta ABC$  có điểm M trong tam giác. Chứng minh :  $MA + MB < AB + AC$

**Bài 7.** Cho  $xOy$  và tia phân giác Oz lấy điểm M trong  $xOz$ . Kẻ  $MH \perp Ox$  tại H,  $MK \perp Oy$  tại K, MK cắt Oz tại A, từ A kẻ  $AI \perp Ox$  ở I. Chứng minh :

- a/  $IH = IK$
- b/  $MH < MK$

**Bài 8.**  $\Delta ABC$  có phân giác AD và  $AB > AC$ . M  $\in$  đoạn AD. Chứng minh :  $MB - MC < AB - AC$

**Bài 9.** Cho  $\Delta ABC$  có điểm M thuộc tia phân giác góc ngoài tại C. Chứng minh :  $MA + MB > AC + BC$

**Bài 10.** Cho B, C thuộc đoạn AD sao cho  $AB = CD$ . Gọi I là trung điểm BC. Trên tia đối của IM lấy  $IJ = IM$ . Chứng minh :

- a/  $MA \parallel DJ$  và  $MC \parallel BJ$
- b/  $MA + MD > MB + MC$

**Bài 11.**  $\Delta ABC$  có điểm O trong tam giác. Chứng minh :  $\frac{AB + BC + CA}{2} < OA + OB + OC < AB + BC + CA$

**Bài 12.**  $\Delta ABC$  có  $C = 50^\circ$  và tia phân giác ngoài Cx nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A. Trên Cx lấy  $CD = CB$ .

- a/ So sánh AB và AD
- b/ Chứng minh :  $DA + DB > AC + BC$

-----☆☺☆-----

### **Bài 3. BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN TRONG TAM GIÁC**

**1. Định nghĩa đường trung tuyến của tam giác:**

Đường trung tuyến của tam giác là đoạn thẳng nối từ đỉnh đến trung điểm cạnh đối diện.

**2. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác:**

Ba đường trung tuyến của tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm này gọi là trọng tâm. Khoảng cách từ trọng tâm đến mỗi đỉnh bằng  $\frac{2}{3}$  độ dài đường trung tuyến.

**Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có đường phân giác AD.

1/ Chứng minh :  $\triangle ADB = \triangle ADC$

2/ Chứng minh đường phân giác AD và hai đường trung tuyến BE, CF của  $\triangle ABC$  đồng quy tại một điểm.

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có 2 đường trung tuyến BE và CF cắt nhau tại G. D là trung điểm của BC. Đường AD là đường gì và điểm G là điểm gì của  $\triangle ABC$  ? Chứng minh : A, G, D thẳng hàng.

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  có 2 đường trung tuyến BE và CF cắt nhau tại G. AG kéo dài cắt BC tại M. Chứng minh :  $MB = MC$ .

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có 2 đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G. Kéo dài AG cắt BC tại H.

1/ Chứng minh :  $\triangle AHB = \triangle AHC$

2/ Gọi I, K lần lượt là trung điểm của GA và GC. Chứng minh : AK, BD, CI đồng qui.

**Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  có hai đường trung tuyến AD và BE cắt nhau tại G. Kéo dài GD thêm một đoạn  $DI = DG$ . Chứng minh G là trung điểm AI.

**Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm G và đường trung tuyến AD. Kéo dài GD thêm một đoạn  $DI = DG$ . Gọi E là trung điểm của AB. IE cắt GB tại M. Chứng minh : M là trọng tâm  $\triangle ABI$ .

**Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  có M là trung điểm của BC. Kéo dài từ B đến A thêm một đoạn  $AD = AB$ . AC cắt DM tại G. BG kéo dài cắt CD tại I.

1/ Chứng minh :  $GC = 2GA$

2/ Đoạn BI là gì của  $\triangle BCD$  ?

**Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = AC = 5cm$  và  $BC = 6cm$ . D là trung điểm của BC.

1/  $\triangle ABD$  là tam giác gì ? Tính AD

2/ Trung tuyến BE cắt AD tại G. Tính AG.

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $AB = 8cm$  và  $BC = 10cm$ . Trung tuyến AD cắt trung tuyến BE tại G.

1/ Tính AC và AE

2/ Tính BE và BG

3/ Kéo dài CG cắt AB tại K. Tính CK.

**Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  có đường trung tuyến AO. Kéo dài từ A đến O thêm một đoạn  $OD = OA$ . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BD và CD. AH và AK lần lượt cắt BC tại E và F.

1/ Trong  $\triangle ABD$  và  $\triangle ACD$ , điểm E, F được gọi là điểm gì ?

2/ So sánh EO với BO, OF với OC. Chứng minh :  $EF = \frac{1}{3}BC$ .

**Bài 11.** Cho  $\triangle ABC$  có hai đường trung tuyến AD và BE cắt nhau tại K. Gọi I là trung điểm của AK. CI cắt KE tại G.

1/ Điểm G là gì của  $\triangle ACK$  ? So sánh EG với EK.

2/ So sánh EK với EB và so sánh EG với EB (Tính  $\frac{EK}{EB}$  và  $\frac{EG}{EB}$ )

**Bài 12.** Giả sử hai đường trung tuyến BD và CE của  $\triangle ABC$  có độ dài bằng nhau và cắt nhau tại G.

1/  $\triangle BGC$  là tam giác gì ?

2/ So sánh  $\triangle BCD$  và  $\triangle CBE$

3/  $\triangle ABC$  là tam giác gì ?

**Bài 13.** Cho  $\triangle ABC$  có hai đường trung BI và CK cắt nhau tại G. Kéo dài AG thêm một đoạn  $GD = GA$  và AD cắt BC tại M.

1/ Chứng minh :  $\triangle MBD = \triangle MCG$

2/ So sánh BD với CK (tính  $\frac{BD}{CK}$ )

**Bài 14.** Cho  $\triangle ABC$  có đường trung tuyến AD. Lấy điểm G trên đoạn AD sao cho  $AG = 2GD$ . Gọi E là trung điểm AC. Chứng minh :  $AG = \frac{2}{3}AD$  và B, G, E thẳng hàng.

**Bài 15.** Cho  $\triangle ABC$ . Vẽ hai đoạn thẳng BI và CK dài bằng nhau và cùng vuông góc với BC sao cho I và K ở hai bên đường thẳng BC. IK cắt BC tại D.

1/ Chứng minh : D là trung điểm BC.

2/ Lấy điểm G trên AD sao cho  $AG = \frac{2}{3}AD$ . Điểm G là gì của  $\triangle ABC$  và  $\triangle AIK$  ?

- Bài 16.** Trên đường trung tuyến AD của  $\triangle ABC$ , lấy hai điểm I và G sao cho  $AI = IG = GD$ . Gọi E là trung điểm của AC.
- Chứng minh : B, G, E thẳng hàng và so sánh BE với GE.
  - CI cắt GE tại O. Điểm O là gì của  $\triangle ACG$  ? Chứng minh :  $BE = 9OE$ .
- Bài 17.** Cho  $\triangle ABC$ . Trên BC có điểm T sao cho  $BT = 2CT$ . Kéo dài từ A đến C thêm một đoạn  $CD = CA$ .
- Điểm T là gì của  $\triangle ABD$  ?
  - DT cắt AB tại E. Chứng minh : E là trung điểm của AB.
- Bài 18.** Cho  $\triangle ABC$  có M và G lần lượt là trung điểm của AB và AC. Kéo dài MG thêm một đoạn  $GD = 2GM$
- Điểm G là gì của  $\triangle ABD$  ?
  - BD cắt AC tại O. Chứng minh : O là trung điểm của BD và GC.
- Bài 19.** Cho  $\triangle ABC$  có G là trung điểm của BC và I là trung điểm của BG. Kéo dài từ A đến I thêm một đoạn  $ID = IA$ . DG cắt AC tại M. Chứng minh : M là trung điểm của AC.
- Bài 20.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $AC = 8cm$ ,  $BC = 10cm$ . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho  $BM = 4cm$ . Lấy điểm D sao cho A là trung điểm của CD.
- Tính AB.
  - Điểm M là gì của  $\triangle BCD$  ?
  - Gọi E là trung điểm của BC. Chứng minh : D, M, E thẳng hàng.
- Bài 21.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = 2BA$ . Gọi M là trung điểm của BC và BD là đường phân giác của  $\triangle ABC$ . Hai tia BA và MD cắt nhau tại E.
- Chứng minh :  $\triangle BDA = \triangle BDM$
  - Chứng minh :  $\triangle BAC = \triangle BME$
  - Điểm D là gì của  $\triangle BCE$  ? So sánh DC và DA.
- Bài 22.** Giả sử  $\triangle ABC$  có 2 đường trung tuyến BD và CE có độ dài bằng nhau. Chứng minh :  $\triangle ABC$  cân tại A.
- Bài 23.** Cho  $\triangle ABC$  có 2 đường trung tuyến BD và CE có độ dài bằng nhau. Chứng minh :  $\triangle ABC$  cân tại A.
- Bài 24.** Cho  $\triangle ABC$ . Vẽ hai đoạn thẳng BI và CK dài bằng nhau và cùng vuông góc với BC sao cho I và K ở hai phía của đường thẳng BC. Chứng minh :  $\triangle ABC$  và  $\triangle AIK$  có cùng một trọng tâm.
- Bài 25.** Cho  $\triangle ABC$  có G thuộc cạnh AC sao cho  $AG = 2GC$ . D là trung điểm của AB. Kéo dài DG và BC cắt nhau tại E. Chứng minh :  $BC = CE$ .
- Bài 26.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = 2BA$ . BD là đường phân giác của  $\triangle ABC$ . Chứng minh :  $DC = 2DA$ .

-----☆☺☆-----

### **BÀI TẬP LẮM THÌM :** TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA $\triangle$

- Bài 1.**  $\triangle ABC$  có trung tuyến AD. Lấy I, K  $\in$  AD với  $AI = IK = KD$ . E, F là trung điểm AC, AB.
- B, K, E và C, K, F thẳng hàng
  - BE cắt CI ở O, O là trọng tâm tam giác nào ?
  - Tính OE biết  $BE = 18cm$
- Bài 2.**  $\triangle ABC$  cân tại A có trung tuyến BM, CN cắt nhau ở K. Chứng minh :  $AK \perp BC$ .
- Bài 3.**  $\triangle ABC$  cân tại A có trung tuyến BD, CE cắt nhau ở G.
- Chứng minh : AG là phân giác góc A
  - K, I lần lượt là trung điểm GA, GC. Chứng minh : BD, AI, CK đồng qui.
- Bài 4.**  $\triangle ABC$  có  $AB < AC$ . Hai trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G.
- Chứng minh : Trung tuyến AM qua G
  - So sánh GB và GC
  - Chứng minh :  $BD < CE$
- Bài 5.**  $\triangle ABC$  có hai trung tuyến BM và CN với  $BM < CN$ . Chứng minh :  $AB < AC$ .
- Bài 6.**  $\triangle ABC$ . Từ B vẽ Bx nằm trong một nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A, vẽ Cy // Bx, Cy nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A. Trên Bx và Cy lần lượt lấy  $BD = CE$ . Gọi G trọng tâm  $\triangle ABC$ . Chứng minh : G trọng tâm  $\triangle ADE$ .

-----☆☺☆-----

### **Bài 3. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC – TÍNH CHẤT 3 ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC**

#### **I. Tia phân giác của góc:**

1. **Định nghĩa** : tia phân giác của góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và chia góc thành 2 phần bằng nhau.
2. **Tính chất** : mọi điểm nằm trên tia phân giác của góc thì cách đều hai cạnh của góc. Ngược lại, mọi điểm cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

#### **II. Tính chất 3 đường phân giác của tam giác :**

Ba đường phân giác của tam giác đồng quy tại một điểm, điểm này cách đều 3 cạnh của tam giác.

**Bài 1.** Cho điểm M nằm trên tia phân giác At của góc  $xAy$  nhọn. Kẻ  $MH \perp Ax$  tại H và  $MK \perp Ay$  tại K.

- 1/ So sánh MH và MK.
- 2/ Chứng minh  $\Delta AMH = \Delta AKM$

**Bài 2.** Cho  $\Delta ABC$  có đường trung tuyến AM cũng là đường phân giác. Kẻ  $MH \perp AB$  tại H và  $MK \perp AC$  tại K.

- 1/ So sánh MH và MK.
- 2/ Chứng minh  $\Delta BHM = \Delta CKM$
- 3/  $\Delta ABC$  là tam giác gì ?

**Bài 3.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại A có 2 đường phân giác BD và CE cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt BC tại M.

- 1/ Đường thẳng AM là đường đặc biệt gì của  $\Delta ABC$ .
- 2/ Chứng minh  $\Delta ABM = \Delta ACM$
- 3/ Tính  $\angle AMB$ .

**Bài 4.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại A có AM là đường trung tuyến.

- 1/ So sánh  $\angle BAM$  với  $\angle CAM$ .
- 2/ Lấy điểm D trên AM. Kẻ  $DH \perp AB$  tại H và  $DK \perp AC$  tại K. Chứng minh :  $\Delta DHK$  cân.

**Bài 5.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại A có  $\angle A = 80^\circ$  và trung tuyến AM.

- 1/ Tính  $\angle B$  và  $\angle C$ .
- 2/ Tia phân giác của góc B cắt AM tại I. Tính  $\angle AIC$ .

**Bài 6.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại A. Hai tia phân giác trong của góc B và góc C cắt nhau tại I. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh A, I, M thẳng hàng.

**Bài 7.** Cho  $\Delta ABC$  có I là giao điểm của hai phân giác trong đỉnh B và C. E là giao điểm hai phân giác ngoài đỉnh B và C. Chứng minh : A, I, E thẳng hàng.

**Bài 8.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại A có  $AB = 5\text{cm}$ ,  $BC = 8\text{cm}$ . Đường phân giác AD cắt đường trung tuyến BM tại I.

- 1/ Chứng minh :  $\angle ADB = 90^\circ$  và tính BD.
- 2/ Tính độ dài AD, ID.

**Bài 9.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại A có đường phân giác AD cắt đường trung tuyến BM tại I.

- 1/ Tính số đo  $\angle ADB$
- 2/  $\Delta IBC$  là tam giác gì ?
- 3/ Tính tỉ số :  $\frac{ID}{AD}$ .

**Bài 10.** Cho  $\Delta ABC$  đều cạnh 10cm có phân giác AD.

- 1/ Tính độ dài BD và AD.
- 2/ Đường trung tuyến CE của  $\Delta ABC$  cắt AD tại I. Tính DI.
- 3/ Kéo dài BI cắt AC tại F. Tính AF, EC.

**Bài 11.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại A. Tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I.

- 1/ Tính số đo  $\angle BAI$  và  $\angle CAI$ .
- 2/ Kẻ  $ID \perp AB$  tại D;  $IE \perp AC$  tại E;  $IF \perp BC$  tại F. Chứng minh : điểm I cách đều 3 cạnh của  $\Delta ABC$ .





2/ Tìm vị trí của M trên d để  $MA + MB$  nhỏ nhất.

-----☆☺☆-----

### **Dạng 2.** TÍNH CHẤT ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC

- Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có 2 đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Chứng minh :  $CH \perp AB$ .
- Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A. Lấy điểm H thuộc cạnh AB. Vẽ  $HE \perp BC$  tại E. Tia EH cắt tia CA tại D. Điểm H là gì của  $\triangle BCD$ ? Chứng minh  $CH \perp BD$ .
- Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, điểm H thuộc cạnh AB. Vẽ tia  $Bx \perp CH$  và Bx cắt tia CA tại D. Chứng minh :  $DH \perp BC$ .
- Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $AB < AC$  và D là trung điểm của BC. Vẽ tia  $Bx \perp AD$  tại E và cắt AC tại H. Vẽ tia Dy song song với AB cắt AC và Bx lần lượt tại I và K. Điểm H là gì của  $\triangle ADK$ ? Chứng minh :  $DH \perp AK$ .
- Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có đường cao AD. Lấy điểm H trên đoạn AD và E trên đoạn CD sao cho HE song song với AC. Chứng minh :  $BH \perp AE$ .
- Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại A. Lấy điểm H trên cạnh AC. Kéo dài BA thêm một đoạn  $AD = AH$ . Kéo dài DH cắt BC tại I. Chứng minh :  $BH \perp CD$ .
- Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có 3 đường cao AD, BE, CF đồng qui tại H.
- 1/ BF và CE là đường gì và điểm A là điểm gì của  $\triangle BHC$
- 2/ Hãy chỉ ra trực tâm của  $\triangle HCA$  và  $\triangle HAB$  (không giải thích).
- Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có đường cao AH. AD là đường phân giác của  $\triangle ABH$ ; CI là đường phân giác của  $\triangle ACH$ . CI cắt AD tại K.
- 1/ Chứng minh :  $HCA = HAB$ ,  $KCA = KAB$ .
- 2/ Chứng minh :  $\triangle AKC$  vuông tại K. Điểm I là gì của  $\triangle ACD$  ?
- 3/ Chứng minh :  $DI \parallel AB$ .
- Bài 9.** Cho  $\triangle BHC$  có  $\angle BHC$  là góc tù và đường cao HD. Vẽ  $BF \perp CH$  tại F;  $CE \perp BH$  tại E. Chứng minh ba đường thẳng BF, CE, DH đồng qui.
- Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có đường cao AH. AD là đường phân giác của  $\triangle ABH$ ; CE là đường phân giác của  $\triangle ACH$ . Chứng minh :  $DE \parallel AB$ .

-----☆☺☆-----

### **BÀI TẬP LÀM THÊM:** ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

- Bài 1.** Cho M đường trung trực của AB, biết  $MA = 8cm$ , tính MB.
- Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$ . Trung trực của AB, AC cắt nhau ở I. Chứng minh :  $IA = IB = IC$ .
- Bài 3.** Cho C, D thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB. Chứng minh :  $ACD = BCD$ ,  $ADC = BDC$ .
- Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A ( $AB = AC > BC$ ) có M, N là trung điểm của AB, AC. Trung trực của AB cắt BC ở D, trung trực của AC cắt BC ở E. Chứng minh :
- a/  $BD = CE$
- b/  $\triangle AED$  cân
- Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  trung trực của BC và phân giác của góc A cắt nhau ở M. Kẻ  $MH \perp AB$  ở H và  $HK \perp AC$  ở K. Chứng minh :
- a/  $MH = MK$
- b/  $BH = CK$
- Bài 6.**  $\triangle ABC$  có  $AB > AC$ . Trên tia BA lấy  $BD = AC$ , đường trung trực của CD và AB cắt nhau ở O. Chứng minh :
- a/  $\triangle AOC = \triangle BOD$
- b/ OA là phân giác góc A



**Bài 7.**  $\Delta ABC$  cân ở A kẻ  $Bx \perp AB$ ,  $Cy \perp AC$ ,  $Bx$  cắt  $Cy$  tại M. Chứng minh :

- a/  $\Delta ABM = \Delta ACM$   
b/ AM là đường trung trực của BC

**Bài 8.**  $\Delta ABC$  cân tại A. Tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I. Chứng minh : AI là đường trung trực của BC.

**Bài 9.** Cho  $xOy < 90^\circ$ . Lấy  $A \in Ox$ ,  $B \in Oy$ . Với  $OA = OB$ . Kẻ  $AH \perp Oy$  và  $BK \perp Ox$  ( $H \in Oy$ ,  $K \in Ox$ ).

- a/ Chứng minh :  $\Delta OHK$  cân  
b/ AH cắt BK tại I. Chứng minh : OI là phân giác  $xOy$ .  
c/ Chứng minh : Oy là đường trung trực của AB.

**Bài 10.**  $\Delta ABC$  vuông tại A có đường cao AH, AD là phân giác góc BAH.

- a/ Chứng minh :  $CAD = CDA$ .  
b/ Trên CA lấy  $CI = CH$ , gọi M là trung điểm của HI chứng minh : CM là đường trung trực của AD.  
c/ Chứng minh :  $HI \parallel AD$

-----☆☺☆-----

### **BÀI TẬP LÌM THÊM :**

#### **TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC**

**Bài 1.**  $\Delta ABC$  vuông tại A, đường cao AH. M, N lần lượt là trung điểm của AH, BH. Chứng minh :  $CM \perp AN$ .

**Bài 2.**  $\Delta ABC$  cân tại A có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Chứng minh : AH là tia phân giác góc A.

**Bài 3.**  $\Delta ABC$  cân tại A có đường cao CD cắt tia phân giác của góc A tại I. Chứng minh :  $BI \perp AC$ .

**Bài 4.**  $\Delta ABC$  vuông tại A có đường cao AH. Trên tia BA lấy E sao cho A trung điểm BE. I trung điểm AH. Chứng minh :  $CI \perp HE$ .

**Bài 5.**  $\Delta ABC$  cân ở A có M trung điểm BC, H là hình chiếu của M xuống AC, O trung điểm MH. Chứng minh :  $OA \perp BH$ .

**Bài 6.** Cho đoạn thẳng AB trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB.

Lấy  $C \in Ax$ ,  $D \in By$  với  $AC = \frac{1}{2}BD$ . Kẻ  $BE \perp AD$  ở E. Gọi F trung điểm ED, I trung điểm BE.

- a/ Chứng minh :  $CF \parallel AI$   
b/ Chứng minh :  $CFB = 90^\circ$ .

**Bài 7.** Gọi G trực tâm  $\Delta ABC$ . E, F trung điểm AC, BC. Đường trung trực của AC, BC cắt nhau ở H. Chứng minh :  $BG = 2HE$ ,  $AG = 2HF$ .

**Bài 8.** Cho  $\Delta ABC$  có H là trực tâm, O là giao điểm ba đường trung trực kéo dài AO lấy  $OA' = OA$ .

- a/ Chứng minh :  $\Delta ACA'$  và  $\Delta ABA'$  vuông  
b/  $BH = CA'$   
c/ Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh : H, M, A' thẳng hàng.  
d/ G là trọng tâm  $\Delta ABC$ . Chứng minh : H, G, O thẳng hàng

-----☆☺☆-----

#### **Bài 4. TÍNH CHẤT CÁC ĐƯỜNG ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC CÂN, ĐỀU**

##### **I. Tính chất các đường đặc biệt trong tam giác cân :**

- + Trong tam giác cân, 4 đường đặc biệt (đường cao, trung tuyến, trung trực, phân giác) ứng với cạnh đáy trùng nhau.

##### **II. Tính chất các đường đặc biệt trong tam giác đều :**

- + Trong tam giác đều, 4 đường đặc biệt (đường cao, trung tuyến, trung trực, phân giác) trùng nhau.

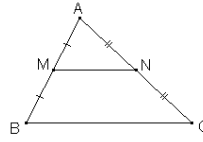
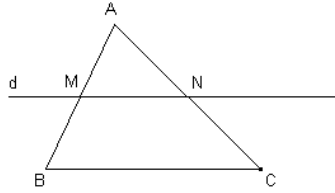
- Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có 2 đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Chứng minh AH là tia phân giác của  $BAC$ .
- Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có đường cao CD cắt tia phân giác của góc  $BAC$  tại I. Chứng minh :  $BI \perp AC$ .
- Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có 2 đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I. AI cắt BC tại H. Chứng minh :  $AH \perp BC$ .
- Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có 2 đường cao BD và CE cắt nhau tại H. M là trung điểm BC. Chứng minh H, A, M thẳng hàng.
- Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có 2 đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Hai đường trung tuyến BM và CQ cắt nhau tại G.
- 1/ Điểm G là gì của  $\triangle ABC$  ? Chứng minh G thuộc đường cao AI của  $\triangle ABC$ .
  - 2/ Chứng minh : A, G, H thẳng hàng.
- Bài 6.** Cho  $\angle xAy = 90^\circ$ . Lấy điểm B thuộc Ox, C thuộc Oy sao cho  $AB < AC$ . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB và AC. Đường trung trực của AB, AC cắt nhau tại O.
- 1/ Tính  $\angle IOK$
  - 2/ Chứng minh :  $\angle AOB = 2\angle AOI$  và  $\angle AOC = 2\angle AOK$
  - 3/ Chứng minh O là trung điểm của BC.
- Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A. Lấy điểm D sao cho A là trung điểm của BD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và CD.
- 1/ Chứng minh :  $\angle CAE = \frac{1}{2}\angle CAB$  và  $\angle CAF = \frac{1}{2}\angle CAD$ . Tính  $\angle EAF$ .
  - 2/ Chứng minh :  $AF \parallel BC$  và  $CD \perp BC$ .
- Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $AB < AC$  và có đường phân giác AD. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho  $AE = AB$ . Vẽ  $DH \perp AC$  tại H. BE cắt AD và DH lần lượt tại I và K. Chứng minh :  $AK \perp DE$ .
- Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có đường cao AH và đường phân giác BD cắt nhau tại K. Lấy điểm E thuộc cạnh BC sao cho  $BE = BA$ . Chứng minh :  $EK \parallel AC$ .

-----☆☺☆-----

## PHẦN PHỤ :

### Bài 1. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

- I. **Định nghĩa:** Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.
- II. **Tính chất:**
  1. **Tính chất 1:** Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.
  2. **Tính chất 2:** Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.
- III. **Cách chứng minh:** Chứng minh đoạn thẳng đi qua trung điểm hai cạnh của tam giác.

**IV. Diện tích tam giác: Đáy nhân cao chia 2.**

**Bài 1.**  $\Delta ABC$  có  $AB = 6\text{cm}$ ,  $AC = 10\text{cm}$ ,  $BC = 14\text{cm}$ . D, E, F lần lượt là trung điểm AB, AC, BC. Tính DE, DF, EF.

**Bài 2.**  $\Delta ABC$  có  $AB = 5\text{cm}$ ,  $AC = 7\text{cm}$ ,  $BC = 9\text{cm}$ . Kéo dài AB lấy  $BD = BA$ , kéo dài AC lấy  $CE = CA$ .

a/ Tính các cạnh của  $\Delta ADE$ .

b/ Kéo dài trung tuyến AM của  $\Delta ABC$  lấy  $MI = MA$ . Chứng minh :  $I \in DE$ .

**Bài 3.** Cho  $\Delta ABC$  có độ dài  $BC = a$  và M là trung điểm của AB. Tia  $Mx \parallel BC$  cắt AC ở N. Tính độ dài MN theo a.

**Bài 4.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại A có trung tuyến AM. Kẻ  $Mx \parallel AC$  cắt AB ở E, kẻ  $My \parallel AB$  cắt AC tại F. Chứng minh :

a/  $ME = MF$

b/  $EF = \frac{1}{2} BC$

c/ AM là đường trung trực của EF

**Bài 5.**  $\Delta ABC$  cân tại A, có AM là đường cao. N là trung điểm của AC. Kẻ  $Ax \parallel BC$  cắt đường thẳng MN tại E. Chứng minh :

a/  $ME \parallel AB$

b/  $AE = MC$

c/  $Ax \perp AM$

**Bài 6.**  $\Delta ABC$ , trên nửa mặt phẳng bờ là AC không chứa điểm B lấy điểm D bất kì. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh :

a/  $MN \parallel PQ$  và  $MQ \parallel NP$

b/  $MN + NP + PQ + QM = AC + BD$

**Bài 7.** Cho  $\Delta ABC$  có trung tuyến BD, CE cắt nhau tại O, H, K là trung điểm của OB, OC. Chứng minh :  $ED = HK$  và  $EH \parallel DK$ .

**Bài 8.** Cho  $\Delta ABC$  có trung tuyến AM. Kẻ  $ME \perp AB$  tại E. Vẽ tia  $Cx \parallel AB$  cắt EM tại I, trên tia CI lấy D sao cho I là trung điểm của CD.

a/ Chứng minh M là trung điểm của EI.

b/ DM cắt AB tại F. Chứng minh :  $\Delta BMP$  cân tại M.

c/ Chứng minh :  $BD \perp CD$ .

**Bài 9.** Cho  $\Delta ABC$  có đường cao AH. Kẻ  $HE \perp AB$  tại E, kéo dài HE lấy  $EM = EH$ . Kẻ  $HF \perp AC$ , kéo dài HF lấy  $FN = FH$ . Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh :

a/  $BM \perp AM$

b/  $AI \perp EF$

**Bài 10.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại A có M là trung điểm đường cao AH. CM cắt AB tại D, kẻ  $Hx \parallel CD$  cắt AB tại E. Chứng minh :

a/  $DA = DE$

b/  $AB = 3AD$

c/  $CD = 4MD$

- Bài 11.** Trên cạnh AC của  $\Delta ABC$  lấy  $AD = DE = EC$ . M là trung điểm của BC, BD cắt AM tại I. Chứng minh :
- $ME \parallel BD$
  - $BI = 3DI$ .
- Bài 12.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB : AC : BC = 3 : 4 : 6$ . Gọi M, N, P là trung điểm của AB, AC, BC. Tính các cạnh của  $\Delta ABC$  biết chu vi  $\Delta MNP$  là 5,2 m.
- Bài 13.** Trên cạnh AB của  $\Delta ABC$  lấy  $AD = DE = EB$ . Từ D, E kẻ thẳng cùng song song BC lần lượt cắt AC tại M, N. Chứng minh :
- $AM = MN = NC$
  - $DM + BC = 2EN$
- Bài 14.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại A có AM là trung tuyến. N là trung điểm của AC.
- Chứng minh :  $MN \perp AC$ .
  - $\Delta AMC$  là tam giác gì ?
  - Chứng minh :  $2AM = BC$ .
- Bài 15.** Cho  $\Delta ABC$  có hai đường cao BD, CE. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DE. Chứng minh :  $MN \perp DE$ .
- Bài 16.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại A có AM là đường cao. Trên tia đối của tia AB lấy  $AD = AB$ .
- Chứng minh :  $2CA = BD$  và suy ra số đo  $\angle BCD$ .
  - N là trung điểm của CD. Chứng minh :  $MN = AC$  và  $AN \perp AM$ .
- ☆☺☆-----

## **Bài 2. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG**

- Bài 1.** Cho  $\Delta ABC$  nhọn. Vẽ tia đối của tia AB rồi lấy điểm D sao cho  $AD = AB$ . Vẽ tia đối của tia AC rồi lấy điểm E sao cho  $AE = AC$ .
- Chứng minh :  $\Delta ABC = \Delta ADE$ .
  - Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DE. Chứng minh : M, A, N thẳng hàng.
- Bài 2.** Cho  $\Delta ABC$  nhọn. Vẽ tia đối của tia AB rồi lấy điểm D sao cho  $AD = AB$ . Trên tia đối của tia AC rồi lấy điểm E sao cho  $AE = AC$ .
- So sánh BC và DE.
  - Gọi AH, AK lần lượt là đường cao của  $\Delta ABC$  và  $\Delta ADE$ . Chứng minh : A, H, K thẳng hàng.
- Bài 3.** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB < AC$ . Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho  $AD = AC$ . Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho  $AE = AB$ .
- Định dạng  $\Delta ACD$  và  $\Delta ABE$ .
  - Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh : M, A, N thẳng hàng.
- Bài 4.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại A có đường cao AH. Kẻ  $HM \perp AB$  tại M rồi kéo dài lấy  $MD = MH$ . Kẻ  $HN \perp AC$  tại N rồi kéo dài lấy  $NE = NH$ .
- So sánh AD và AE.
  - Chứng minh D, A, E thẳng hàng.
- Bài 5.** Lấy hai điểm A, B ở về hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là đường thẳng xy. Kẻ  $AH \perp xy$  tại H và  $BK \perp xy$  tại K sao cho  $AH = BK$ . Gọi O là trung điểm đoạn thẳng HK. Chứng minh : A, O, B thẳng hàng
- Bài 6.** Cho  $\angle xOy < 90^\circ$ . Trên Ox lấy hai điểm A và C sao cho A nằm giữa hai điểm O và C. Trên Oy lấy hai điểm B và D sao cho  $OA = OB, AC = BD$ .
- Định dạng  $\Delta OAB$  và  $\Delta OCD$ .
  - Gọi M và N là trung điểm của AB và CD. Chứng minh : O, M, N thẳng hàng.
- Bài 7.** Cho  $\Delta ABC$  có hai đường trung tuyến AM và BN. Trên tia đối của tia MB lấy điểm D sao cho  $MD = MB$ . Trên tia đối của tia CN lấy điểm E sao cho  $NE = NC$ . Chứng minh : D, A, E thẳng hàng.
- ☆☺☆-----



b/ Chứng minh :  $S_{\Delta OAD} = S_{\Delta OBC}$

**Bài 18.** Cho hai đoạn thẳng  $AB < CD$ ,  $AB \parallel CD$  sao cho B và C ở một bên đường thẳng AD. AC cắt BD tại O. Đoạn thẳng AD và BC kéo dài cắt nhau tại I.

a/ Chứng minh :  $S_{\Delta OAD} = S_{\Delta OBC}$

b/ Chứng minh :  $S_{\Delta IAC} = S_{\Delta IBD}$

**Bài 19.** Cho hai điểm D và E ở bên trong góc  $xOy$  nhọn. Trên Ox lấy A sao cho  $AD \parallel Oy$  và trên Oy lấy B sao cho  $BE \parallel Ox$ .

a/ So sánh  $S_{\Delta EOA}$  và  $S_{\Delta OAB}$ .

b/ So sánh  $S_{\Delta OAB}$  và  $S_{\Delta DOB}$ .

c/ So sánh  $S_{\Delta EOA}$  và  $S_{\Delta DOB}$ .

**Bài 20.** Cho  $\Delta ABC$ . Trên cạnh AC lấy hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Trên AB lấy I sao cho  $DI \parallel BC$ . Trên BC lấy K sao cho  $EK \parallel AB$ . Chứng minh :  $S_{\Delta EBI} = S_{\Delta DBK}$ .

**Bài 21.** Cho hai tia Ax // Cy cùng chiều. Lấy B trên Ax và D trên Cy

a/ Chứng minh :  $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD}$

b/ Chứng minh :  $S_{\Delta ACB} + S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ABDC}$

**Bài 22.** Cho điểm M nằm ngoài đường thẳng xy. Trên xy lấy 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự đó sao cho  $AB = CD$ .

a/ So sánh  $S_{\Delta MAB}$  và  $S_{\Delta MCD}$ .

b/ Chứng minh :  $S_{\Delta MAC} = S_{\Delta MBD}$  bằng cách cộng diện tích.

**Bài 23.** Cho điểm M nằm ngoài đường thẳng xy. Một đoạn thẳng CD trượt trên tia Ox sao cho độ dài CD không đổi. Có nhận xét gì về diện tích của  $\Delta MCD$ .

**Bài 24.** Cho điểm M nằm ngoài đường thẳng xy. Trên xy lấy 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự đó sao cho  $AB = CD$ . Gọi O là trung điểm BC.

a/ Chứng minh :  $S_{\Delta MAC} = S_{\Delta MBD}$

b/ Chứng minh :  $S_{\Delta MOB} = S_{\Delta MOC}$

c/ Chứng minh :  $S_{\Delta MOA} = S_{\Delta MOD}$

**Bài 25.** Cho điểm M nằm ngoài đường thẳng xy. Trên xy lấy các đoạn thẳng AB và CD sao cho  $AB = 3CD$ .

Tính  $\frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta MCD}}$ .

**Bài 26.** Cho  $\Delta ABC$ . Trên AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E tùy ý. Chứng minh : (vẽ hình riêng từng hình cho mỗi câu)

a/ Chứng minh :  $\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AE}{AC}$

b/ Chứng minh :  $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABE}} = \frac{AD}{AB}$

c/ Chứng minh :  $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}$

**Bài 27.** Cho  $\Delta ABC$  có diện tích bằng  $16cm^2$ . D là trung điểm của AB và trên AC lấy điểm E sao cho  $AC = 4AE$ . Chứng minh :  $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}$  và tính  $S_{\Delta ADE}$ .

**Bài 28.** Cho  $\Delta ABC$  có BM và CN là hai đường trung tuyến.

a/ So sánh  $S_{\Delta BCM}$  và  $S_{\Delta BCN}$  với  $S_{\Delta ABC}$ . Có nhận xét gì về khoảng cách từ M và N đến BC ? Kết luận được gì ?

b/ So sánh  $S_{\Delta BMN}$  và  $S_{\Delta BAM}$ ;  $S_{\Delta BMN}$  và  $S_{\Delta BCM}$

c/ Chứng minh :  $MN = \frac{1}{2} BC$

**Bài 29.** Cho  $\triangle ABC$ . Trên cạnh AB lấy D. Từ D kẻ đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC tại E. Chứng minh :

$$a/ \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{AD}{BD} \text{ và } \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{AE}{CE}$$

$$b/ S_{\triangle BDE} = S_{\triangle CDE} \text{ và } \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

**Bài 30.** (Định lý Ta-let). Cho  $\triangle ABC$ , đường thẳng  $d // BC$  và  $d$  cắt AB, AC lần lượt tại D và E. Chứng minh :  
 $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$ .

**Bài 31.** Bài toán thường dùng thứ hai :

Chứng minh rằng đường trung tuyến chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng nửa diện tích tam giác đó.

**Bài 32.** Cho  $\triangle Czt$  nhọn. Trên cạnh Cz lấy A và E sao cho A là trung điểm của CE. Lấy điểm B bên trong  $\triangle Czt$  sao cho  $AB // Ct$ .

$$a/ \text{ So sánh } S_{\triangle ABE} \text{ và } S_{\triangle ABC}$$

$$b/ \text{ Trên Ct lấy D. So sánh } S_{\triangle ABC} \text{ và } S_{\triangle ABD}$$

$$c/ \text{ So sánh } S_{\triangle ABE} \text{ và } S_{\triangle ABD}$$

**Bài 33.** Cho  $\triangle BCE$  có đường trung tuyến BA. Vẽ tia  $Ct // AB$ . Lấy D tùy ý trên Ct. Chứng minh :  $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABE}$ .

**Bài 34.** Cho  $\triangle ABC$  có M và N lần lượt là trung điểm hai cạnh AB và AC. Trên BC lấy điểm D bất kỳ.

$$a/ \text{ DM và DN là đường trung tuyến của những tam giác nào ? Chứng minh : } S_{\triangle BDM} + S_{\triangle CDN} = S_{\triangle AMDN}$$

$$b/ \text{ Chứng minh : } S_{\triangle AMDN} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$$

**Bài 35.** Cho  $\triangle ABC$  có đường trung tuyến AM. Trên AM lấy điểm G tùy ý. Chứng minh :

$$a/ S_{\triangle GBM} = S_{\triangle GCM}$$

$$b/ S_{\triangle ABG} = S_{\triangle ACG}$$

**Bài 36.** Cho  $\triangle ABC$  có đường trung tuyến AM. Trên AM lấy điểm G tùy ý. So sánh khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM rồi chứng minh :  $S_{\triangle ABG} = S_{\triangle ACG}$ .

**Bài 37.** Cho  $\triangle ABC$  có hai đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G. Chứng minh :

$$a/ S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACE}$$

$$b/ S_{\triangle GBE} = S_{\triangle GCD}$$

**Bài 38.** Cho  $\triangle ABC$  có hai đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G. Chứng minh :

$$a/ S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCE}$$

$$b/ S_{\triangle GBC} = S_{\triangle AEGD}$$

**Bài 39.** Cho  $\triangle ABC$  có hai đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G. Chứng minh :

$$a/ S_{\triangle GAB} = S_{\triangle GBC}$$

$$b/ S_{\triangle GBC} = S_{\triangle GAC} \text{ rồi suy ra } S_{\triangle GAC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

$$c/ S_{\triangle ADG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \text{ rồi suy ra } BD = 3GD$$

d/ Nếu trung tuyến AF cắt BD tại G' thì ta có kết quả gì tương tự câu c ? Suy ra ba đường trung tuyến trong tam giác đồng quy tại một điểm.

**Bài 40.** Cho hai tia Ax // Cy cùng chiều. Lấy điểm B trên Ax và D trên Cy. Gọi I là trung điểm BD. CI cắt Ax tại F. Chứng minh :

$$a/ \triangle ICD = \triangle IFB$$

$$b/ S_{\triangle ACI} = S_{\triangle AFI}$$

$$c/ S_{\triangle ABI} + S_{\triangle CDI} = S_{\triangle ACI}$$

$$d/ S_{\triangle ABCD} = 2S_{\triangle ACI}$$

**Bài 41.** Cho  $\triangle ABC$  có AD là đường phân giác. Chứng minh :

a/  $\triangle ADB$  và  $\triangle ADC$  có 1 đường cao chung. Khoảng cách từ D đến AB và AC bằng nhau.

$$b/ \frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{DB}{DC}$$

$$c/ \frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{AB}{AC}$$

$$d/ \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

**Bài 42.** Chứng minh rằng đường phân giác trong một tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn thẳng đó.

**Bài 43.** Cho  $\triangle ABC$ , các điểm  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  lần lượt trên cạnh  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  sao cho  $BC = 3CA'$ ,  $CA = 3AB'$ ,  $AB = 3BC'$ .  $AA'$  cắt  $BB'$  tại  $D'$ ;  $BB'$  cắt  $CC'$  tại  $E$ ;  $CC'$  cắt  $AA'$  tại  $F$ . Đặt  $S_a = S_{\triangle ADB'}$ ,  $S'_a = S_{\triangle ADEC}$ ;  $S_b = S_{\triangle BEC'}$ ,  $S'_b = S_{\triangle BEFA}$ ;  $S_c = S_{\triangle CFA'}$ ,  $S'_c = S_{\triangle CFDB'}$ .

a/ Chứng minh :  $S_{\triangle AA'C} = S_{\triangle BB'A} = S_{\triangle CC'B} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$

b/ Chứng minh :  $S_{\triangle AA'C} + S_{\triangle BB'A} + S_{\triangle CC'B} = S_{\triangle ABC}$ . Suy ra :  $S_{\triangle DEF} = S_a + S_b + S_c$ .

----- ☆ ☺ ☆ -----

## TOÁN NÂNG CAO

### Bài 1. ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

**Bài 1.** Cho  $A$  thuộc tia phân giác của góc  $xOy$ . Lấy  $B \in Ox$ ,  $C \in Oy$  với  $OB = OC$ . Lấy  $M$  nằm giữa  $O$  và  $B$ ;  $N$  nằm giữa  $O$  và  $C$  với  $OM = ON$ . Chứng minh :  $\triangle ABM = \triangle ACN$ .

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BD$  là phân giác. Kẻ  $Dx \parallel AB$  và cắt  $BC$  tại  $M$ .  $My$  là phân giác  $\angle DMC$ ,  $Bz$  là phân giác  $\angle B$ . Chứng minh hai đường thẳng  $Bz$  và  $My$  vuông góc với nhau.

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BI$  là phân giác trong.  $Bx$  là phân giác ngoài đỉnh  $B$ ,  $M$  là trung điểm  $BI$ . Kẻ  $My \parallel Bx$ . Chứng minh  $My$  là đường trung trực của đoạn  $BI$ .

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  có góc  $A$  nhỏ nhất. Từ  $C$  kẻ đường thẳng song song với phân giác  $BD$ , đường này cắt đường thẳng  $AB$  tại  $E$ .

a/ Chứng minh :  $A < 90^\circ$

b/ Chứng minh :  $\triangle CEB$  có hai góc bằng nhau.

**Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  có  $B = 3C$ .  $Ax$  là tia đối của tia  $AC$ . Tia phân giác của góc  $BAx$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $E$ .  $Ay$  là phân giác của góc  $EAx$ .

a/ Chứng minh :  $\triangle ABC$  có 2 góc bằng nhau.

b/ Chứng minh :  $Ay \parallel BE$ .

**Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  có  $C = \frac{1}{2}B$ . Vẽ tia phân giác  $BD$ . Lấy  $M$  thuộc tia đối của tia  $BD$  với  $BM = AC$ .  $N$  thuộc tia đối của tia  $CB$  với  $CN = AB$ . Chứng minh :  $AM = AN$ .

**Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  có phân giác  $BD$ .  $E$  thuộc tia đối của tia  $BA$  sao cho  $BE = BC$ . Chứng minh :  $BD \parallel EC$ .

**Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  có  $Ax$  là tia phân giác ngoài đỉnh  $A$ . Chứng minh :  $Ax \parallel BC$ .

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  có  $B = 2C$ ,  $BD$  là phân giác. Trên tia đối của tia  $BD$  lấy  $BM = AC$ . Trên tia đối của tia  $CB$  lấy  $CN = AB$ .  $I$  là trung điểm của  $MN$ . Chứng minh :  $AI \perp MN$ .

**Bài 10.** Cho  $xOy = 60^\circ$ . Từ  $A$  thuộc tia  $Ox$  vẽ đường thẳng song song với  $Oy$  cắt tia phân giác của góc  $xOy$  là  $Oz$  tại  $B$ . Vẽ  $AC \perp Oy$  tại  $C$ . Chứng minh :  $OB = 2AC$ .

**Bài 11.** Cho  $\triangle ABC$  có  $D$  là trung điểm  $BC$  và  $AB < AC$ . Vẽ  $Dx$  vuông góc với tia phân giác của  $\angle BAC$  tại  $I$  và cắt  $AB$ ,  $AC$  tại  $M$ ,  $N$ . Đặt  $AB = c$ ,  $AC = b$ .

a/ Chứng minh :  $BM = CN$

b/ Tính  $AM$ ,  $BM$  theo  $b$  và  $c$ .

**Bài 12.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có phân giác  $AD$ . Đường thẳng vuông góc với  $BC$  tại  $D$  cắt  $AC$  tại  $E$ .

a/ Chứng minh :  $\triangle BDE$  vuông cân.

b/ Nếu cho  $\angle ACB = 30^\circ$  và  $DE = \sqrt{3}$ . Tính số đo của góc  $\angle ABE$  và độ dài các cạnh của  $\triangle BEC$ .

**Bài 13.** Cho  $\triangle ABC$  có  $\angle A = 60^\circ$ . Phân giác  $BD$ ,  $CE$  cắt nhau tại  $I$ . Chứng minh :  $ID = IE$



- Bài 14.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A - C = B - A$ . Hai phân giác BM và CN cắt nhau tại O. Chứng minh :  $\triangle OMN$  cân.
- Bài 15.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB < AC$  và AD là phân giác. Chứng minh :  $CD > BD$ .
- Bài 16.** Cho  $\triangle ABC$  có AD là phân giác và  $AB > AC$ . M thuộc AD. Chứng minh :  $MB - MC < AB - AC$ .
- Bài 17.** Cho  $\triangle ABC$  có điểm M thuộc tia phân giác ngoài đỉnh C. Chứng minh :  $MA + MB > AC + BC$ .
- Bài 18.** Cho  $xOy$  nhọn có phân giác Oz. M nằm trong  $xOy$ , kẻ  $AI \perp Ox$  tại I. Chứng minh :
- a/ Chứng minh :  $AI = AK$ .
- b/ Chứng minh :  $MH < MK$ .
- Bài 19.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A = 80^\circ$ ,  $C = 60^\circ$ . Hai tia phân giác góc C cắt nhau tại I. Tia phân giác ngoài của B cắt tia CI tại D. Chứng minh :  $BDC = ABC$ .
- Bài 20.** Cho  $\triangle ABC$  có phân giác AD, BE.
- a/ Nếu  $ADC = BEC$ . Chứng minh :  $A = B$ .
- b/ Nếu  $ADB = BEC$ . Chứng minh :  $A + B = 120^\circ$ .
- Bài 21.** Cho điểm O nằm trong  $\triangle ABC$ .
- a/ Chứng minh :  $BOC > BAC$ .
- b/ Nếu O là giao điểm của hai tia phân giác trong góc B và góc C. Chứng minh :  $BOC > 90^\circ$ .
- Bài 22.** Cho  $\triangle ABC$  có C kém B là  $90^\circ$ . Kẻ tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Tính  $ADB$ .
- Bài 23.** Các đường thẳng chứa tia phân giác của góc ngoài đỉnh B và C cắt nhau tại O. Chứng minh :  $BOC$  bằng nửa góc ngoài đỉnh A.
- Bài 24.** Cho  $\triangle ABC$  có  $B > C$ . Đường thẳng chứa tia phân giác của góc A ngoài cắt đường thẳng BC tại E.
- a/ Chứng minh :  $AEB = \frac{1}{2}(B - C)$ .
- b/ Tính B và C nếu biết  $A = 60^\circ$  và  $AEB = 15^\circ$ .
- Bài 25.** Cho  $\triangle ABC$  có phân giác góc trong của góc B và góc C cắt nhau tại I. Phân giác góc của góc B và góc C cắt nhau tại K.
- a/ Chứng minh :  $BKC = 90^\circ - A$ .
- b/ Chứng minh :  $BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}A$ .
- Bài 26.** Cho  $\triangle ABC$  có  $B = C = 40^\circ$ , tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Chứng minh :  $DB + DA = BC$ .
- Bài 27.** Cho  $\triangle ABC$  có tia phân giác trong của góc B và tia phân giác ngoài của góc đỉnh C cắt nhau tại M. Tia phân giác trong của góc C và tia phân giác ngoài của B cắt nhau tại N. Chứng minh :
- $$BMC = BNC = \frac{1}{2}A.$$
- Bài 28.** Cho  $\triangle ABC$  có 3 đường phân giác cắt nhau tại I. Kẻ  $IM \perp AC$  tại M. Chứng minh :
- $$AB + AC - BC = 2AM.$$
- Bài 29.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB < AC$ , đường cao AE. Tia phân giác của góc B cắt AE tại H. Kẻ  $HF \perp AB$  tại F. Chứng minh :  $HC > HF$ .
- Bài 30.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có  $A = 20^\circ$ . D thuộc AB với  $AD = BC$ . Tính  $ACD$ .
- Bài 31.** Cho  $\triangle ABC$  đều có phân giác BD, CE cắt nhau tại O. Chứng minh :
- a/  $OA = OB = OC$ .
- b/  $AOB = BOC = COA = ?$



## **Bài 2. ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN**

- Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  có  $A = 80^\circ$ ,  $B = 60^\circ$ , M là trung điểm AC. Trên tia đối của tia MB lấy  $MD = MB$ . Tính  $\angle BCD$ .
- Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $D \in AC$ , E là trung điểm AB, F thuộc tia đối của tia ED sao cho  $EF = ED$ . Chứng minh :  $\angle FBA = 180^\circ - (B + C)$ .
- Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  có AM là đường trung tuyến, điểm D thuộc tia AM sao cho  $AM = MD$ . Vẽ  $MH \perp AB$  tại H. Chứng minh :  $MH \perp DC$ .
- Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  có M, N là trung điểm của AC, AB. Trên các tia BM, CN lấy D, E sao cho  $BM = MD$ ,  $CN = NE$ . Chứng minh : A là trung điểm của DE.
- Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  có M, N là trung điểm của AB, AC. Trên tia đối của tia NM lấy  $NI = NM$ .
- a/ Chứng minh :  $CI \parallel AB$  và  $CI = MB$ .
- b/ Chứng minh :  $MN \parallel BC$  và  $MN = \frac{1}{2} BC$
- Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  có D là trung điểm của AB. Vẽ  $DE \parallel BC$  ( $E \in AC$ ). Lấy  $F \in BC$  sao cho  $BF = DE$ . Chứng minh  $DF \parallel AC$ .
- Bài 7.** Cho  $\triangle AOB$ . Lấy  $A', B'$  sao cho O là trung điểm của  $AA'$  và  $BB'$ . Gọi D là trung điểm của AB, Tia DO cắt  $A'B'$  tại  $D'$ . Chứng minh :  $D'$  là trung điểm của đoạn  $A'B'$ .
- Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  có M là trung điểm của BC. Lấy F, E, G sao cho B, M, C là trung điểm của AF, AE, AG.
- a/ Chứng minh :  $EC \parallel AB$  và  $BE \parallel AC$ .
- b/ Chứng minh : F, E, G thẳng hàng.
- Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A. Lấy D thuộc AB, E thuộc AC với  $AD = AE$ . Gọi M, N là trung điểm của DE và BC. Chứng minh : A, M, N thẳng hàng.
- Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A, trên tia đối của tia CA, CB lấy hai đoạn  $CD = DE$ . Gọi M, N là trung điểm của BC và CE. Chứng minh  $AM \parallel DN$ .
- Bài 11.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A. D thuộc tia đối của tia CA, kẻ  $DE \perp BC$  tại E. Gọi I là trung điểm CD, kéo dài EI lấy  $IK = IE$ , vẽ AM là phân giác của  $\triangle ABC$ . Chứng minh :  $AM \parallel CK \parallel ED$ .
- Bài 12.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = 2AB$ . Gọi M là trung điểm BC, D là trung điểm BM. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho D là trung điểm đoạn AE.
- a/ Chứng minh :  $\triangle AME = \triangle AMC$
- b/ So sánh AD và AC.
- Bài 13.** Cho B thuộc đoạn AC. Vẽ tam giác đều  $\triangle DAB$ ,  $\triangle EBC$  với D, E cùng thuộc một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AC. Gọi M, N là trung điểm của DC và AE. Chứng minh  $\triangle BMN$  đều.
- Bài 14.** Cho  $\triangle ABC$  có M là trung điểm của BC và  $\angle BAM > \angle CAM$ . Chứng minh :  $AB < AC$ .
- Bài 15.** Cho  $\triangle ABC$  có D, E, F là trung điểm của BC, AC, AB. Chứng minh :  $DE + DF > 2DI$
- Bài 16.** Cho  $\triangle ABC$  có D, E, F là trung điểm của BC, AC, AB. Chứng minh :  $AB + AC + BC > AD + BE + CF$ .
- Bài 17.** Cho  $\triangle ABC$  vuông có M là trung điểm của BC. Chứng minh :  $AM = \frac{1}{2} BC$ .
- Bài 18.** Cho  $\triangle ABC$  có M là trung điểm của BC và  $AM = \frac{1}{2} BC$ . Chứng minh :  $\triangle ABC$  vuông.
- Bài 19.** Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại A. Qua A vẽ đường thẳng xy sao cho B, C ở cùng một nửa mặt phẳng có bờ xy. Vẽ BH, CK cùng vuông góc với xy tại H và K.
- a/ Chứng minh :  $HK = BH + CK$
- b/ Gọi M là trung điểm BC.  $\triangle MHK$  là tam giác gì ?
- Bài 19.** Cho  $\triangle ABC$  và  $\triangle A'B'C'$  có  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $A + A' = 180^\circ$ . Gọi M là trung điểm BC. Lấy D thuộc tia AM sao cho  $AM = \frac{1}{2} AD$ .
- a/ Chứng minh :  $\angle ABD = \angle A'$

b/ Chứng minh :  $AM = \frac{1}{2} B'C'$



### **Bài 3. ĐƯỜNG VUÔNG GÓC – ĐƯỜNG CAO – ĐƯỜNG TRUNG TRỰC**

**Bài 1.** Cho  $xOy < 180^\circ$  và tia phân giác Oz. Lấy  $A \in Oz$  và M là trung điểm của OA. Đường thẳng vuông góc với OA tại M cắt Oy tại B.

a/ Chứng minh :  $AB \parallel Ox$

b/ Nếu  $OBA = 100^\circ$ . Tính số đo góc  $xOy$ .

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  có  $B > 90^\circ$ . Vẽ  $AH \perp CB$  tại H. Trên tia đối của tia HA lấy  $HI = HA$ . Chứng minh :

a/ BH là tia phân giác của góc  $ABI$ .

b/ Chứng minh :  $\triangle ABC = \triangle IBC$ .

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn. Kẻ  $AH \perp CB$  tại H. Lấy  $B'$  thuộc tia HC với  $HB' = HB$ ;  $C'$  thuộc tia HB với  $HC' = HC$ . Chứng minh :  $\triangle ABC = \triangle AB'C'$ .

**Bài 4.** Cho điểm A di động trong góc  $xOy$ . Kẻ  $AB \perp Ox$  tại B. Trên tia đối của tia BA lấy  $BC = BA$ . Vẽ  $AD \perp Oy$  tại D. Trên tia đối của tia DA lấy  $DE = DA$ . Chứng minh :  $OC = OE$  bất kể vị trí của điểm A trong góc  $xOy$ .

**Bài 5.** Cho điểm H là trung điểm của đoạn AB. Vẽ tia  $Hx \perp AB$ . Lấy M, N thuộc Hx (N nằm giữa H và M). Chứng minh :  $\triangle MNA = \triangle MNB$ .

**Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A. Kẻ  $BH \perp AC$  tại H. Chứng minh :  $CBH = \frac{1}{2} BAC$ .

**Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  đều. Kẻ  $BD \perp AC$  tại D. Trên tia đối của tia BD lấy  $BK = AC$ . Tính  $\angle ABC + \angle AKC$ .

**Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A. Kẻ  $AH \perp BC$  tại H. K thuộc tia đối của tia HA sao cho  $HK = HA$ . Tính số đo góc  $BKC$ .

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn. Vẽ  $BH \perp AC$  tại H và  $CK \perp AB$  tại K. Trên tia đối của tia BH lấy  $BM = AC$ , trên tia đối của tia CK lấy  $CN = AB$ . Chứng minh

a/  $\triangle ABM = \triangle NCA$ .

b/  $AM \perp AN$

**Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = AC$ . Vẽ  $BH \perp AC$  tại H. Lấy  $D \in BC$ , kẻ  $DF \perp AC$  tại F và  $DE \perp AB$  tại E. Chứng minh :  $DE + DF = BH$ .

**Bài 11.** Lấy B, C thuộc đường thẳng xy và M là trung điểm BC. D thuộc tia đối của tia BC và E thuộc tia đối của tia CB với  $BD = CE$ . Tia  $Mz \perp xy$  có A thuộc Mz.

a/ Chứng minh :  $\angle BAC$  và  $\angle DAE$  có cùng tia phân giác.

b/ Chứng minh :  $\angle ACE > 90^\circ$

c/ So sánh  $\triangle ABD$  và  $\triangle ACE$ ; So sánh  $\triangle ADC$  và  $\triangle AEB$ .

**Bài 12.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $AH \perp BC$  tại H. Trên nửa mặt phẳng chứa C có bờ AB vẽ  $Ax \perp AH$ , lấy  $D \in Ax$  với  $AD = BC$ . Chứng minh :  $AB \parallel CD$  và  $AB = CD$ .

**Bài 13.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $AH \perp BC$  tại H. Trên nửa mặt phẳng chứa C có bờ AB vẽ  $Ax \perp AH$ , lấy D thuộc Ax với  $AD = BC$ . Chứng minh :  $AB \parallel CD$  và  $AB = CD$ .

**Bài 14.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A có  $A < 90^\circ$ . Vẽ tia  $Ax \perp AB$ . Ax cắt đường thẳng BC tại D. Tính  $\angle ACD - \angle ADC$ .

**Bài 15.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn. Trên nửa mặt phẳng chứa C có bờ AB vẽ  $BD \perp BA$  và  $BD = BA$ . Trên nửa mặt phẳng chứa A có bờ BC vẽ  $BE \perp BC$  và  $BE = BC$ . Chứng minh :  $AE = DC$  và  $AE \perp DC$ .

**Bài 16.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C vẽ  $AE \perp AB$  và  $AE = AB$ . Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B, vẽ  $AF \perp AC$  và  $AF = AC$ .

a/ M là trung điểm EF. Chứng minh :  $AM = \frac{1}{2} BC$

b/ AM kéo dài cắt BC tại H. Chứng minh :  $AH \perp BC$  tại H.

**Bài 17.** Cho  $\triangle ABC$ . Trên nửa mặt phẳng chứa điểm A bờ là đường thẳng BC vẽ tia  $Cx \perp AC$  và lấy  $D \in Cx$  với  $CD = CA$ . Vẽ  $AM \perp BC$  tại M và  $CN \perp BD$  tại N. AM và CN kéo dài cắt nhau tại P. Chứng minh :  $AP = BC$ .

**Bài 18.** Cho  $\triangle ABC$  đều, lấy điểm D thuộc BC với  $BD = \frac{1}{3}BC$ . Vẽ  $DE \perp BC$  ( $E \in AB$ ). Vẽ  $DF \perp AC$  tại F.

$\triangle DEF$  là tam giác gì ?

**Bài 19.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có đường cao AH,  $AB < AC$ . Lấy  $D \in AC$  với  $AD = AB$ . Vẽ  $DE \perp BC$  tại E. Chứng minh :  $HA = HE$ .

**Bài 20.** Về phía ngoài  $\triangle ABC$  vẽ hai tam giác vuông cân tại A là  $\triangle ADB$  và  $\triangle ACE$ . Vẽ  $AH \perp BC$  tại H và HA cắt DE tại K. Vẽ  $AM \perp DE$  tại M và AM cắt BC tại N.

a/ Chứng minh :  $\triangle NCA = \triangle KAE$                       b/ Chứng minh :  $DK = KE$

**Bài 21.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E, F là giao điểm các phân giác trong của các tam giác ABC, HAB, HAC. Chứng minh :  $AD \perp EF$ .

**Bài 22.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, vẽ  $AH \perp BC$ . Gọi M, N, P là 3 điểm lần lượt nằm trong các tam giác ABC, AHB, AHC và cách đều 3 cạnh của mỗi tam giác. Vẽ  $MI \perp BC$  tại I,  $NK \perp BC$  tại K,  $PL \perp BC$  tại L. Chứng minh :  $MI + NK + PL = AH$ .

**Bài 23.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có đường cao AH. Gọi M, N là trung điểm của AH, BH. Chứng minh :  $CM \perp AN$ .

**Bài 24.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A có đường cao AH. Trên BA lấy E sao cho A là trung điểm BE. Gọi I là trung điểm AH. Chứng minh :  $CI \perp HE$ .

**Bài 25.** Gọi G là trực tâm của  $\triangle ABC$ . Gọi E, F là trung điểm của AC và BC. Đường trung trực của AC và BC cắt nhau tại H. Chứng minh :  $BG = 2HE$ ,  $AG = 2HF$ .

**Bài 26.** Cho  $\triangle ABC$  có trực tâm H. Gọi O là giao điểm của 3 đường trung trực. Kéo dài AO lấy  $OA' = OA$ .

a/  $\triangle ACA'$  và  $\triangle ABA'$  là tam giác gì ?

b/ Chứng minh :  $BH = CA'$

c/ Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh : H, M, A' thẳng hàng.

d/ Gọi G là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Chứng minh : H, G, O thẳng hàng và  $HG = 2GO$ .

**Bài 27.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn có đường cao AH. Lấy M, N sao cho AB, AC là đường trung trực của HM và HN. MN cắt AB, AC tại E và F. Chứng minh :

a/  $\triangle AMN$  cân

b/ HA là tia phân giác của góc  $\angle EHF$

c/ AH, EC, BF đồng qui.

-----☆☺☆-----

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 1.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, M là trung điểm của AC. Gọi E, F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM. Chứng minh :  $\frac{BE + BF}{2} > AB$

**Bài 2.** Cho  $\angle xOy = 60^\circ$ . Điểm M tùy ý trên Ox, N tùy ý trên Oy ( $M, N \neq O$ ). Chứng minh :  $OM + ON \leq 2MN$ .

**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  đều. Các điểm D và E lần lượt di động trên các cạnh BC, AC sao cho  $BD = CE$ . Xác định vị trí của D, E để DE có độ dài nhỏ nhất.

**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn. Tia Ax nằm trong góc  $\angle BAC$ . Từ B và C kẻ BH và CK cùng vuông góc với Ax. ( $H, K \in Ax$ ). Gọi M là giao điểm của Ax và BC.

a/ Chứng minh :  $BM \geq BH$

b/ Chứng minh :  $BC \geq BH + CK$

c/ Tìm vị trí của tia Ax để  $BH + CK$  lớn nhất.

- Bài 5.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn. Tia  $Ax$  nằm trong góc  $BAC$ . Từ  $B$  và  $C$  kẻ  $BH$  và  $CK$  cùng vuông góc với  $Ax$ . ( $H, K \in Ax$ ). Gọi  $M$  là giao điểm của  $Ax$  và  $BC$ . Tìm vị trí của tia  $Ax$  để  $BH + CK$  lớn nhất.
- Bài 6.** Cho  $\triangle ABC$  biết  $C < B < 90^\circ$ . Gọi  $AH$  là đường cao,  $M$  là điểm thuộc đoạn  $HB$ .  $N$  là điểm nằm trên đường thẳng  $BC$  nhưng không thuộc đoạn  $BC$ . Chứng minh rằng:  $AM < AB < AN$ .
- Bài 7.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có đường thẳng  $xy \perp AC$  tại  $C$ . Tia phân giác của góc  $B$  cắt  $AC$  tại  $D$  và cắt  $xy$  tại  $E$ .
- a/  $\triangle BCE$  là tam giác gì ?      b/ So sánh  $CE$  và  $AB$ .  
c/ Chứng minh:  $DA < DC$       d/ So sánh  $DB$  với  $DE$ .
- Bài 8.** Cho  $\triangle ABC$  có điểm  $D$  nằm bên trong tam giác sao cho  $AD = AB$ ,  $BD$  cắt  $AC$  tại  $I$ .
- a/ So sánh  $AD$  và  $AI$       b/ Chứng minh:  $AB < AC$
- Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AD$  là phân giác của  $BAC$  ( $D \in BC$ ) và  $AB < AC$ . Trên cạnh  $AC$  lấy  $AE = AB$ .
- a/ Chứng minh:  $\triangle ABD = \triangle AED$       b/ Chứng minh:  $DEC > ADB$   
c/ So sánh  $ADB$  và  $C$       d/ Chứng minh:  $DB < DC$ .
- Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  có 3 góc nhọn và  $AB < AC$ . Kẻ  $BD \perp AC$  tại  $D$ ,  $CE \perp AB$  tại  $E$ ,  $BD$  cắt  $CE$  tại  $I$ .
- a/ So sánh  $ABD$  và  $ACE$       b/ Chứng minh:  $IB < IC$   
c/ So sánh  $CE \cdot AB$  và  $BD \cdot AC$       d/ Chứng minh:  $CE > BD$ .
- Bài 11.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . Trên cạnh  $BC$  lấy  $D, E$  sao cho  $BD = DE = EC$
- a/ Chứng minh:  $\triangle ADE$  cân      b/ So sánh  $AB$  với  $AD$ .  
c/ Trên tia đối của tia  $DA$  lấy  $DF = DA$ . Chứng minh:  $EF = AB$   
d/ Chứng minh:  $BAD < DAE$ .
- Bài 12.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  có  $BAC = 20^\circ$ . Ngoài  $\triangle ABC$  dựng hai tam giác  $\triangle ABD$  và  $\triangle ACE$  cân tại  $A$  và  $DAB = CAE = 20^\circ$
- a/  $\triangle ADE$  là tam giác gì ?      b/ So sánh  $BC$  với  $BD$  và  $CE$ .  
c/ Chứng minh:  $BC > \frac{1}{3}AB$
- Bài 13.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  có điểm  $D$  nằm trong tam giác sao cho  $ADB > ADC$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AC$  không chứa điểm  $B$  vẽ góc  $CAE$  với  $AE = AD$  và  $CAE = BAD$ .
- a/ Chứng minh:  $AEC = ADB$       b/ So sánh  $CED$  với  $CDE$   
c/ So sánh  $CED$  với  $CDE$       d/ Chứng minh:  $DB < DC$
- Bài 14.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  có điểm  $D$  trong tam giác sao cho  $ADB > ADC$ . Chứng minh:  $DB < DC$ .
- Bài 15.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB < AC$  và đường trung tuyến  $AE$ . Kẻ  $BO \perp AE$  tại  $O$ .
- a/ Chứng minh:  $AEC > 90^\circ$       b/ Chứng minh:  $BC < 2AC$
- Bài 16.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB > AC$  và đường trung tuyến  $AM$ . Kẻ  $CI \perp AM$ .
- a/ Chứng minh:  $AMB > 90^\circ$       b/ Chứng minh:  $BC < 2AB$
- Bài 17.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB > AC$ . Chứng minh:  $BC < 2AB$ .
- Bài 18.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC > AC > AB$ . Gọi  $I$  là giao điểm của 3 đường phân giác trong tam giác.
- a/ Chứng minh:  $IAB > IBC, IBC > ICB$       b/ Chứng minh:  $IC > IB > IA$
- Bài 19.** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC > AC > AB$ . Gọi  $I$  là giao điểm của 3 đường phân giác trong tam giác. Chứng minh:  $IC > IB > IA$ .
- Bài 20.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . Trên  $BC$  lấy hai điểm  $D, E$  sao cho  $BD = DE = EC$ .
- a/ Chứng minh:  $ADB > C$  và  $AB > AD$   
b/ Trên tia đối của tia  $DA$  lấy điểm  $F$  sao cho:  $DF = DA$ . Chứng minh:  $EF = AB$   
c/ Chứng minh:  $BAD < DAE$  và  $AB > AE$

**Bài 21.** Cho  $\triangle ABC$  cân tại A. Trên BC lấy hai điểm D, E sao cho  $BD = DE = EC$ . Chứng minh :  $AB > AE$  và  $BAD < DAE$ .

**Bài 22.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB > AC$ . Trên AB lấy điểm F sao cho  $AC = AF$ . Gọi AD là đường phân giác của  $\triangle ABC$ . Trên tia AD lấy điểm E tùy ý.

a/ Chứng minh :  $\triangle AFD = \triangle ACD$                       b/ Chứng minh :  $\triangle AEC = \triangle AEF$

c/ Chứng minh :  $AB - AC = BF$

**Bài 23.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB > AC$ , AD là đường phân giác.

a/ Chứng minh :  $\angle ADB = \frac{\angle BAC}{2} + \angle ACB$                       b/ Chứng minh :  $\angle ADB = \frac{\angle BAC}{2} + \angle ABC$

c/ Chứng minh :  $\angle ADB > \angle ADC$

**Bài 24.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB > AC$ , AD là đường phân giác. Chứng minh :  $\angle ADB > \angle ADC$ .

**Bài 25.** Cho  $\triangle ABC$  có điểm M thuộc tia phân giác ngoài tại C. Chứng minh :  $MA + MB > AC + BC$ .

**Bài 26.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB > AC$ . Trên đường trung trực của BC lấy điểm E và D là giao điểm của đường trung trực của BC với AB. Chứng minh :  $AE + AC + EC > AD + DC + CA$ .

-----☆☺☆-----

CHÚC CÁC EM ĐẠT ĐIỂM CAO TRONG KỲ THI HỌC KỲ II

www.luyenthiminhtri.com