

Câu I: (2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $x^2 + 8x + 7 = 0$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y = -6 \\ 5x + y = 20 \end{cases}$$

Câu II: (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 4\sqrt{x} + 4} : \left(\frac{x}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x} + 2} \right)$, với $x > 0$.

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

Câu III: (2,0 điểm)

1. Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a, b để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d'): y = 2x + 3$ và đi qua điểm $A(1; -1)$.

2. Cho phương trình $x^2 - (m - 2)x - 3 = 0$ (m là tham số). Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m . Tìm m để các nghiệm đó thỏa mãn hệ thức

$$\sqrt{x_1^2 + 2018} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2018} + x_2.$$

Câu IV: (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B , I là trung điểm của đoạn thẳng OA , E là điểm thay đổi trên đường tròn (O) sao cho E không trùng với A và B . Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với đường thẳng EI cắt d_1, d_2 lần lượt tại M, N .

1. Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh $IB.NE = 3.IE.NB$.

3. Khi điểm E thay đổi, chứng minh tích $AM.BN$ có giá trị không đổi và tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MNI theo R .

Câu V: (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} \geq 30.$$

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký giám thị 1: Chữ ký giám thị 2:

Hướng dẫn chung: Nếu học sinh giải cách khác với cách nêu trong HDC này, mà đúng, thì vẫn được điểm tối đa của phần (câu) tương ứng.

Câu	Ý	NỘI DUNG	Điểm
I (2,0đ)	1 (1,0đ)	Giải phương trình: $x^2 + 8x + 7 = 0$.	
		Ta thấy phương trình có các hệ số thỏa mãn $a - b + c = 1 - 8 + 7 = 0$.	0,5
		Do đó phương trình có hai nghiệm $x = -1$; $x = -7$	0,5
	2 (1,0đ)	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = -6 \\ 5x + y = 20 \end{cases}$	
		Hệ tương đương với $\begin{cases} 7x = 14 \\ 5x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 5x + y = 20 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 10 + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases}$	0,5	
II (2,0đ)	1 (1,0đ)	Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$, với $x > 0$.	
		Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$	0,25
		$= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \left(\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$	
		$= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$	0,25
		$= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+2}$	0,25
		$= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	2 (1,0đ)	Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.	
		Với $x > 0$ ta có $A = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$ và $\sqrt{x} > 0$; $\sqrt{x}+2 > 0$.	0,5
		Khi đó $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \leq 3$	
		$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$	0,25
	Kết hợp với điều kiện ta được: $0 < x \leq 1$.	0,25	
III (2,0đ)	1 (1,0đ)	Cho đường thẳng (d): $y = ax + b$. Tìm a, b để đường thẳng (d) song song với đường thẳng (d'): $y = 2x + 3$ và đi qua điểm $A(1; -1)$.	
		Đường thẳng (d): $y = ax + b$ song song với đường thẳng (d'): $y = 2x + 3$ nên ta có $\begin{cases} a = 2 \\ b \neq 3 \end{cases}$.	0,5

	<p>Khi đó $(d): y = 2x + b$ đi qua điểm $A(1; -1)$ nên: $-1 = 2.1 + b \Leftrightarrow b = -3$ (thỏa mãn điều kiện $b \neq 3$). Vậy $a = 2, b = -3$.</p>	0,5
2 (1,0đ)	<p>Cho phương trình $x^2 - (m-2)x - 3 = 0$ (m là tham số). Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m. Tìm m để các nghiệm đó thỏa mãn hệ thức: $\sqrt{x_1^2 + 2018} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2018} + x_2$.</p>	
	<p>Ta có $\Delta = (m-2)^2 + 12 > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m. (Lưu ý: Học sinh có thể nhận xét $ac = -3 < 0$ để suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, trái dấu với mọi m)</p>	0,25
	<p>Ta có: $\sqrt{x_1^2 + 2018} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2018} + x_2$ $\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 2018} - \sqrt{x_2^2 + 2018} = x_2 + x_1$ $\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 2018} + \sqrt{x_2^2 + 2018}} = x_2 + x_1$</p>	0,25
	<p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 & (1) \\ \sqrt{x_1^2 + 2018} + \sqrt{x_2^2 + 2018} = x_1 - x_2 & (2) \end{cases}$ Theo định lí Viet ta có: $x_1 + x_2 = m - 2$. Khi đó: (1) $\Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$. (2) không xảy ra. Thật vậy:</p>	0,25
	<p>Do $\sqrt{x_1^2 + 2018} > x_1 ; \sqrt{x_2^2 + 2018} > x_2$ suy ra $\sqrt{x_1^2 + 2018} + \sqrt{x_2^2 + 2018} > x_1 + x_2 \geq x_1 - x_2$. Vậy $m = 2$.</p>	0,25
IV (3,0đ)	<p>Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B, I là trung điểm của đoạn thẳng OA, E là điểm thay đổi trên đường tròn (O) sao cho E không trùng với A và B. Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với đường thẳng EI cắt d_1, d_2 lần lượt tại M, N.</p>	
	<p>Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.</p>	
1 (1,0đ)	<p>$MAI = MEI = 90^\circ$</p>	0,5
	<p>Suy ra $MAI + MEI = 180^\circ$. Vậy $AMEI$ nội tiếp.</p>	0,5

	2 (1,0đ)	Chứng minh $IB.NE = 3.IE.NB$.	
		+) $EAI = EBN$ (cùng phụ với EBA) +) $AEI = BEN$ (cùng phụ với IEB). Suy ra $\triangle AIE \sim \triangle NBE$.	0,5
		$\Rightarrow \frac{IA}{IE} = \frac{NB}{NE} \Rightarrow IA.NE = IE.NB$	0,25
		$\Rightarrow \frac{IB}{3}.NE = IE.NB \Rightarrow IB.NE = 3IE.NB$ (đpcm).	0,25
	3 (1,0đ)	Khi điểm E thay đổi, chứng minh tích $AM.BN$ có giá trị không đổi và tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MNI theo R.	
		Do tứ giác $AMEI$ nội tiếp nên $AMI = AEI$ (1). Tương tự ta có tứ giác $BNEI$ nên $BIN = BEN$ (2). Theo trên ta có $AEI = BEN$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $AMI = BIN$ (4).	0,25
		Do tam giác AMI và BIN vuông tại A và B , suy ra $\triangle AMI \sim \triangle BIN$. Suy ra: $\frac{AM}{BI} = \frac{AI}{BN} \Rightarrow AM.BN = AI.BI$ không đổi.	0,25
		Từ (4) ta có: $BIN + AIM = AMI + AIM = 90^\circ \Rightarrow MIN = 90^\circ$ hay $\triangle MNI$ vuông tại I . Khi đó: $S_{\triangle MNI} = \frac{1}{2} IM.IN = \frac{1}{2} \sqrt{AM^2 + AI^2} \cdot \sqrt{BN^2 + BI^2}$ $\geq \frac{1}{2} \sqrt{2AM.AI} \cdot \sqrt{2BN.BI} = \sqrt{AM.BN.AI.BI} = AI.BI = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4}$	0,25
		Dấu “=” xảy ra khi $AM = AI, BN = BI$. Vậy $S_{\triangle MNI}$ đạt GTNN bằng $\frac{3R^2}{4}$	0,25
V (1,0đ)	(1,0đ)	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} \geq 30$.	
		Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $\begin{cases} 1 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} > 0 \\ ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow ab + bc + ca \geq 9abc > 0 \Rightarrow \frac{1}{abc} \geq \frac{9}{ab + bc + ca}$	0,25
		Khi đó: $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{7}{ab + bc + ca} \quad (1)$	
		Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$ với mọi $x, y, z > 0$ ta được $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)}$ $= \frac{9}{(a + b + c)^2} = 9 \quad (2)$	0,25
		Lại có $1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca) \quad (3)$	0,25
		Thay (2), (3) vào (1) ta được $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} \geq 9 + 7.3 = 30$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.	0,25

----- Hết -----