SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Năm học: 2018 - 2019

Môn thi: TOÁN (chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút.

(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1 (*2,0 điểm*).

a) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x^2}{(x+y)(1-y)}-\dfrac{y^2}{(x+y)(1+x)}-\dfrac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)}$.

b) Chứng minh rằng $\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\dfrac{1}{2017^2}+\dfrac{1}{2018^2}}<2018.$

Câu 2 (*2,0 điểm*).

a) Giải phương trình $2\left((1-x)\sqrt{x^2+2x-1}+x\right)=x^2-1.$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-3y-2+\sqrt{y(x-y-1)+x}=0 \\ 3\sqrt{8-x}-\dfrac{4y}{\sqrt{y+1}+1}=x^2-14y-8. \end{cases}$

Câu 3 (*3,0 điểm*).

Cho đoạn thẳng *AB* và *C* là điểm nằm giữa hai điểm *A*, *B*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng *AB*, vẽ nửa đường tròn đường kính *AB* và nửa đường tròn đường kính *BC*. Lấy điểm *M* thuộc nửa đường tròn đường kính *BC* ($M\neq B; M\neq C$). Kẻ *MH* vuông góc với *BC* ($H\in BC$), đường thẳng *MH* cắt nửa đường tròn đường kính *AB* tại *K*. Hai đường thẳng *AK* và *CM* giao nhau tại *E*.

a) Chứng minh $BE^2=BC.AB.$

b) Từ *C* kẻ $CN\perp AB$ (*N* thuộc nửa đường tròn đường kính *AB*), gọi *P* là giao điểm của *NK* và *CE*. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác *BNE* và *PNE* cùng nằm trên đường thẳng *BP*.

c) Cho $BC=2R$. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác *MCH* và *MBH*. Xác định vị trí điểm *M* để chu vi tam giác O_1HO_2 lớn nhất.

Câu 4 (*1,5 điểm*).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2x^2+5y^2=41+2xy.$

b) Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2019 thỏa mãn n^3+2019 chia hết cho 6.

Câu 5 (*1,5 điểm*).

a) Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$.

Chứng minh rằng $3(a+b)^2-(a+b)+4ab\geq\dfrac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}.$

b) Cho 100 điểm trên mặt phẳng sao cho trong bất kỳ bốn điểm nào cũng có ít nhất ba điểm thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể bỏ đi một điểm trong 100 điểm đó để 99 điểm còn lại cùng thuộc một đường thẳng.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM THI
ĐỀTHI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN
Năm học: 2018 - 2019
Môn : **TOÁN (chuyên)**

(Hướng dẫn chấm gồm: 05 trang)

Câu 1: ***(2,0 điểm)***

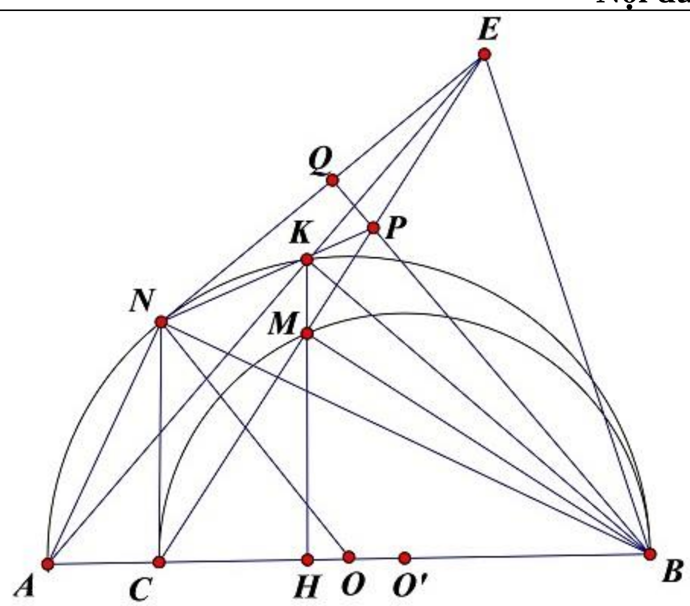
Nội dung	**Điểm**
a) (1,0 điểm) Điều kiện: $x \neq -y; x \neq -1; y \neq 1.$	0,25
$P = \dfrac{x^3 + x^2 - y^2 + y^3 - x^3y^2 - x^2y^3}{(x+y)(1-y)(1+x)} = \dfrac{x^2 - xy + y^2 + x - y - x^2y^2}{(1-y)(1+x)}$	0,25
$= \dfrac{x^2 + x^2y + x - y}{1+x}$	0,25
$= x + xy - y.$	0,25
b) (1,0 điểm) Đặt $S = \sqrt{1 + \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \dfrac{1}{2017^2} + \dfrac{1}{2018^2}}.$ Ta có $\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)^2 + \dfrac{2}{n(n+1)}}$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$	0,25
$= \sqrt{\left(1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)^2} = 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}.$	0,25
Áp dụng đẳng thức trên ta được $S = \left(1 + \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(1 + \dfrac{1}{2017} - \dfrac{1}{2018}\right)$	0,25
$= 2018 - \dfrac{1}{2018} < 2018.$ (điều phải chứng minh)	0,25

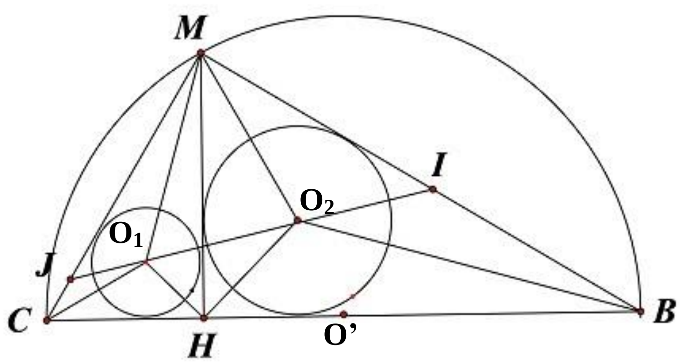
Câu 2: ***(2,0 điểm)***

Nội dung	**Điểm**
a) (1,0 điểm) Điều kiện: $x^2 + 2x - 1 > 0.$ $2\left((1-x)\sqrt{x^2+2x-1} + x\right) = x^2 - 1 \Leftrightarrow 2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2 - 2x - 1 \;\; (1)$ Đặt $\sqrt{x^2+2x-1} = y. \quad (y \geq 0)$	0,25
PT (1) trở thành $y^2 - 2(1-x)y - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -2x \end{array}\right.$	0,25
Với $y = 2$ thì $\sqrt{x^2+2x-1} = 2 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{6}.$ (thỏa mãn điều kiện) Với $y = -2x$ thì $\sqrt{x^2+2x-1} = -2x$ (vô nghiệm)	0,25

Phương trình có tập nghiệm $\left\{-1-\sqrt{6};-1+\sqrt{6}\right\}$.	0,25
2) (1,0 điểm) Điều kiện $x\le 8; y\ge -1; x-y\ge 0$. Hệ đã cho tương đương $\begin{cases} x-3y-2+\sqrt{(x-y)(y+1)}=0 & (1) \\ 3\sqrt{8-x}-\dfrac{4y}{\sqrt{y+1}+1}=x^2-14y-8 & (2) \end{cases}$ Nhận xét: $y=-1$và $y=0$ không thỏa mãn, do đó	0,25
$(1)\Leftrightarrow \dfrac{x-y}{y+1}+\sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}}=1\Leftrightarrow x=2y+1$. Thế vào (2) ta được phương trình $4\sqrt{y+1}-3\sqrt{7-2y}+4y^2-10y-11=0\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{y+1}-2\right)-3\left(\sqrt{7-2y}-1\right)+4y^2-10y-6=0$ $\Leftrightarrow (y-3)\left(\dfrac{2}{\sqrt{y+1}+2}+\dfrac{3}{\sqrt{7-2y}+1}+2y+1\right)=0.$ (3)	0,25
Với $-1<y\le\dfrac{7}{2}$ thì $\dfrac{2}{\sqrt{y+1}+2}\ge\dfrac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}};\dfrac{3}{\sqrt{7-2y}+1}>\dfrac{3}{4};2y+1>-1$ $\Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{y+1}+2}+\dfrac{3}{\sqrt{7-2y}+1}+2y+1>0$.	0,25
Do đó $(3)\Leftrightarrow y-3=0\Leftrightarrow y=3.$ $\Rightarrow x=7$ thỏa mãn điều kiện. Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(7;3)$.	0,25

Câu 3: ***(3,0 điểm)***

Nội dung		Điểm
	a) (1,0 điểm). Ta có $BME=BKE=90^0$ nên tứ giác $BMKE$ nội tiếp.	0,25
	$\Rightarrow HKB=CEB$ mà $HKB=BAE$ (vì cùng phụ với HKA) $\Rightarrow BAE=CEB$.	0,25
	ΔBEC đồng dạng với ΔBAE (vì ABE chung và $BAE=CEB$)	0,25
	Do đó $\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{BC}{BE}\Rightarrow BE^2=BC.AB.$	0,25
b) (1,0 điểm). Xét tam giác vuông ABN có $CN\perp AB\Rightarrow BN^2=BC.AB$ mà $BE^2=BC.AB$ suy ra $BN=BE$ hay ΔBNE cân tai B suy ra $BNE=BEN$. (1)		0,25

Mặt khác, theo câu trên ta có $CEB = BAE$ và $BAE = BNP$ suy ra $CEB = BNP$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $PNE = PEN$ hay ΔPNE cân tại $P \Rightarrow NP = PE$.	0,25
Vì $NP = PE$ và $BN = BE$ nên $BP \perp NE$.	0,25
Suy ra BP là đường phân giác của các góc EBN và EPN . Do đó tâm đường tròn nội tiếp các tam giác BNE và PNE cùng nằm trên đường thẳng BP.	0,25
c) (1,0 điểm).  Gọi giao điểm của O_1O_2 với MB, MC lần lượt là I và J. Ta có $CMH = MBH$ (vì cùng phụ MCB). Suy ra $O_1MH = O_2BH$ Mặt khác $O_1HM = O_2HB = 45^0$. Suy ra ΔMO_1H đồng dạng với ΔBO_2H. Do đó $\dfrac{O_1H}{O_2H} = \dfrac{MH}{HB}$ mà $\dfrac{MH}{HB} = \dfrac{MC}{MB}$ $\Rightarrow \dfrac{O_1H}{O_2H} = \dfrac{MC}{MB}$.	0,25
ΔO_1HO_2 đồng dạng với ΔCMB (vì $O_1HO_2 = CMB = 90^0$ và $\dfrac{O_1H}{O_2H} = \dfrac{MC}{MB}$). Suy ra $HO_2O_1 = MBC \Rightarrow MBC + HO_2I = 180^0$. Suy ra tứ giác BHO_2I nội tiếp $\Rightarrow MIJ = O_2HB = 45^0$. Suy ra ΔMIJ cân tại $M \Rightarrow MI = MJ$.	0,25
Ta có $\Delta MO_2I = \Delta MO_2H$ (g.c.g) suy ra $MI = MH$ và $O_2I = O_2H$. Tương tự cũng có $O_1H = O_1J$.	0,25
Chu vi tam giác O_1HO_2 là $O_1H + HO_2 + O_1O_2 = JO_1 + O_1O_2 + O_2I = \sqrt{2}MI = \sqrt{2}MH$. Ta có $MH \le R$. Suy ra chu vi tam giác O_1HO_2 lớn nhất bằng $\sqrt{2}R$ khi $MH = R$, hay M nằm chính giữa nửa đường tròn đường kính BC.	0,25

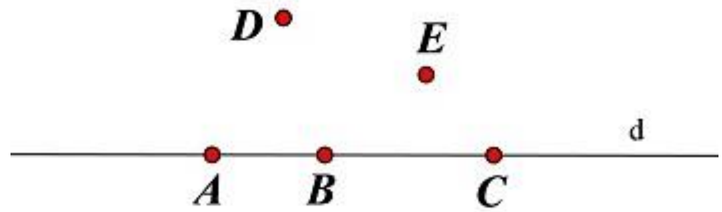
Câu 4: ***(1,5 điểm)***

Nội dung	Điểm
a) (0,75 điểm). Phương trình đã cho tương đương $2x^2 - 2xy + 5y^2 - 41 = 0$. (1) Ta có $\Delta'_x = 82 - 9y^2 \ge 0 \Rightarrow y^2 \le \dfrac{82}{9}$. Mặt khác từ (1) ta có y^2 là số lẻ, nên $y^2 \in \{1;9\}$	0,25
Với $y = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 36 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$. Với $y = -1 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 36 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$. Với $y = 3 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$	0,25

Với $y=-3 \Rightarrow 2x^2+6x+4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2. \end{array}\right.$	
Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn là: $\{(1;3),(2;3),(-1;-3),(-2;-3)\}$.	0,25
b) (0,75 điểm). Đặt $n=6q+r,\ r\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Khi đó n^3+2019 chia hết cho 6 khi r^3+3 chia hết cho 6. Nếu r chẵn thì r^3+3 lẻ, do đó r^3+3 không chia hết cho 6. Suy ra $r\in\{1,3,5\}$.	0,25
Với $r=1 \Rightarrow r^3+3=4$ không chia hết cho 6. Với $r=3 \Rightarrow r^3+3=30 \vdots 6$. Với $r=5 \Rightarrow r^3+3=128$ không chia hết cho 6.	0,25
Suy ra $n=6q+3.$ Mà $0\le n\le 2019 \Rightarrow 0\le q\le 336.$ Vậy có tất cả 337 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.	0,25

Câu 5: ***(1,5 điểm)***

Nội dung	Điểm
a) (0,75 điểm). Bất đẳng thức đã cho tương đương $\dfrac{1}{\sqrt{a+3b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b+3a}}\le 2.$ Áp dụng BĐT Cô si cho 2 số dương ta có $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}}=\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}.\sqrt{\dfrac{a+b}{a+3b}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a+b}{a+3b}\right)$ (1) và $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}.\sqrt{\dfrac{2b}{a+3b}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2b}{a+3b}\right).$ (2)	0,25
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{a+b}\right)\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{a+3b}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{a+b}\right).$ (3) Chứng minh tương tự ta cũng có $\dfrac{1}{\sqrt{b+3a}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{b}{a+b}\right).$ (4)	0,25
Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{a+3b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b+3a}}\le 2.$ (điều phải chứng minh) Dấu "=" xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{4}.$	0,25
b) (0,75 điểm). Nếu tất cả 100 điểm cùng thuộc một đường thẳng thì bài toán hiển nhiên đúng.	0,25
Nếu không phải cả 100 điểm đều thẳng hàng. Ta chọn ra bốn điểm A,B,C,D mà không phải tất cả đều thẳng hàng. Theo giả thiết trong 4 điểm A,B,C,D phải có 3 điểm thẳng hàng, giả sử 3 điểm A,B,C thuộc đường thẳng d, còn điểm D nằm ngoài đường thẳng d. Ta sẽ chứng minh 96 điểm còn lại thuộc đường thẳng d bằng phương pháp phản chứng. Giả sử trong 96 điểm còn lại, tồn tại điểm E nằm ngoài đường thẳng d. Xét bốn điểm A,B,D,E phải có 3 điểm thẳng hàng. Do 3 điểm A,B,D không thẳng hàng, 3 điểm A,B,E không thẳng hàng nên 3 điểm A,D,E thẳng hàng hoặc 3 điểm B,D,E thẳng hàng.	0,25

	
Trường hợp 3 điểm A, D, E thẳng hàng thì 3 điểm B, D, E không thẳng hàng, 3 điểm C, D, E không thẳng hàng, do đó trong 4 điểm B, C, D, E không có 3 điểm nào thẳng hàng, trái với giả thiết. Trong trường hợp B, D, E thẳng hàng thì tương tự, trong 4 điểm A, C, D, E không có 3 điểm nào thẳng hàng, trái với giả thiết. Như vậy ngoài 3 điểm A, B, C thuộc đường thẳng d, phải có 96 điểm nữa cùng thuộc d. Bài toán được chứng minh.	0,25

Chú ý:
- *Nếu thí sinh làm đúng, cách giải khác với đáp án, phù hợp kiến thức của chương trình THCS thì tổ chấm thống nhất cho điểm thành phần đảm bảo tổng điểm như hướng dẫn quy định.*
- *Tổng điểm toàn bài không làm tròn.*

---------- HẾT ----------