

$$= 10100$$

$$= 101\ 100$$

$$\text{Vậy } n = 100$$

* Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho biết: $1 + 2 + 3 + \dots + n = 345$. Hãy tìm số n .

Bài 2: Tìm số n biết rằng

$$98 + 102 + \dots + n = 15050$$

Bài 3: Cho dãy số 10, 11, 12, 13, ..., x . Tìm x để tổng của dãy số trên bằng 5106

Dạng 9: Tính tổng của dãy số

Các bài toán được trình bày ở chuyên đề này được phân ra hai dạng chính, đó là:
Dạng thứ nhất: Dãy số với các số hạng là số nguyên, phân số (hoặc số thập phân) cách đều

Dạng thứ hai: Dãy số với các số hạng không cách đều.

Dạng 1: Dãy số mà các số hạng cách đều.

Xuất phát từ một bài Toán như sau:

$$\text{Tính: } A = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

Ta thấy tổng A có 100 số hạng, ta chia thành 50 nhóm, mỗi nhóm có tổng là 101 như sau:

$$A = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (50 + 51) = 101 + 101 + \dots + 101 = 50 \times 101 = 5050.$$

Đây là bài Toán mà lúc lên 7 tuổi nhà Toán học Gau-xơ đã tính rất nhanh tổng các số Tự nhiên từ 1 đến 100 trước sự ngạc nhiên của thầy giáo và các bạn bè cùng lớp.

Như vậy bài toán trên là cơ sở đầu tiên để chúng ta tìm hiểu và khai thác thêm rất nhiều các bài tập tương tự, được đưa ra ở nhiều dạng khác nhau, được áp dụng ở nhiều thể loại toán khác nhau nhưng chủ yếu là: tính toán, tìm số, so sánh, chứng minh. Để giải quyết được các dạng toán đó chúng ta cần phải nắm được quy luật của dãy số, tìm được số hạng tổng quát, ngoài ra cần phải kết hợp những công cụ giải toán khác nhau nữa.

Cách giải:

Nếu số hạng của dãy số cách đều nhau thì tổng của hai số hạng cách đều đầu và số hạng cuối trong dãy số đó bằng nhau. Vì vậy:

Tổng các số hạng của dãy bằng tổng của một cặp hai số hạng cách đầu số hạng đầu và cuối nhân với số hạng của dãy chia cho 2.

Viết thành sơ đồ:

$$\text{Tổng của dãy số cách đều} = (\text{số đầu} + \text{số cuối}) \times (\text{số số hạng} : 2)$$

Từ sơ đồ trên ta suy ra:

$$\text{Số đầu của dãy} = \text{tổng} \times 2 : \text{số số hạng} - \text{số hạng cuối.}$$

$$\text{Số cuối của dãy} = \text{tổng} \times 2 : \text{số số hạng} - \text{số đầu.}$$

Sau đây là một số bài tập được phân thành các thể loại, trong đó đã phân thành hai dạng trên:

Bài 1: Tính tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên.

Giải:

19 số lẻ liên tiếp đầu tiên là:

1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37.

Ta thấy: $1 + 37 = 38$; $5 + 33 = 38$

$1 + 35 = 38$; $7 + 31 = 38$

Nếu ta sắp xếp các cặp số từ hai đầu số vào, ta được các cặp số đều có tổng số là 38.

Số cặp số là:

$19 : 2 = 9$ (cặp số) dư một số hạng.

Số hạng dư này là số hạng ở chính giữa dãy số và là số 19. Vậy tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên là:

$39 \times 9 + 19 = 361$

Đáp số: 361.

Nhận xét: Khi số số hạng của dãy số lẻ (19) thì khi sắp cặp số sẽ dư lại số hạng ở chính giữa vì số lẻ không chia hết cho 2, nên dãy số có nhiều số hạng thì việc tìm số hạng còn lại sẽ rất khó khăn.

Vậy ta có thể làm cách 2 như sau:

Ta bỏ lại số hạng đầu tiên là số 1 thì dãy số có: $19 - 1 = 18$ (số hạng)

Ta thấy: $3 + 37 = 40$; $7 + 33 = 40$

$5 + 35 = 40$; $9 + 31 = 40$

.....

Khi đó, nếu ta sắp xếp các cặp số từ 2 đầu dãy số gồm 18 số hạng vào thì được các cặp số có tổng là 40.

Số cặp số là: $18 : 2 = 9$ (cặp số)

Tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên là:

$1 + 40 \times 9 = 361$

Chú ý: Khi số hạng là số lẻ, ta để lại một số hạng ở 2 đầu dãy số (số đầu, hoặc số cuối) để còn lại một số chẵn số hạng rồi sắp cặp; lấy tổng của mỗi cặp nhân với số cặp rồi cộng với số hạng đã để lại thì được tổng của dãy số.

Bài 2: Tính tổng của số tự nhiên từ 1 đến n.

Giải:

Ghép các số: 1, 2,, n - 1, n thành từng cặp (không sắp thứ tự) : 1 với n, 2 với (n - 1), 3 với (n - 2),

Khi n chẵn, ta có $S = n \times (n + 1) : 2$

Khi n lẻ, thì n - 1 chẵn và ta có:

$1 + 2 + \dots + (n - 1) = (n - 1) \times n : 2$

Từ đó ta cũng có:

$$\begin{aligned} S &= (n - 1) \times n : 2 + n \\ &= (n - 1) \times n : 2 + 2 \times n : 2 \\ &= [(n - 1) \times n + 2 \times n] : 2 \\ &= (n - 1 + 2) \times n : 2 \\ &= n \times (n + 1) : 2 \end{aligned}$$

Khi học sinh đã làm quen và thực hiện thành thạo thì hướng dẫn học sinh áp dụng công thức luôn mà không cần nhóm thành các cặp số có tổng bằng nhau.

Tổng của dãy số cách đều = (số đầu + số cuối) x số số hạng : 2

Bài 3: Tính $E = 10,11 + 11,12 + 12,13 + \dots + 98,99 + 100$

Lời giải

Ta có thể đưa các số hạng của tổng trên về dạng số tự nhiên bằng cách nhân cả hai vế với 100, khi đó ta có:

$$100 \times E = 1011 + 1112 + 1213 + \dots + 9899 + 1000$$

Áp dụng công thức tính tổng ta tính được tổng là $E = 4954,95$

Hoặc giải như sau:

$$\text{Ta thấy: } 11,12 - 10,11 = 12,13 - 11,12 = \dots = 1,01$$

Vậy đây là dãy số cách đều 1,01 đơn vị.

Dãy số có số số hạng là : $(100 - 10,11) : 1,01 + 1 = 90$ số hạng

Tổng của dãy số là : $(10,11 + 100) \times 90 : 2 = 4954,95$

Bài 4: Cho dãy số: 1, 2, 3, 195. Tính tổng các chữ số trong dãy?

Giải:

Ta viết lại dãy số và bổ sung thêm các số: 0, 196, 197, 198, 199 vào dãy: 0, 1, 2, 3, 9

10, 11, 12, 13, 19

.....

90, 91, 92, 93, 99

100, 101, 102, 103, 109

.....

Vì có 200 số và mỗi dòng có 10 số, nên có $200 : 10 = 20$ (dòng)

Tổng các chữ số hàng đơn vị trong mỗi dòng là:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 9 \times 10 : 2 = 45$$

Vậy tổng các chữ số hàng đơn vị là:

$$45 \times 20 = 900$$

Tổng các chữ số hàng chục trong 10 dòng đầu đều bằng tổng các chữ số hàng chục trong 10 dòng sau và bằng:

$$1 \times 10 + 2 \times 10 + \dots + 9 \times 10 = (1 + 2 + \dots + 9) \times 10 = 45 \times 10 = 450$$

Vậy tổng các chữ số hàng chục là:

$$450 \times 2 = 900$$

Ngoài ra dễ thấy tổng các chữ số hàng trăm là: $10 \times 10 = 100$.

Vậy tổng các chữ số của dãy số này là:

$$900 + 900 + 100 = 1900$$

Từ đó suy ra tổng các chữ số của dãy ban đầu là:

$$1900 - (1 + 9 + 6 + 1 + 9 + 7 + 1 + 9 + 8 + 1 + 9 + 9) = 1830$$

Trong Toán học nói riêng và trong khoa học nói chung, chúng ta thường nhờ vào suy luận quy nạp không hoàn toàn mà phát hiện ra những kết luận (gọi là giả thuyết) nào đó. Sau đó chúng ta sử dụng suy luận diễn dịch hoặc quy nạp hoàn toàn để kiểm tra sự đúng đắn của kết luận đó. Khi dạy học tiểu học, điều nói trên cũng được lưu ý.

Bài 5: Tính tổng tất cả số thập phân có phần nguyên là 9, phần thập phân có 3 chữ số:

Giải:

Các số thập phân có phần nguyên là 9, phần thập phân có 3 chữ số là:

9,000; 9,001; 9,002; 9,003; 9,004; 9,005; 9,006; 9,007; 9,008; ; 9,999 tức là có 1000 số.

Tổng tất cả các số của dãy số trên là:

$$(9,000 + 9,999) \times 1000 : 2 = 9499,5$$

Đáp số: 9499,5

Bài 6: Phải thêm vào tổng các số hạng trong dãy số: 2, 4, 6, 8, ..., 246 ít nhất bao nhiêu đơn vị để được số chia hết cho 100 ?

Giải:

Đây là dãy số chẵn liên tiếp hay dãy số cách đều 2 đơn vị.

Dãy số có số số hạng là: $(246 - 2) : 2 + 1 = 123$ số hạng.

Tổng của dãy số là: $(246 + 2) \times 123 : 2 = 12252$

Vì $100 - 52 = 48$ nên phải thêm vào tổng của dãy số ít nhất 48 đơn vị.

* Bài tập tự luyện:

Bài 1: Tính tổng:

a) Của tất cả các số lẻ bé hơn 100

b) $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 169$

Bài 2:

a) Tính nhanh tổng của tất cả các số có 3 chữ số.

b) 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384.

Dãy số trên có mười số hạng

Tổng bao nhiêu, mời bạn tính nhanh

Đố em, đố chị, đố anh

Tìm ra phương pháp tính nhanh mới tài.

Bài 3: Hãy tính tổng của các dãy số sau:

a) 1, 5, 9, 13, 17, ...Biết dãy số có 80 số hạng.

b) ..., 17, 27, 44, 71, 115. Biết dãy số có 8 số hạng.

Bài 4: Tính nhanh:

a) $1,27 + 2,77 + 4,27 + 5,77 + 7,27 + \dots + 13,27 + 14,77$

b) $0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 + \dots + 0,9 + 0,10 + 0,11 + 0,12 + \dots + 0,19$.

Dạng 10: Dãy chữ

Khác với các dạng toán khác, toán về dạng dãy chữ không đòi hỏi học sinh phải tính toán phức tạp. Ngược lại để giải những bài toán dạng này, đòi hỏi học sinh phải biết vận dụng sáng tạo những kiến thức toán học đơn giản, những hiểu biết về xã hội, từ đó mà vận dụng dạng toán này vào trong đời sống hàng ngày và các môn học khác.

Các ví dụ:

Bài toán 1: Người ta viết liên tiếp nhóm chữ: HOCSINHGIOITINH thành một dãy chữ liên tiếp: HOCSINHGIOITINHHOCSINHGIOI..... hỏi chữ cái thứ 2009 của dãy là chữ cái nào?

Giải:

Ta thấy mỗi nhóm chữ: HOCSINHGIOITINH gồm 15 chữ cái. Giả sử dãy chữ có 2009 chữ cái thì có:

$2009 : 15 = 133$ (nhóm) và còn dư 14 chữ cái.

Vậy chữ cái thứ 2009 của dãy chữ HOCSINHGIOITINH là chữ N của tiếng TINH đứng ở vị trí thứ 14 của nhóm chữ thứ 134.

Bài toán 2: Một người viết liên tiếp nhóm chữ THIXAHAIDUỜNG thành dãy THIXAHAIDUỜNGTHIXAHAIDUỜNG Hỏi:

a. Chữ cái thứ 2002 trong dãy này là chữ gì?

b. Nếu người ta đếm được trong dãy số có 50 chữ H thì dãy đó có bao nhiêu chữ A? Bao nhiêu chữ N?

c. Bạn Hải đếm được trong dãy có 2001 chữ A. Hỏi bạn ấy đếm đúng hay đếm sai?

Giải thích tại sao?

d. Người ta tô màu các chữ cái trong dãy theo thứ tự: XANH, ĐỎ, TÍM, VÀNG, XANH, ĐỎ, TÍM,... hỏi chữ cái thứ 2001 trong dãy được tô màu gì?

Giải:

a. Nhóm chữ THIXAHAIDUỜNG có 13 chữ cái:

$2002 : 13 = 154$ (nhóm)

Như vậy, kể từ chữ cái đầu tiên đến chữ cái thứ 2002 trong dãy, người ta đã viết 154 lần nhóm THIXAHAIDUỜNG, vậy chữ cái thứ 2002 trong dãy là chữ G của tiếng DUỜNG.

b. Mỗi nhóm chữ THIXA HAIDUỜNG có 2 chữ H và cũng có 2 chữ A và 1 chữ N. Vì vậy, nếu người ta đếm được trong dãy có 50 chữ H thì tức là người đó đã viết 25 lần nhóm đó nên dãy đó phải có 50 chữ A và 25 chữ N.

c. Bạn đó đếm sai, vì số chữ A trong dãy phải là số chẵn.

d. Ta nhận xét:

+ 2001 chia cho 4 thì dư 1.

+ Những chữ cái trong dãy có số thứ tự là chia cho 4 thì dư 1 thì được tô màu XANH.

Vậy chữ cái thứ 2001 trong dãy được tô màu XANH.

Bài toán 3: Bạn Hải cho các viên bi vào hộp lần lượt theo thứ tự là: bi xanh, bi đỏ, bi vàng rồi lại đến bi xanh, bi đỏ, bi vàng ... cứ như vậy. Hỏi:

a) Viên bi thứ 100 có màu gì?

b) Muốn có 10 viên bi đỏ thì phải bỏ vào hộp ít nhất bao nhiêu viên bi?

Giải:

a) Ta thấy, cứ 3 viên bi thì lập thành 1 nhóm màu: xanh, đỏ, vàng. 100 viên bi thì có số nhóm là: $100 : 3 = 33$ nhóm (dư 1 viên bi)

Như vậy, bạn Hải đã cho vào hộp được 33 nhóm, còn dư 1 viên của nhóm thứ 34 và là viên bi đầu tiên của nhóm này. Vậy viên bi thứ 100 có màu xanh.

b) Một nhóm thì có 3 viên bi, muốn có 10 viên bi đỏ thì cần bỏ vào hộp:

$3 \times 10 = 30$ viên bi. Nhưng viên bi màu đỏ là viên bi thứ 2 của nhóm. Vậy cần bỏ vào hộp ít nhất số viên bi là: $30 - 1 = 29$ viên.

* Bài tập tự luyện:

Bài 1: Một người viết liên tiếp nhóm chữ: TOANNAM thành dãy:

TOANNAMTOANNAMTOAN..... Hỏi:

a. Chữ cái thứ 2010 trong dãy là chữ gì?

b. Nếu người ta đếm được trong dãy có 50 chữ N thì dãy đó có bao nhiêu chữ A? Bao nhiêu chữ O?

c. Một người đếm được trong dãy có 2009 chữ A, hỏi người đó đếm đúng hay sai? Giải thích tại sao?

d. Người ta tô màu các chữ cái trong dãy theo thứ tự XANH, ĐỎ, TÍM, VÀNG, XANH, ĐỎ, TÍM..... hỏi chữ cái thứ 2009 trong dãy được tô màu gì?

Bài 2: Người ta viết các chữ cái D, A, Y, T, O, T, H, O, C, T, O, T,..... thành dãy:

DAYTOTHOCTOTDAYTOT... bằng 3 màu xanh, đỏ, tím, mỗi tiếng một màu.

Hỏi chữ cái thứ 2010 là chữ cái gì? Màu gì?

Bài 3: Bạn Dương viết liên tiếp các nhóm chữ DIENBIENPHU thành dãy:

DIENBIENPHUDIENBIENPHU ... Hỏi:

a) Chữ cái thứ 1954 là chữ gì?

b) Nếu trong dãy đã viết có 2010 chữ E thì có bao nhiêu chữ H?

Bài 4: Một người viết liên tiếp nhóm chữ TOQUOCVIETNAM thành dãy

TOQUOCVIETNAM TOQUOCVIETNAM ... Hỏi:

a) Chữ cái thứ 1975 trong dãy là chữ gì?

b) Người ta đếm được trong dãy đó có 50 chữ T thì dãy đó có bao nhiêu chữ O? Bao nhiêu chữ I?

c) Bạn An đếm được trong dãy có 1945 chữ O. Hỏi bạn ấy đếm đúng hay sai? Vì sao?

d) Người ta tô màu vào các chữ cái trong dãy trên theo thứ tự: xanh, đỏ, tím, vàng, xanh, đỏ, tím, vàng, ... Hỏi chữ cái thứ 2010 được tô màu gì?

4- Một số lưu ý khi giải toán về “dãy số”

Trong bài toán về dãy số thường người ta không cho biết cả dãy số (vì dãy số có nhiều số không thể viết ra hết được) vì vậy, phải tìm ra được quy luật của dãy (mà có rất nhiều quy luật khác nhau) mới tìm được các số mà dãy số không cho biết. Đó là những quy luật của dãy số cách đều, dãy số không cách đều hoặc dựa vào dấu hiệu chia hết để tìm ra quy luật.

Ở dạng 2: Muốn kiểm tra số A có thoả mãn quy luật của dãy đã cho hay không? Ta cần xem dãy số cho trước và số cần xác định có cùng tính chất hay không? (Có cùng chia hết cho một số nào đó hoặc có cùng số dư) thì số đó thuộc dãy đã cho.

Ở dạng 3 và 4: Học sinh phải được tự tìm ra công thức tổng quát, vận dụng một cách thành thạo và biết biến đổi công thức để làm các bài toán khác.

Ở dạng 9: Có các yêu cầu:

+ Tìm tổng các số hạng của dãy.

+ Tính nhanh tổng.

Khi giải: Sau khi tìm ra quy luật của dãy, ta sắp xếp các số theo từng cặp sao cho có tổng đều bằng nhau, sau đó tìm số cặp rồi tìm tổng các số hạng của dãy. Chú ý: Khi tìm số cặp số mà còn dư một số hạng thì khi tìm tổng ta phải cộng số dư đó vào.

Nếu tính nhanh tổng của các phân số phải dựa vào tính chất của phân số.

Ở dạng 10: Đó là dãy chữ khi giải phải dựa vào quy luật của dãy, sau đó có thể xem mỗi nhóm chữ có tất cả bao nhiêu chữ rồi đi tìm có tất cả bao nhiêu nhóm và đó chính là phần trả lời của bài toán.