

CHUYÊN ĐỀ CÁC DẠNG TOÁN VỀ DÃY SỐ VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Các kiến thức cần nhớ:

Trong dãy số tự nhiên liên tiếp cứ một số chẵn lại đến một số lẻ rồi lại đến một số chẵn... Vì vậy, nếu:

- Dãy số bắt đầu từ số lẻ và kết thúc là số chẵn thì số lượng các số lẻ bằng số lượng các số chẵn.

- Dãy số bắt đầu từ số chẵn và kết thúc cũng là số lẻ thì số lượng các số chẵn bằng số lượng các số lẻ.

- Nếu dãy số bắt đầu từ số lẻ và kết thúc cũng là số lẻ thì số lượng các số lẻ nhiều hơn các số chẵn là 1 số.

- Nếu dãy số bắt đầu từ số chẵn và kết thúc cũng là số chẵn thì số lượng các số chẵn nhiều hơn các số lẻ là 1 số.

a. Trong dãy số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ số 1 thì số lượng các số trong dãy số chính bằng giá trị của số cuối cùng của số ấy.

b. Trong dãy số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ số khác số 1 thì số lượng các số trong dãy số bằng hiệu giữa số cuối cùng của dãy số với số liền trước số đầu tiên.

2. Các loại dãy số:

+ Dãy số cách đều:

- Dãy số tự nhiên.

- Dãy số chẵn, lẻ.

- Dãy số chia hết hoặc không chia hết cho một số tự nhiên nào đó.

+ Dãy số không cách đều.

- Dãy Fibonacci hay tribonacci.

- Dãy có tổng (hiệu) giữa hai số liên tiếp là một dãy số.

+ Dãy số thập phân, phân số:

3. Cách giải các dạng toán về dãy số:

Dạng 1: Điền thêm số hạng vào sau, giữa hoặc trước một dãy số

Trước hết ta cần xác định lại quy luật của dãy số:

+ Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 2) bằng số hạng đứng trước nó cộng (hoặc trừ) với một số tự nhiên a .

+ Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 2) bằng số hạng đứng trước nó nhân (hoặc chia) với một số tự nhiên q khác 0.

+ Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 3) bằng tổng 2 số hạng đứng liền trước nó.

+ Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 4) bằng tổng của số hạng đứng trước nó cộng với số tự nhiên d rồi cộng với số thứ tự của số hạng ấy.

+ Số hạng đứng sau bằng số hạng đứng trước nhân với số thứ tự của nó.

+ Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 2) trở đi đều bằng a lần số liền trước nó.

+ Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 2) trở đi, mỗi số liền sau bằng a lần số liền trước

nó cộng (trừ) n (n khác 0).

.....
Các ví dụ:

Bài 1: Điền thêm 3 số hạng vào dãy số sau:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,.....

Muốn giải được bài toán trên trước hết phải xác định quy luật của dãy số như sau:

Ta thấy: $1 + 2 = 3$ $3 + 5 = 8$

$2 + 3 = 5$ $5 + 8 = 13$

Dãy số trên được lập theo quy luật sau: Kể từ số hạng thứ 3 trở đi mỗi số hạng bằng tổng của hai số hạng đứng liền trước nó.

Ba số hạng tiếp theo là: $21 + 34 = 55$; $34 + 55 = 89$; $55 + 89 = 144$

Vậy dãy số được viết đầy đủ là: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 34, 55, 89, 144

Bài 2: Viết tiếp 3 số hạng vào dãy số sau: 1, 3, 4, 8, 15, 27

Ta nhận thấy: $8 = 1 + 3 + 4$ $27 = 4 + 8 + 15$

$15 = 3 + 4 + 8$

Từ đó ta rút ra được quy luật của dãy số là: Mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ 4) bằng tổng của ba số hạng đứng liền trước nó.

Viết tiếp ba số hạng, ta được dãy số sau: 1, 3, 4, 8, 15, 27, 50, 92, 169.

Bài 3: Tìm số hạng đầu tiên của các dãy số sau biết rằng mỗi dãy số có 10 số hạng.

a)...., ..., 32, 64, 128, 256, 512, 1024

b)...., ..., 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110

Giải:

a). Ta nhận xét :

Số hạng thứ 10 là : $1024 = 512 \times 2$

Số hạng thứ 9 là : $512 = 256 \times 2$

Số hạng thứ 8 là : $256 = 128 \times 2$

Số hạng thứ 7 là : $128 = 64 \times 2$

.....
Từ đó ta suy luận ra quy luật của dãy số này là: mỗi số hạng của dãy số gấp đôi số hạng đứng liền trước đó.

Vậy số hạng đầu tiên của dãy là: $1 \times 2 = 2$.

b). Ta nhận xét :

Số hạng thứ 10 là : $110 = 11 \times 10$

Số hạng thứ 9 là : $99 = 11 \times 9$

Số hạng thứ 8 là : $88 = 11 \times 8$

Số hạng thứ 7 là : $77 = 11 \times 7$

.....
Từ đó ta suy luận ra quy luật của dãy số là: Mỗi số hạng bằng số thứ tự của số hạng ấy nhân với 11.

Vậy số hạng đầu tiên của dãy là : $1 \times 11 = 11$.

Bài 4: Tìm các số còn thiếu trong dãy số sau :

a. 3, 9, 27, ..., ..., 729.

b. 3, 8, 23, ..., ..., 608.

Giải :

Muốn tìm được các số còn thiếu trong mỗi dãy số, cần tìm được quy luật của mỗi dãy số đó.

a. Ta nhận xét : $3 \times 3 = 9$

$9 \times 3 = 27$

Quy luật của dãy số là: Kể từ số hạng thứ 2 trở đi, mỗi số hạng gấp 3 lần số liền trước nó.

Vậy các số còn thiếu của dãy số đó là:

$27 \times 3 = 81$; $81 \times 3 = 243$; $243 \times 3 = 729$ (đúng).

Vậy dãy số còn thiếu hai số là : 81 và 243.

b. Ta nhận xét: $3 \times 3 - 1 = 8$; $8 \times 3 - 1 = 23$.

.....
Quy luật của dãy số là: Kể từ số hạng thứ 2 trở đi, mỗi số hạng bằng 3 lần số liền trước nó trừ đi 1. Vì vậy, các số còn thiếu ở dãy số là:

$23 \times 3 - 1 = 68$; $68 \times 3 - 1 = 203$; $203 \times 3 - 1 = 608$ (đúng).

Dãy số còn thiếu hai số là: 68 và 203.

Bài 5: Lúc 7h sáng, một người đi từ A đến B và một người đi từ B đến A ; cả hai cùng đi đến đích của mình lúc 2h chiều. Vì đường đi khó dần từ A đến B ; nên người đi từ A, giờ đầu đi được 15km, cứ mỗi giờ sau đó lại giảm đi 1km. Người đi từ B giờ cuối cùng đi được 15km, cứ mỗi giờ trước đó lại giảm 1km. Tính quãng đường AB.

Giải:

2 giờ chiều là 14h trong ngày.

2 người đi đến đích của mình trong số giờ là:

$14 - 7 = 7$ giờ.

Vận tốc của người đi từ A đến B lập thành dãy số:

15, 14, 13, 12, 11, 10, 9.

Vận tốc của người đi từ B đến A lập thành dãy số:

9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Nhìn vào 2 dãy số ta nhận thấy đều có các số hạng giống nhau vậy quãng đường AB là: $9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 84$

Đáp số: 84km.

Bài 6: Điền các số thích hợp vào ô trống sao cho tổng số 3 ô liên tiếp đều bằng 2010

783 998

Giải:

Ta đánh số thứ tự các ô như sau:

783 998

Ô1 Ô2 Ô3 Ô4 Ô5 Ô6 Ô7 Ô8 Ô9 Ô10

Theo điều kiện của đề bài ta có:

$$783 + \text{Ô7} + \text{Ô8} = 2010.$$

$$\text{Ô7} + \text{Ô8} + \text{Ô9} = 2010.$$

Vậy $\text{Ô9} = 783$; từ đó ta tính được:

$$\text{Ô8} = \text{Ô5} = \text{Ô2} = 2010 - (783 + 998) = 229$$

$$\text{Ô7} = \text{Ô4} = \text{Ô1} = 998$$

$$\text{Ô3} = \text{Ô6} = 783.$$

Điền các số vào ta được dãy số:

998 229 783 998 229 783 998 229 783 998

Một số lưu ý khi giảng dạy Toán dạng này là: Trước hết phải xác định được quy luật của dãy là dãy tiến, dãy lùi hay dãy số theo chu kỳ. Từ đó mà học sinh có thể điền được các số vào dãy đã cho.

* Bài tập tự luyện:

Bài 1: 13, 19, 25, 31,.....,

Dãy số vừa được viết ra

Ba số viết tiếp là ba số nào?

Số nào suy nghĩ thấp cao?

Đố em, đố bạn làm sao kể liền?

Bài 2: Tìm và viết ra các số hạng còn thiếu trong dãy số sau:

a. 7, 10, 13,.....,, 22, 25.

b. 103, 95, 87,.....,,, 55, 47.

Bài 3: Điền số thích hợp vào ô trống, sao cho tổng các số ở 3 ô liền nhau bằng:

a. $n = 14,5$

2,7 8,5

b. $n = 23,4$

8,7 7,6

Bài 4: Viết tiếp ba số hạng vào dãy số sau :

a) 1; 3; 4; 7; 11; 18;...

b) 0; 2; 4; 6; 12; 22;...

c) 0 ; 3; 7; 12;...

d) 1; 2; 6; 24;...

Dạng 2: Xác định số A có thuộc dãy đã cho hay không?

Cách giải của dạng toán này:

- Xác định quy luật của dãy;

- Kiểm tra số A có thoả mãn quy luật đó hay không?

Các ví dụ:

Bài 1: Cho dãy số: 2, 4, 6, 8,.....

a. Dãy số được viết theo quy luật nào?

b. Số 2009 có phải là số hạng của dãy không? Vì sao?

Giải:

a. Ta nhận thấy: Số hạng thứ 1: $2 = 2 \times 1$

Số hạng thứ 2: $4 = 2 \times 2$

Số hạng thứ 3: $6 = 2 \times 3$

.....

Số hạng thứ n: $? = 2 \times n$

Quy luật của dãy số là: Mỗi số hạng bằng 2 nhân với số thứ tự của số hạng ấy.

b. Ta nhận thấy các số hạng của dãy là số chẵn, mà số 2009 là số lẻ, nên số 2009 không phải là số hạng của dãy.

Bài 2: Cho dãy số: 2, 5, 8, 11, 14, 17,.....

- Viết tiếp 3 số hạng vào dãy số trên?

- Số 2009 có thuộc dãy số trên không? Tại sao?

Giải:

- Ta thấy: $8 - 5 = 3$; $11 - 8 = 3$;

Dãy số trên được viết theo quy luật sau: Kể từ số thứ 2 trở đi, mỗi số hạng bằng số hạng đứng liền trước nó cộng với 3.

Vậy 3 số hạng tiếp theo của dãy số là:

$17 + 3 = 20$; $20 + 3 = 23$; $23 + 3 = 26$

Dãy số được viết đầy đủ là: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26.

- Ta thấy: $2 : 3 = 0$ dư 2 ; $5 : 3 = 1$ dư 2 ; $8 : 3 = 2$ dư 2 ;

Vậy đây là dãy số mà mỗi số hạng khi chia cho 3 đều dư 2. Mà:

$2009 : 3 = 669$ dư 2. Vậy số 2009 có thuộc dãy số trên vì cũng chia cho 3 thì dư 2.

Bài 3: Em hãy cho biết:

a. Các số 60, 483 có thuộc dãy 80, 85, 90,..... hay không?

b. Số 2002 có thuộc dãy 2, 5, 8, 11,..... hay không?

c. Số nào trong các số 798, 1000, 9999 có thuộc dãy 3, 6, 12, 24,..... giải thích tại sao?

Giải:

a. Cả 2 số 60, 483 đều không thuộc dãy đã cho vì:

- Các số hạng của dãy đã cho đều lớn hơn 60.

- Các số hạng của dãy đã cho đều chia hết cho 5, mà 483 không chia hết cho 5.

b. Số 2002 không thuộc dãy đã cho vì mọi số hạng của dãy khi chia cho 3 đều dư 2, mà 2002 chia 3 thì dư 1.

c. Cả 3 số 798, 1000, 9999 đều không thuộc dãy 3, 6, 12, 24,... vì:

- Mỗi số hạng của dãy (kể từ số hạng thứ 2) đều gấp đôi số hạng liền trước nhận nó; cho nên các số hạng (kể từ số hạng thứ 3) có số hạng đứng liền trước là số chẵn, mà 798 chia cho $2 = 399$ là số lẻ.

- Các số hạng của dãy đều chia hết cho 3 , mà 1000 lại không chia hết cho 3 .

- Các số hạng của dãy (kể từ số hạng thứ 2) đều chẵn, mà 9999 là số lẻ.

Bài 4: Cho dãy số: $1; 2,2; 3,4; \dots; 13; 14,2$.

Nếu viết tiếp thì số $34,6$ có thuộc dãy số trên không?

Giải:

- Ta nhận xét: $2,2 - 1 = 1,2; 3,4 - 2,2 = 1,2; 14,2 - 13 = 1,2; \dots$

Quy luật của dãy số trên là: Từ số hạng thứ 2 trở đi, mỗi số hạng đều hơn số hạng liền trước nó là $1,2$ đơn vị:

- Mặt khác, các số hạng trong dãy số trừ đi 1 đều chia hết cho $1,2$.

Ví dụ: $(13 - 1)$ chia hết cho $1,2$

$(3,4 - 1)$ chia hết cho $1,2$

Mà: $(34,6 - 1) : 1,2 = 28$ dư 0 .

Vậy nếu viết tiếp thì số $34,6$ cũng thuộc dãy số trên.

Bài 5: Cho dãy số: $1996, 1993, 1990, 1987, \dots, 55, 52, 49$.

Các số sau đây có phải là số hạng của dãy không?

$100, 123, 456, 789, 1900, 1436, 2009$?

Giải:

Nhận xét: Đây là dãy số cách đều 3 đơn vị.

Trong dãy số này, số lớn nhất là 1996 và số bé nhất là 49 . Do đó, số 2009 không phải là số hạng của dãy số đã cho vì lớn hơn 1996 .

Các số hạng của dãy số đã cho là số khi chia cho 3 thì dư 1 . Do đó, số 100 và số 1900 là số hạng của dãy số đó.

Các số $123, 456, 789$ đều chia hết cho 3 nên các số đó không phải là số hạng của dãy số đã cho.

Số 1436 khi chia cho 3 thì dư 2 nên không phải là số hạng của dãy số đã cho.

* Bài tập luyện:

Bài 1: Cho dãy số: $1, 4, 7, 10, \dots$

a. Nêu quy luật của dãy.

b. Số 31 có phải là số hạng của dãy không?

c. Số 2009 có thuộc dãy này không? Vì sao?

Bài 2: Cho dãy số: $1004, 1010, 1016, \dots, 2012$.

Hỏi số 1004 và 1760 có thuộc dãy số trên hay không?

Bài 3: Cho dãy số: $1, 7, 13, 19, \dots$

a. Nêu quy luật của dãy số rồi viết tiếp 3 số hạng tiếp theo.

b. Trong 2 số 1999 và 2009 thì số nào thuộc dãy số? Vì sao?

Bài 4: Cho dãy số: $3, 8, 13, 18, \dots$

Có số tự nhiên nào có chữ số tận cùng là 6 mà thuộc dãy số trên không?

Bài 5: Cho dãy số: 1, 3, 6, 10, 15,....., 45, 55,.....

a. Số 1997 có phải là số hạng của dãy số này hay không?

b. Số 561 có phải là số hạng của dãy số này hay không?

Dạng 3: Tìm số số hạng của dãy

* Cách giải ở dạng này là:

Đối với dạng toán này, ta thường sử dụng phương pháp giải toán khoảng cách (toán trồng cây). Ta có công thức sau :

Số các số hạng của dãy = số khoảng cách + 1.

Đặc biệt, nếu quy luật của dãy là : Mỗi số hạng đứng sau bằng số hạng liền trước cộng với số không đổi d thì:

Số các số hạng của dãy = (Số hạng lớn nhất – Số hạng nhỏ nhất) : d + 1.

Các ví dụ:

Bài 1: Cho dãy số 11; 14; 17;.....;65; 68.

Hãy xác định dãy số trên có bao nhiêu số hạng?

Lời giải :

Ta có : $14 - 11 = 3$; $17 - 14 = 3$;....

Vậy quy luật của dãy số đó là mỗi số hạng đứng liền sau bằng số hạng đứng liền trước nó cộng với 3. Số các số hạng của dãy số đó là:

$(68 - 11) : 3 + 1 = 20$ (số hạng)

Bài 2: Cho dãy số: 2, 4, 6, 8, 10,....., 1992

Hãy xác định dãy số trên có bao nhiêu số hạng?

Giải:

Ta thấy: $4 - 2 = 2$; $8 - 6 = 2$

$6 - 4 = 2$;

Vậy, quy luật của dãy số là: Mỗi số hạng đứng sau bằng một số hạng đứng trước cộng với 2. Nói các khác: Đây là dãy số chẵn hoặc dãy số cách đều 2 đơn vị.

Dựa vào công thức trên:

(Số hạng cuối – số hạng đầu) : khoảng cách + 1

Ta có: Số các số hạng của dãy là:

$(1992 - 2) : 2 + 1 = 996$ (số hạng).

Bài 3: Cho 1, 3, 5, 7, là dãy số lẻ liên tiếp đầu tiên; hỏi 1981 là số hạng thứ bao nhiêu trong dãy số này? Giải thích cách tìm?

(Đề thi học sinh giỏi bậc tiểu học 1980 – 1981)

Giải:

Ta thấy:

Số hạng thứ nhất bằng: $1 = 1 + 2 \times 0$

Số hạng thứ hai bằng: $3 = 1 + 2 \times 1$