## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT VÀ ĐÁP SỐ

**Bài 1.** *(1,5 điểm)*

a) Trục căn thức ở mẫu thức của biểu thức A = $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$.

b) Cho $a \geq 0, a \neq 4$. Chứng minh $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{2(\sqrt{a}-2)}{a-4}=1$.

**Lời giải**

**a) Trục căn thức ở mẫu của biểu thức** $A=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$.

$$A=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=2+\sqrt{3}.$$

**b) Cho** $a \geq 0$, $a \neq 4$. **Chứng minh** $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{2\left(\sqrt{a}-2\right)}{a-4}=1$.

Với: $a \geq 0$, $a \neq 4$.

$$\text{VT}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}+\frac{2\left(\sqrt{a}-2\right)}{a-4}$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}+\frac{2\left(\sqrt{a}-2\right)}{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2}+\frac{2}{\sqrt{a}+2}$$

$=1=$ VP.

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

**Bài 2.** *(2,0 điểm)*

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y=14 \\ 2x+3y=24. \end{cases}$

b) Giải phương trình: $4x+\dfrac{3}{x-1}=11$.

**Lời giải**

**a) Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x+2y=14 \\ 2x+3y=24 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+2y=14 \\ 2x+3y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14-2y \\ 2x+3y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14-2y \\ 2\left(14-2y\right)+3y=24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=14-2y \\ 28-y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14-2y \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(6;4)$.

**b) Giải phương trình** $4x+\frac{3}{x-1}=11$ **(1)**

Điều kiện: $x\neq 1$.

$4x+\frac{3}{x-1}=11$

$\Leftrightarrow \frac{4x(x-1)}{x-1}+\frac{3}{x-1}=\frac{11(x-1)}{x-1}$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+3=11x-11$

$\Leftrightarrow 4x^2-15x+14=0 \qquad (2)$

Ta có: $\Delta=(-15)^2-4.4.14=1>0$.

Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt là: $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{15-1}{8}=\frac{7}{4}(tm) \\ x_2=\frac{15+1}{8}=2(tm) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S=\left\{2;\frac{7}{4}\right\}$.

**Bài 3.** *(1,5 điểm)* Vẽ đồ thị của các hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2$ và $y=x-4$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Gọi $A$ và $B$ là các giao điểm của đồ thị hai hàm số trên. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $OAB$, với $O$ là gốc tọa độ ( đơn vị đo trên các trục tọa độ là centimét).

**Lời giải**

**+) Vẽ đồ thị hàm số:** $y=-\frac{1}{2}x^2$.

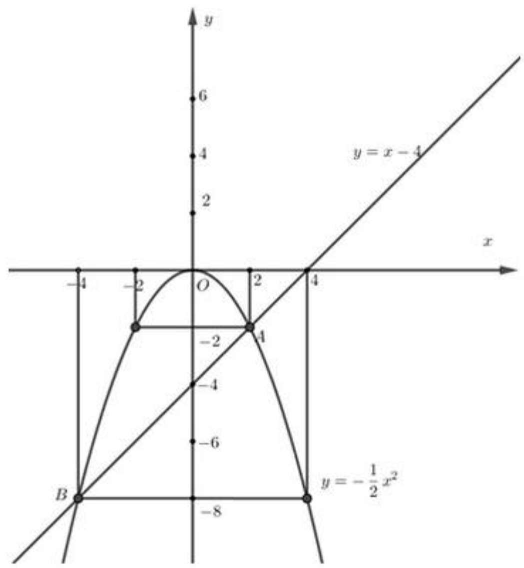
| $x$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-8$ | $-2$ | $0$ | $-2$ | $-8$ |

Khi đó đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2$ có hình dạng là 1 Parabol và đi qua các điểm $(-4;-8)$; $(-2;-2)$; $(0;0)$; $(2;-2)$; $(4;-8)$.

**+) Vẽ đồ thị hàm số:** $y=x-4$.

| $x$ | $0$ | $4$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-4$ | $0$ |

Khi đó đồ thị hàm số $y=x-4$ là một đường thẳng và đi qua các điểm $(0;-4)$; $(4;0)$.



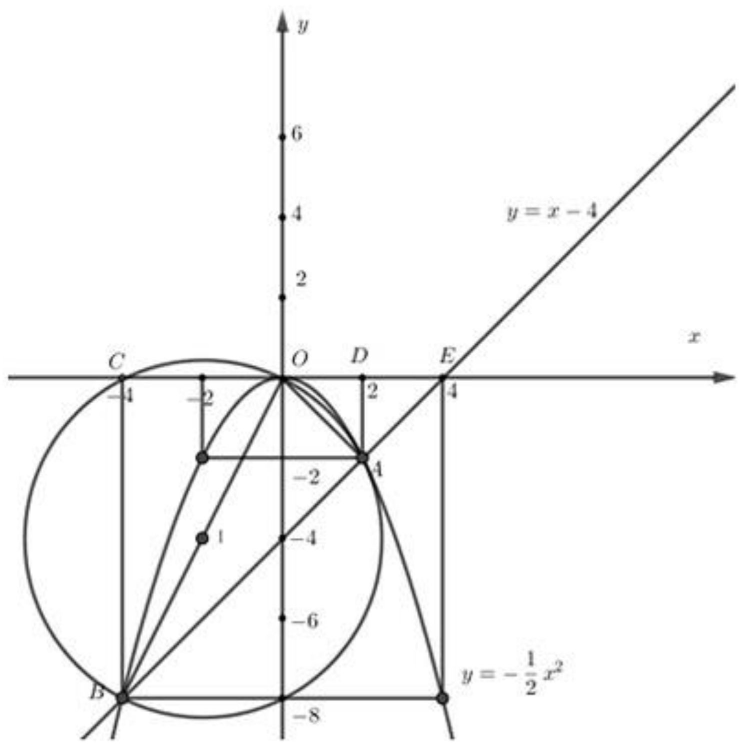

+) Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ và $y = x - 4$ là:

$-\frac{1}{2}x^2 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \end{array}\right..$$

$x = 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(2;-2)$.

$x = -4 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow B(-4;-8)$.



Xét tam giác $OAE$ ta có: $OD = DE = \frac{1}{2}OE = 2$ cm; $AD = 2$ cm nên tam giác $OAE$ vuông tại $A$.

Khi đó ta có: $OA \perp AB$ nên tam giác $OAB$ vuông tại $A$.

Ta có tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $OAB$ là trung điểm của cạnh huyền $OB$ và bán kính của đường tròn $= \frac{1}{2}OB$.

Ta có: Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông $OBC$ có:

$OB^2 = OC^2 + BC^2 = 4^2 + 8^2 = 80$

$\Rightarrow OB = 4\sqrt{5}$.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $OAB$ là $\frac{1}{2}OB = 2\sqrt{5}$.

**Bài 4.** *(1,0 điểm)* Cho phương trình $x^2 + 2(m-1)x + 4m - 11 = 0$, với $m$ là tham số. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,}x_2$ thỏa mãn hệ thức:

$$2(x_1-1)^2 + (6-x_2)(x_1x_2+11) = 72.$$

**Lời giải**

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ $\Leftrightarrow \Delta' > 0$.

$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4m + 11 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 - 4m + 11 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 12 > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 + 3 > 0$

$\Leftrightarrow (m-3)^2 + 3 > 0$.

Vì $(m-3)^2 \ge 0 \ \forall m \Rightarrow (m-3)^2 + 3 > 0 \ \forall m \Rightarrow \Delta' > 0 \ \forall m$.

Hay phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ với mọi $m$.

Áp dụng hệ thức Vi – ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m-1) \\ x_1x_2 = 4m - 11 \end{cases}$.

Vì $x_1$, $x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 + 2(m-1)x + 4m - 11 = 0$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2x_1^2 + 4(m-1)x_1 + 8m - 22 = 0 \\ x_2^2 + 2(m-1)x_2 + 4m - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1^2 = -4(m-1)x_1 - 8m + 22 \\ x_2^2 = -2(m-1)x_2 - 4m + 11 \end{cases}$$

$2(x_1-1)^2 + (6-x_2)(x_1x_2+11) = 72$

$\Leftrightarrow 2x_1^2 - 4x_1 + 2 + 6x_1x_2 + 66 - x_1x_2^2 - 11x_2 = 72$

$\Leftrightarrow -4(m-1)x_1 - 8m + 22 - 4x_1 + 6x_1x_2 - x_1(-2(m-1)x_2 - 4m + 11) - 11x_2 = 4$

$\Leftrightarrow -4mx_1 + 4x_1 - 8m + 22 - 4x_1 + 6x_1x_2 + 2(m-1)x_1x_2 + 4mx_1 - 11x_1 - 11x_2 = 4$

$\Leftrightarrow (2m+4)x_1x_2 - 11(x_1 + x_2) = 8m - 18$

$\Leftrightarrow (2m+4)(4m-11) + 22(m-1) = 8m - 18$

$\Leftrightarrow 8m^2 - 22m + 16m - 44 + 22m - 22 = 8m - 18$

$\Leftrightarrow 8m^2 + 8m - 48 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 3m - 6 = 0$

$\Leftrightarrow m(m-2) + 3(m-2) = 0$

$\Leftrightarrow (m+3)(m-2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Vậy $m = -3$ hoặc $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**<u>Bài 5.</u>** *(1,0 điểm)* Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 17cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 7cm. Tính diện tích của tam giác vuông đó.

**Lời giải**

Gọi độ dài một cạnh góc vuông lớn hơn của tam giác vuông là $x$ (cm), $(7 < x < 17)$.

Khi đó độ dài cạnh góc vuông còn lại của tam giác vuông đó là: $x - 7$ (cm).

Áp dụng định lí Pi – ta – go cho tam giác vuông này ta có phương trình:

$x^2 + (x-7)^2 = 17^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 49 = 289$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 14x - 240 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-15)(x+8) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 15 = 0 \\ x + 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 15 & (tm) \\ x = -8 & (ktm) \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ độ dài cạnh còn lại của tam giác vuông là: $15 - 7 = 8$ cm.

Vậy diện tích của tam giác vuông đó là: $S = \frac{1}{2}.8.15 = 60 \text{ cm}^2$.

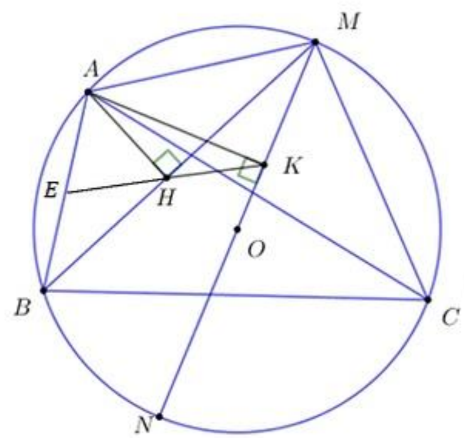
**Bài 6.** *(3,0 điểm)* Cho tam giác nhọn $ABC$ nội tiếp trong đường tròn tâm $O$ có $AB < AC$. Trên cung nhỏ $AC$ lấy điểm $M$ khác $A$ thỏa mãn $MA < MC$. Vẽ đường kính $MN$ của đường tròn $(O)$ và gọi $H, K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A$ trên $MB, MN$. Chứng minh rằng :

a) Bốn điểm $A, H, K, M$ cùng nằm trên một đường tròn.

b) $AH.AK = HB.MK$.

c) Khi điểm $M$ di động trên cung nhỏ $AC$ thì đường thẳng $HK$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Lời giải**




**a) Bốn điểm $A$, $H$, $K$, $M$ cùng nằm trên một đường tròn.**

Xét tứ giác $AHKM$ ta có: $AHM = AKM = 90°$ (gt).

Mà hai góc này là góc kề cạnh $HK$ và cùng nhìn đoạn $AM$.

$\Rightarrow AHKM$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

Hay bốn điểm $A$, $H$, $K$, $M$ cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).

**b)** $AH.AK = HB.MK$**.**

Ta có:

$$\begin{cases} AMK = \dfrac{1}{2} sd\, AN \\ ABH = \dfrac{1}{2} sd\, AM \end{cases} \Rightarrow AMK + ABH = \frac{1}{2}\left(sd\, AN + sd\, AM\right)$$

Mà $sd\, AN + sd\, AM = sd\, MAN = 180° \Rightarrow AMK + ABH = 90°$.

Mà $ABH + BAH = 90°$ (tam giác $ABH$ vuông tại $H$).

$\Rightarrow AMK = BAH$.

Xét tam giác $AMK$ và tam giác $BAH$ có:

$AKM = BHA = 90°$

$AMK = BAH$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AMK \backsim \Delta BAH$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{AK}{HB} = \dfrac{MK}{AH} \Rightarrow AH.AK = HB.MK$

**c) Khi điểm $M$ di động trên cung nhỏ $AC$ thì đường thẳng $HK$ luôn qua một điểm cố định.**

Kéo dài $HK$ cắt $AB$ tại $E$.

Ta có $MAK = MHK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $MK$).

Lại có $MHK = EHB$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow MAK = EHB$

Do $\Delta AMK \backsim \Delta BAH$ (cmt) $\Rightarrow MAK = ABH = EBH$

$\Rightarrow EHB = EBH$ $\Rightarrow \Delta EHB$ cân tại $E$.

$\Rightarrow EH = EB$ (1).

Ta có $EBH + EAH = 90^\circ$ (Tam giác $ABH$ vuông tại $H$).

$EHB + EHA = AHB = 90^\circ$

$\Rightarrow EAH = EHA$ $\Rightarrow \Delta EAH$ cân tại $E$

$\Rightarrow EA = EH$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EA = EB$ $\Rightarrow E$ là trung điểm của $AB$. Do $A$, $B$ cố định $\Rightarrow E$ cố định.

Vậy khi $M$ di chuyển trên cung nhỏ $AC$ thì $HK$ luôn đi qua trung điểm của $AB$ (đpcm).

**--------HẾT--------**