Tìm tham số để hàm số đơn điệu trên một miền

để phục vụ cho việc giải bài toán này chúng cần thêm kiến thức sau đây.
$I.\ f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$f(x) \geqslant 0 \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases}$

$f(x) \leqslant 0 \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases}$

<u>VD1:</u> Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 + (m^2-4)x + 9$ đồng biến trên R.

Giải

TXĐ: D = R

$f'(x) = 3x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 4$

f'(x) = 0 tối đa 2 nghiệm

Để hàm số đồng biến trên R thì $f(x) \geqslant 0\ \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3(m^2-4) \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 - 3m^2 + 12 \leq 0$

$\Leftrightarrow -2m^2 - 2m + 13 \leq 0$

$-2m^2 - 2m + 13 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 13 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \\ m = \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

KL: $\left[\begin{array}{l} m \leq \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \\ m \geq \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

<u>VD2:</u> Tìm m để hàm số $f(x) = [(m^2-2m)\frac{x^2}{3} + mx + 3]$ đồng biến trên R

Giải

TXĐ: D = R

$f'(x) = (m^2-2m)\frac{x^3}{3} + mx^2 + 3x$

$f'(x) = (m^2-2m)x^2 + 2mx + 3$

TH1: $m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$

$m = 0, f(x) = 3 > 0 \forall x \in R$ hàm số đồng biến trên R

$m = 2, f(x) = 4x + 3, f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{3}{4}$ m=2 (không thỏa mãn)

TH2: $m^2 - 2m \neq 0$

f'(x) là tam thức bậc hai có tối đa 2 nghiệm

Hàm số đồng biến trên R khi $f(x) \geq 0\ \forall x \in R$

$$\begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ \Delta' = m^2 - 3(m^2 - 2m) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ -2m^2 + 6m \leq 0 \end{cases}$$

<u>VD3:</u> Tìm m để hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Giải

TXĐ: D = R

$f'(x) = -3x^2 + 6x + 3m$

f(x) là tam thức b2, f(x) = 0 có tối đa 2 nghiệm

Để hàm số nghịch biến trên thì

$f'(x) \leq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 3m \leq 0\ \ \forall x \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x\ \ \forall x \in (0; +\infty)$

Xét $g(x) = x^2 - 2x$ trên $(0; +\infty)$

$g'(x) = 2x - 2,\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
g'(x)	||	—	0	+	
g'(x)	|| 0	↘	-1	↗	$+\infty$

KL: $m \leq -1$

<u>VD4:</u> Tìm m để hàm số $f(x) = \frac{3mx + 1}{x - 2}$

a) Nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2), (2; +\infty)$

b) Đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2), (2; +\infty)$

Giải

a) D=R \ {2}

$$f'(x) = \frac{3m(x-2) - (3mx+1)}{(x-2)^2}$$

$= \dfrac{-6m-1}{(x-2)^2}$

TH1: $-6m-1=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{6}$

Khi đó $f(x)=0\ \forall x\neq 2$

Hàm số $f(x)=-\dfrac{1}{2}\ \forall x\neq 2$

Hàm số không đồng biến, nghịch biến trên $(-\infty;2),(2;+\infty)$

TH2: $-6m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -\dfrac{1}{6}$

Hàm số nghịch biến $(-\infty;2),(2;+\infty)$ thì $f'(x)<0 \forall x\neq 2 \Leftrightarrow -6m-1<0$

$\Leftrightarrow -6m<1$

$\Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{6}$

KL: $m>-\dfrac{1}{6}$

b)

TH1: $-6m-1=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{6}$

(tương tự a) $m=-\dfrac{1}{6}$ (không thỏa mãn)

TH2: $-6m-1\neq 0 \Leftrightarrow m=\neq -\dfrac{1}{6}$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2),(2;+\infty)$

khi $f'(x)>0\ \forall x\neq 2 \Leftrightarrow -6m-1>0$

$\Leftrightarrow -6m>1$

$\Leftrightarrow m<-\dfrac{1}{6}$

KL: $m<-\dfrac{1}{6}$

Ví dụ 1. Tìm điều kiện của tham số mm để hàm số f(x)=2x3+3x2+6mx–1f(x)=2x3+3x2+6mx–1 nghịch biến trên (0;2)(0;2).

Giải

TXĐ: RR

Ta có f′(x)=6x2+6x+6m=6(x2+x+m).f′(x)=6x2+6x+6m=6(x2+x+m).

Δ=1–4mΔ=1–4m.

*) Với m≥14m≥14 ta có Δ≤0Δ≤0 nên f′(x)≥0,∀x∈Rf′(x)≥0,∀x∈R. Do đó hàm số luôn đồng biến. Yêu cầu của bài toán không được thỏa mãn.

*) Với m<14m<14 ta có Δ>0Δ>0 nên phương trình f′(x)=0f′(x)=0 có hai nghiệm x1,x2(x1<x2)x1,x2(x1<x2). Bảng biến thiên của hàm số f(x)f(x)

x	$-\infty$		x_1			x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$			$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, điều kiện cần và đủ để hàm số f(x)f(x) nghịch biến trên (0;2)(0;2) là:
x1≤0<2≤x2⇔{x1x2≤0(x1−2)(x2−2)≤0⇔{m≤0m≤−6⇔m≤−6x1≤0<2≤x2⇔{x1x2≤0(x1−2)(x2−2)≤0⇔{m≤0m≤−6⇔m≤−6

Kết luận: hàm số f(x)f(x) nghịch biến trên (0;2)(0;2) khi và chỉ khi m≤−6.m≤−6.

Từ ví dụ 1, ta có lưu ý: đối với dạng toán này, nếu dấu của đạo hàm phụ thuộc dấu một tam thức bậc 2, phải chia hai trường hợp.

*** TH1:** Δ≤0Δ≤0. **Hàm số đã cho hoặc luôn đồng biến, hoặc luôn nghịch biến.**

*** TH2:** Δ>0Δ>0. **Ta lập bảng biến thiên và sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai hoặc định lí Vi-et.**

Xin đưa thêm một số ví dụ:

Ví dụ 2. Tìm điều kiện của tham số mm để hàm số sau đồng biến trên khoảng (−∞;1)(−∞;1)

f(x)=x2+m(m2−1)x−m3−1x−1f(x)=x2+m(m2−1)x−m3−1x−1

Giải

TXĐ: : R∖{1}R∖{1}

Ta có: f′(x)=x2−2x+m+1(x−1)2,∀x≠1f′(x)=x2−2x+m+1(x−1)2,∀x≠1

dấu của f′(x)f′(x) phụ thuộc dấu của g(x)=x2–2x+m+1g(x)=x2–2x+m+1

Ta có: Δ′=−mΔ′=−m.

*

Nếu m≥0m≥0 thì Δ′≤0Δ′≤0 nên g(x)≥0,∀x⇒f′(x)≥0,∀x≠1.g(x)≥0,∀x⇒f′(x)≥0,∀x≠1. Khi đó hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định. Do đó cũng đồng biến trên (−∞;1)(−∞;1)

* Nếu m<0m<0 thì Δ′>0Δ′>0. Khi đó phương trình f′(x)=0f′(x)=0 có hai nghiệm phân biệt x1,x2(x1<1<x2)x1,x2(x1<1<x2).

Ta có bảng biến thiên của f(x)f(x)

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	- ||		-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$ ||		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy trong trường hợp này, không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Kết luận: Với m≥0m≥0 thì hàm số f(x)f(x) đồng biến trên (−∞;1)(−∞;1).

Ví dụ 3. Tìm điều kiện của tham số mm để hàm số f(x)=x3–3mx2+3(2m–1)xf(x)=x3–3mx2+3(2m–1)x đồng biến trên (2;3)(2;3).

Giải

TXĐ: RR
Ta có f′(x)=3x2–6mx+6m–3f′(x)=3x2–6mx+6m–3; f′(x)=0⇔[x=1x=2m−1f′(x)=0⇔[x=1x=2m−1

* Nếu m=1m=1 thì f′(x)≥0,∀x∈Rf′(x)≥0,∀x∈R. Vậy hàm số luôn đồng biến trên RR. Do đó hàm số cũng đồng biến trên (2;3)(2;3).

* Nếu m>1m>1 thì ta có bảng biến thiên của f(x)f(x)

x	$-\infty$		1		$2m-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy trong trường hợp này, điều kiện cần và đủ để hàm số đồng biến trên (2;3)(2;3) là:

1<2m–1≤2⇔1<m≤321<2m–1≤2⇔1<m≤32

* Nếu m<1m<1 thì ta có bảng biến thiên của f(x)f(x)

x	$-\infty$		$2m-1$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dễ thấy hàm số hiển nhiên đồng biến trên (2;3)(2;3)
Kết luận: Điều kiện cần và đủ để hàm số đã cho đồng biến trên (2;3)(2;3) là: m≤32
III – Bài tập:
Mời các bạn làm thêm một số bài tập:
1) Bài tập 5 tr.8 (SGK GT 12NC), bài tập 8 tr. 44 (SGK GT 12CB), bài 1.81 tr.27 (SBT GT 12NC)
2) Tìm mm để hàm số y=x3+(m–1)x2–(2m2+3m+2)xy=x3+(m–1)x2–(2m2+3m+2)x đồng biến trên (2;+∞)(2;+∞).

3) Tìm mm để hàm số y=(m+1)x3+mx2–xy=(m+1)x3+mx2–x đồng biến trên (−∞;−1)(−∞;−1).
4) Tìm mm để hàm số y=x2+x+1x−my=x2+x+1x−m đồng biến trên (2;+∞)(2;+∞).
5) (**ĐH Hàng Hải 2000-2001**) Tìm mm để hàm số y=−13x3+(m–1)x2–(m–3)x–4y=−13x3+(m–1)x2–(m–3)x–4 đồng biến trên (0;3).