

MỘT SỐ BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

Tiêu Phước Thừa

Một trong những bài toán liên quan đến khảo sát hàm số thường gặp trong đề thi tốt nghiệp THPT là bài toán tiếp tuyến, trong bài viết này tôi xin trình bày một số phương pháp viết phương trình tiếp tuyến

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

a. Cho hai điểm $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$ đường thẳng AB không vuông góc với trục Ox thì có hệ

$$\text{số góc } k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

b. Hệ số góc tiếp tuyến của đường cong (C) : $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ bằng $f'(x_0)$

c. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ thuộc (C) có dạng

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

d. Điều kiện để đường thẳng (d): $y = kx + b$ tiếp xúc với (C): $y = f(x)$ là hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases}$$

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

Bài toán 1 : Lập phương trình tiếp tuyến của (C): $y = f(x)$ tại M

+Tìm $x_0 = x_M, y_0 = y_M$

+Tìm $y' \Rightarrow y'(x_0)$

+Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) viết phương trình tiếp tuyến (C) tại điểm có hoành độ $x=-1$ (TNTHPT 2010 hệ GDTX)

Giải

Gọi M là tiếp điểm suy ra $M(-1;2)$

$$\text{Ta có } y' = \frac{5}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(-1)=5$$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là $y-2=5(x+1)$ hay $y=5x+7$

Bài Toán 2 : Lập phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc k

Cách 1 : +Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm ta có $f'(x_0) = k$ (*)

+Giải (*) ta được x_0 , thay vào y được y_0

Khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng : $y - y_0 = k(x - x_0)$

Cách 2 : +Vì tiếp tuyến có hệ số góc bằng k nên có dạng (d): $y=kx+b$

+d là tiếp tuyến của (C) nên (d) và (C) tiếp xúc nhau

+Để (d) tiếp xúc (C) thì hệ $\begin{cases} f(x) = kx + b \\ k = f'(x) \end{cases}$ có nghiệm ta giải ra tìm b

+Từ đó có phương trình tiếp tuyến $y=kx+b$

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ có đồ thị (C) viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc bằng 9 (TN THPT 2013)

Giải

Cách 1 :

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm theo đề bài suy ra $f'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{cases}$

Ta được hai tiếp điểm $M_1(2; 1); M_2(-2; -3)$

Phương trình tiếp tuyến tại $M_1: y - 1 = 9(x - 2)$

Phương trình tiếp tuyến tại $M_2: y + 3 = 9(x + 2)$

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\begin{cases} y - 1 = 9(x - 2) \\ y + 3 = 9(x + 2) \end{cases}$ hay $\begin{cases} y = 9x - 17 \\ y = 9x + 15 \end{cases}$

Cách 2 :Gọi (d) đường thẳng có hệ số góc bằng 9 suy ra (d) : $y = 9x + b$

Để (d) là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} x^3 - 3x - 1 = 9x + b \\ f'(x) = 9 \end{cases}$ (1) có nghiệm

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x - 1 = 9x + b \\ 3x^2 - 3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = x^3 - 12x - 1 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ b = -17 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ b = 15 \end{cases} \end{cases}$$

Ta được hai tiếp tuyến $\begin{cases} y = 9x - 17 \\ y = 9x + 15 \end{cases}$

Có thể xác định hệ số góc tiếp tuyến dựa vào một số nhận xét sau đây

- +Hai đường thẳng song song thì có cùng hệ số góc
- +Hai đường thẳng vuông góc thì tích hệ số góc của chúng bằng -1
- +Đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$ thì hệ số góc $k = a$
- + $k_d = \tan(\text{Ox}, (d))$

Bài Toán 3 :Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm N cho trước

Trước hết ta kiểm tra xem N có thuộc đồ thị hàm số (C) hay không ?

1.Trường hợp $N \in (C)$

Ta giải giống như cách làm đã nêu ra ở Bài Toán 1

2.Trường hợp $N \notin (C)$

Ta sẽ thực hiện tìm phương trình tiếp tuyến như sau

a.Cách 1 :

+Gọi (d) là đường thẳng qua $N(x_N; y_N)$ có hệ số góc k(k ta chưa biết)

Suy ra (d): $y = k(x - x_N) + y_N$

+Vì (d) là tiếp tuyến nên hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = k(x - x_N) + y_N \\ k = f'(x) \end{cases}$ có nghiệm

+Giải hệ tìm k ta suy ra được tiếp tuyến cần tìm

b.Cách 2 :

Gọi (d) là tiếp tuyến

Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm của (d) và (C) suy ra (d): $y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$ (*)

Vì (d) qua N nên $y_N - y_o = f'(x_o)(x_N - x_o)$ (**)

Giải (**) ta được x_o, y_o thay vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm

Ví dụ 3 :Cho hàm số $y = \frac{2}{x}$ có đồ thị (C) viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(-4 ;0)

Giải

Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến (d) qua A suy ra (d): $y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$

$$\Rightarrow \Rightarrow (d): y = -\frac{2}{x^2}(x - x_o) + y_o \quad \text{vì A thuộc (d) nên } 0 = -\frac{2}{x_o^2}(4 - x_o) + \frac{2}{x_o} \Leftrightarrow x_o = 2; y_o = 1$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm $y = -\frac{1}{2}(x - 2) + 1 = -\frac{1}{2}x + 2$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

- 1) Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (1) có đồ thị là (C) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm P(3;1).
- 2)) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$ có đồ thị (C) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm cực tiểu của (C).
- 3) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.
- 4) Cho hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$.
- 5) Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có đồ thị (C) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tọa độ $(-1; -2)$.

CHÚC CÁC EM 12A5 HỌC TẬP TỐT VÀ ĐỖ ĐẠI HỌC 100%