1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

I. Kiến thức cơ bản

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số y = f(x) xác định trên K:

+ Hàm số y = f(x) được gọi đồng biến trên khoảng K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

+ Hàm số y = f(x) được gọi là nghịch biến trên khoảng K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

2. Qui tắc xét tính đơn điệu

a. Định lí

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm trên K:

+ Nếu f'(x) > 0 với mọi x thuộc K thì hàm số đồng biến

+ Nếu f'(x) < 0 với mọi x thuộc K thì hàm số nghịch biến

b. Qui tắc

B1: Tìm tập xác định của hàm số

B2: Tính đạo hàm của hàm số. Tìm các điểm x_i (i = 1, 2,…,n) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

B3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

B4: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến.

II. Các dạng bài tập

Dạng 1: Xét sự biến thiên của hàm số

Ví dụ 1. Xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số:

a. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ b. $y = -x^2 + 3x + 4$ e. $y = \sqrt{x}(x-3),\ (x > 0)$

c. $y = x^4 - 2x^2 + 3$ d. $y = \frac{x - 1}{x + 1}$

Ví dụ 2. Xét sự biến thiên của các hàm số sau:

a. $y = 3x^2 - 8x^3$ b. $y = x^4 + 8x^2 + 5$ c. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

d. $y = \frac{3 - 2x}{x + 7}$

Dạng 2: Chứng minh hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng xác định.

Phương pháp

+ Dựa vào định lí.

Ví dụ 1.

Chứng minh hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên đoạn [1; 2]

Ví dụ 2

a. Chứng minh hàm số $y = \sqrt{x^2 - 9}$ đồng biến trên nửa khoảng $[3; +\infty)$.

b. Hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ nghịch biến trên mỗi nửa khoảng [-2; 0) và (0;2]

Ví dụ 3 Chứng minh rằng

a. Hàm số $y = \frac{3 - x}{2x + 1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b. Hàm số $y=\frac{2x^2+3x}{2x+1}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

c. Hàm số $y=-x+\sqrt{x^2+8}$ nghịch biến trên R.

Dạng 3. Tìm giá trị của tham số để một hàm số cho trước đồng biến, nghịch biến trên khoảng xác định cho trước

Phương pháp:

+ Sử dụng qui tắc xét tính đơn điêu của hàm số.

+ Sử dụng định lí dấu của tam thức bậc hai

Ví dụ:

Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\mathrm{a}x^2+4x+3$ đồng biến trên R.

Dạng 4. Sử dụng chiều biến thiên để chứng minh BĐT

Phương pháp

Sử dụng các kiến thức sau:

+ Dấu hiệu để hàm số đơn điệu trên một đoạn.

+ f (x) đồng biến trên [a; b] thì $f(a)\le f(x)\le f(b)$

+ f(x) nghịch biến trên [a; b] thì $f(a)\ge f(x)\ge f(b)$

Ví dụ 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. tanx > sinx, 0< x < $\frac{\pi}{2}$

b. 1 + $\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{1}{2}x,\ 0<x<+\infty$

c. cosx > 1 - $\frac{x^2}{2}, x\ne 0$

d. sinx > x - $\frac{x^3}{6}$, x > 0

Ví dụ 2.

Chohàm số f(x) = 2sinx + tanx – 3x

a. Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

b. Chứng minh rằng $2\sin x+\tan x>3x, \forall x\in(0;\frac{\pi}{2})$

Ví dụ 3

Cho hàm số $f(x)=\mathrm{tanx}$ - x

a.Chứng minh hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

b. Chứng minh $\tan x>x+\frac{x^3}{3}, \forall x\in(0;\frac{\pi}{2})$

2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

<u>I. Kiến thức cơ bản</u>

<u>Định nghĩa:</u> **Cực trị của hàm số:**

+ Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 nếu $y'(x_0)=0$.

+ Hàm số $y=f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 nếu đạo hàm y' đổi dấu từ + sang – khi đi qua x_0.

+ Hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 nếu đạo hàm y' đổi dấu từ – sang + khi đi qua x_0.

II. Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số

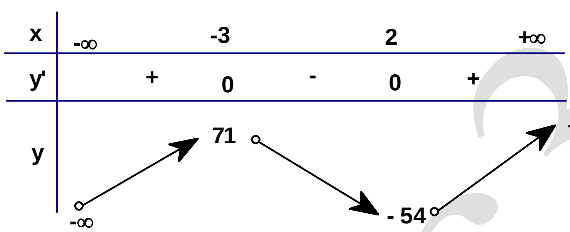
Phương pháp:

Dựa vào 2 qui tắc để tìm cực trị của hàm số y = f(x)

Qui tắc I. B1: Tìm tập xác định. B2: Tính f'(x). Tìm các điểm tại đó f'(x) = 0 hoặc f'(x) không xác định. B3. Lập bảng biến thiên. B4: Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị	Qui tắc II. B1: Tìm tập xác định. B2: Tính f'(x). Giải phương trình f'(x) = 0 và kí hiệu là x_i là các nghiệm của nó. B3: Tính f "(x_i) B4: Dựa vào dấu của f " (x_i) suy ra cực trị (f "(x_i) > 0 thì hàm số có cực tiểu tại x_i; (f "(x_i) < 0 thì hàm số có cực đại tại x_i)

* Chú ý: Qui tắc 2 thường dùng với hàm số lượng giác hoặc việc giải phương trình f'(x) = 0 phức tạp.

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$

Qui tắc I. TXĐ: R $y' = 6x^2 + 6x - 36$ $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$  Vậy x = -3 là điểm cực đại và $y_{cđ}$ =71 x= 2 là điểm cực tiểu và y_{ct} = - 54	Qui tắc II TXĐ: R $y' = 6x^2 + 6x - 36$ $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$ y"= 12x + 6 y''(2) = 30 > 0 nên hàm số đạt cực tiểu tại x = 2 và y_{ct} = - 54 y''(-3) = -30 < 0 nên hàm số đạt cực đại tại x = -3 và $y_{cđ}$ =71

Dạng 2. Xác lập hàm số khi biết cực trị

Để tìm điều kiện sao cho hàm số y = f(x) đạt cực trị tại x = a

B1: Tính y' = f'(x)

B2: Giải phương trình f'(a) = 0 tìm được m

B3: Thử lại giá trị a có thoả mãn điều kiện đã nêu không (vì hàm số đạt cực trị tại a thì f'(a) = 0 không kể CĐ hay CT)

Ví dụ 1. Tìm m để hàm số y = $x^3 - 3mx^2$ + (m - 1)x + 2 đạt cực tiểu tại x = 2

$y' = 3x^2 - 6mx + m - 1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 2 thì y'(2) = 0 $\Leftrightarrow 3.(2)^2 - 6m.2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Với m = 1 ta được hàm số: y = $x^3 - 3x^2 + 2$ có : $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ tại x = 2 hàm số đạt giá trị cực tiểu

Vậy m = 1 là giá trị cần tìm

Dạng 3. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị

Bài toán: 'Tìm m để hàm số có cực trị và cực trị thoả mãn một tính chất nào đó.'

Phương pháp

B1: Tìm m để hàm số có cực trị.

B2: Vận dụng các kiến thức khác Chú ý:

- Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ có cực trị khi và chỉ khi phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ . Xác định m để các hàm số sau có cực đại và cực tiểu

$a.\ y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x - 1$

Hướng dẫn.

a. TXĐ: R

$y' = x^2 + 2mx + m + 6$.

Để hàm số có cực trị thì phương trình: $x^2 + 2mx + m + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta' = m^2 - m - 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -2 \end{array}\right.$$

Dạng 4. Tìm tham số để các cực trị thoả mãn tính chất cho trước.

Phương pháp

+ Tìm điều kiện để hàm số có cực trị

+ Vận dụng các kiến thức về tam thức, hệ thức Viet để thoả mãn tính chất.

Bài tập

Bài 1. Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m - \frac{2}{3})x + 5$ đạt cực trị tại x = 1.

Bài 2. Xác định m để hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 2$ đạt cực đại tại x = 2.

Bài 3. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại x = 1.

Bài 4. Tìm các hệ số a, b, c sao cho hàm số: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm x = 1, f(1) = -3 và đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2

Bài 5. Cho hàm số $y = 2x^3 + ax^2 - 12x - 13$. Tìm a để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực tiểu của đồ thị cách đều trục tung.

Bài 6. Hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2(m+1)x^2 + 4mx - 1$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu.

Bài7. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a. $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$ b. $y = x^4 - 8x^3 + 432$

c. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$ d. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

e. $y = -5x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ f. $y = - x^3 - 5x$

3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I. Kiến thức cơ bản

Định nghĩa: cho hàm số y = f(x) xác định trên D.

a. Nếu $f(x) \le M, \forall x \in D$ và $f(x_0) = M, x_0 \in D$ thì M là GTLN của hàm số trên D

Kí hiệu $\underset{D}{\text{Max}}\ y = M$ tại $x = x_0$

b. Nếu $f(x) \ge M, \forall x \in D$ và $f(x_0) = M, x_0 \in D$ thì M là GTNN của hàm số trên D

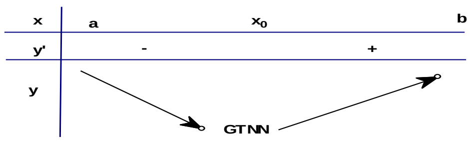
Kí hiệu $\underset{D}{\text{Min}}\, y = M$ tại $x = x_0$

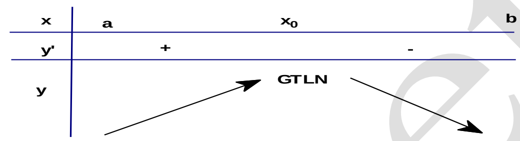
II. Các dạng bài tập

DẠNG 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(a;b)$:

B1: Tính đạo hàm của hàm số y’ = f’(x)

B2: Xét dấu đạo hàm f’(x), lập bảng biến thiên





Trong đó tại x_0 thì $f'(x_0)$ bằng 0 hoặc không xác định

DẠNG 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[a;b]$:

B1: Tìm đạo hàm.

B2: Tìm các giá trị $x_i \in [a;b]$ (i = 1, 2, ..., n) làm cho đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định .

B3: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$

B4: GTLN = max{ $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$ }

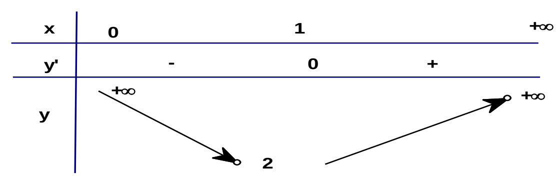
GTNN = Min{ $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$ }

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

<u>Hướng dẫn:</u>

Dễ thầy hàm số liên tục trên $(0;+\infty)$

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 .$$



Dễ thấy $x = -1 \notin (0;+\infty)$

Vậy Minf(x) = 2 khi x = 1 và hàm số không có giá trị lớn nhất.

Ví dụ 2.

Tính GTLN, GTNN của hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn [-4; 0]

<u>Hướng dẫn</u>

Hàm số liên tục trên [-4; 0],

$$f'(x) = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

$$f(-4) = \frac{-16}{3},\ f(-3) = -4,\ f(-1) = \frac{-16}{3},\ f(0) = -4$$

$$\underset{x \in [-4;0]}{\text{Max}}\, y = -4 \ khi\ x = -3\ ,\ x = 0$$

$$\underset{x \in [-4;0]}{\text{Min}}\, y = \frac{-16}{3} \ \text{khi}\ x = -4\ ,\ x = -1$$

<u>BÀI TẬP</u>

Bài 1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số (nếu có):

a. f(x) = $x^3 + 3x^2 - 9x + 1, \forall x \in$ [-4; 4]

b. f(x) = $x^3 + 5x - 4, \forall x \in$ [-3; 1]

c. f(x) = $x^4 - 8x^2 + 16, \forall x \in$ [-1; 3]

d. f(x) = $x + \dfrac{4}{x-2}, \forall x \in$ [-4; 1]

e. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ trên đoạn $[0;3]$

f) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ trên $[0;3]$

g) $f(x) = \dfrac{2x+3}{-x+1}$ trên $[-3;0]$

h) **y =** $\sqrt{3-x}$ trên $[-1;2]$

i) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ trên [2;5]

j) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên [-4;4]

k) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$

l) $y = x + \sqrt{2 - x^2}$

Bài 2. Tìm GTLN, GTNN của hàm số (nếu có):

a. f(x) = $\dfrac{x}{x+2}$, $\forall x \in$ (-2; 4]

b. f(x) = x +2 + $\dfrac{1}{x-1}$, $\forall x \in (1; +\infty)$

c. f(x) = $x\sqrt{1 - x^2}$

d. f(x) = $\dfrac{1}{\cos x}$, $\forall x \in (\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2})$

---

4. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. Kiến thức cơ bản

Cho hàm số y = f(x) có đồ thị là (C)

- $y = y_0$ là tiệm cận ngang của (C) nếu một trong hai điệu kiên sau được thoả mãn:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$$
- $x = x_0$ là tiệm cận đứng của (C) nếu một trong các điều kiện sau được thoả mãn:
$$\lim_{x\to x_0^+} = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} = +\infty, \lim_{x\to x_0^+} = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} = -\infty$$

II. Các dạng bài tập

Dạng 1: Tiệm cận hàm số hữu tỉ $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Phương pháp

- Tiệm cận đứng: Nghiệm của mẫu không phải là nghiệm của tử cho phép xác định tiệm cận đứng.
- Tiệm cận ngang:
  + Det(P(x)) = Det(Q(x)): Tiệm cận ngang là tỉ số hai hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu.

Ví dụ 1. Tìm các tiệm cận của các hàm số:

a. y = $\dfrac{2x-1}{x+2}$

<u>Hướng dẫn</u>

a. Ta thấy $\lim_{x\to-2^-} \dfrac{2x-1}{x+2} = -\infty; \quad \lim_{x\to-2^+} \dfrac{2x-1}{x+2} = +\infty$ nên đường thẳng x= 2 là tiệm cận đứng.

Vì $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2$ nên y = 2 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

<u>BÀI TẬP</u>

Bài 1: Tìm các tiệm cận của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$ b. $y = \dfrac{3 - 2x}{3x + 1}$ c. $y = \dfrac{5}{2 - 3x}$ d. $y = \dfrac{-4}{x + 1}$

e. $y = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$ f. $y = 4 + \dfrac{1}{x - 2}$ g. $y = \dfrac{-x + 3}{x}$ h. $y = \dfrac{4 - x}{3x + 1}$

---

5. KHẢO SÁT VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A. Hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

Phương pháp:

1. Tìm TXĐ.
2. Xét đơn điệu của hàm số:
3. Tìm giới hạn:
4. Vẽ đồ thị

Bài tập

Khảo sát các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x - 2$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

d) $y = x^3 - 3x + 2$

e) $y = \dfrac{2}{3}x^3 - x^2 + \dfrac{1}{3}$

f) $y = -x^3 + 6x + 3$

g) $y = -x^3 + 3x^2$

B.Hàm trùng phương : $y = ax^4 + bx^2 + c$.

Phương pháp: Tương tự hàm bậc ba

Bài tập

Khảo sát các hàm số sau:

a. $y = -x^4 + 2x^2$ b. $y = x^4 + x^2 - 2$ c. $y = x^4 - 6x^2 + 1$

d. $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2$ e. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ f. $y = x^4 + 2x^2 + 1$

C. Hàm phân thức hữu tỉ : $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

Các bước khảo sát hàm số phân thức:

1. Tìm TXĐ.
2. Tìm đạo hàm, xét dấu đạo hàm.
3. Tìm giới hạn suy ra các đường tiệm cận.
4. Lập bảng biến thiên.
5. Vẽ đồ thị.

Bài tập

Khảo sát các hàm số sau:

a) $y=\frac{2x+3}{x-1}$ c) $y=\frac{3x-2}{x-1}$ e) $y=1-\frac{x+2}{2x+1}$

b) $y=\frac{x-3}{x+1}$ d) $y=\frac{-x+2}{2x-1}$ f) $y=1-\frac{2}{x+1}$

Các bài toán liên quan đến khảo sát

Dạng 1: Phương trình tiếp tuyến của đường cong.

A. Tiếp tuyến **tại** $M(x_o;y_o)\in(C)$

Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y-y_o=f'(x_o).(x-x_o)$

Bài tập

Bài 1 : Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ (C),viết pttt tại $M_o\in(C)$ có hoành độ $x_o=-2$

Bài 2 : cho (C) : $y=x^3-3x^2+2$. Lập pttt của (C) tại điểm có hoành độ $x_o=-3$

Bài 3 : (C) : $y=\frac{x-3}{x+1}$. Viết pttt của (C) biết :

a. Tại M là giao điểm của (C) với trục Oy
b. Tại N có hoành độ bằng -2

B. Tiếp tuyến có hệ số góc **k** cho trước.

+ Gọi $M(x_o;y_o)\in(C)$

+ Giải pt : $f'(x_o)=k\Rightarrow x_o\Rightarrow y_o$

Bài tập

Bài 1 : (C) : $y=\frac{2x+3}{x+1}$. Viết pttt với (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1

Bài 2 : cho (C) $y=-x^3+3x^2-5x+2$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng -2.

C. Tiếp tuyến **song song** với đường thẳng (d) cho trước : $y=k_dx+b$

+ Gọi $M(x_o;y_o)\in(C)$

+ Giải pt : $f'(x_o)=k_d\Rightarrow x_o\Rightarrow y_o$

Bài tập

Bài 1 : (C) : $y=\frac{x-3}{x+1}$. Viết pttt với (C) biết :

Tiếp tuyến song song với đt $y=4x+2$

Bài 2 : cho (C) $y=-x^3+3x^2-5x+2$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đó :

Song song với đt : $2x+y-3=0$

Bài 3 : $(C_m): y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+\frac{1}{3}$.Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1 .Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tai điểm M song song với đt $5x-y=0$

D. Tiếp tuyến **vuông góc** với đường thẳng (d) trước : $y=k_d x+b$

+ Gọi $M(x_o;y_o)\in(C)$

+ Giải pt : $f'(x_o)=-\frac{1}{k_d}\Rightarrow x_o\Rightarrow y_o$

Bài tập

Bài 1 : cho (C) : $y=x^3-3x^2+2$

Lập pttt với (C) biết tt vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{9}x+19$

Bài 2 : cho (C) : $y=x^3-3x^2+2$

a. Lập pttt với (C) biết tt vuông góc với đt : $x-29y+2=0$

b. Tìm trên đt $y=2$ các điểm mà từ đó vẽ được 2 tiếp tuyến vuông góc nhau

Bài 3 : Viết pttt của (C) $y=x^3-3x^2$, biết tiếp tuyến đó vuông góc với đt $y=\frac{1}{3}x$

Dạng 2: Sự tương giao giữa hai đường cong

Cho hai đường cong (C): $y=f(x)$ và (C') : $y=g(x)$. Khi đó tọa độ giao điểm giữa hai đường cong chính là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=g(x)$.

Chú ý: (C): $y=f(x)$ và (C') : $y=g(x)$. tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\ f'(x)=g'(x)\end{cases}$

Bài tập

Định tham số m để đồ thị

a. $y=x^2+3x+3$ và $y=x+2m-1$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt

b. $y=-x^3+3x^2-2x$ và $y=mx$ tiếp xúc

c. $y=x^3-(2m+3)x^2+(m+2)x+m$ tiếp xúc với trục hoành (Ox)

d. $y=\frac{x+2}{x-1}$ và $y=-3x+m$ tiếp xúc

Dạng 3: Xét bài toán sau đây : vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ sau đó ***biện luận*** theo tham số m số nghiệm của phương trình :

$$\boxed{h(x;m)=0}\ (*)$$

Ta đưa (*) về dạng $f(x)=\varphi(m)$ trong đó $\varphi(m)$ là biểu thức theo m, không chứa x

Số nghiệm của (*) chính là *số giao điểm* của (C) và đường thẳng $y = \varphi(m)$ mà ta nhìn thấy qua đồ thị

Chú ý **:** Do m là tham số tùy ý nên ta không nên lầm tưởng $y = \varphi(m)$ là 1 hàm số , đường cong….. mà nó ***mãi mãi chỉ là đường thẳng*** mà thôi.

Ví dụ như hình bên , ta thấy (*) có :

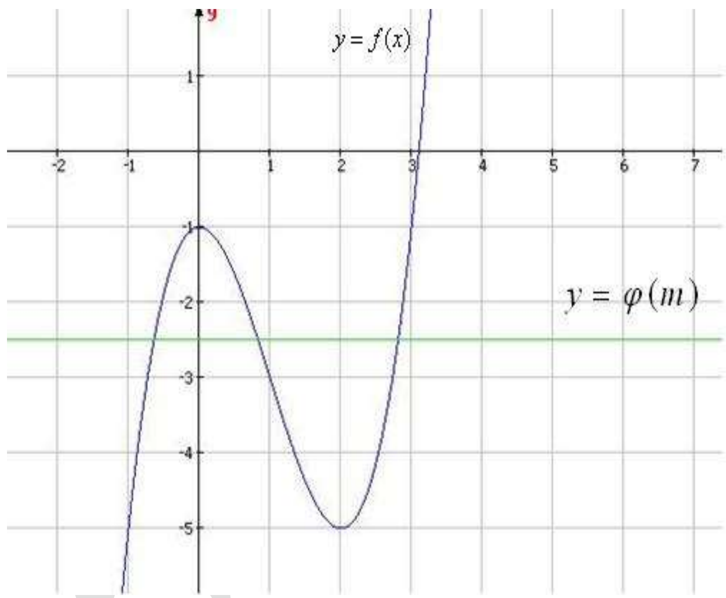
3 nghiệm khi $-5 < \varphi(m) < -1$

2 nghiệm khi

$\varphi(m) = -1 \vee \varphi(m) = -5$

1 nghiệm khi

$\begin{cases} \varphi(m) > -1 \\ \varphi(m) < -5 \end{cases}$



Bài tập

Biện luận theo m số nghiệm của các phương trình sau:

a) $x^3 - 3x^2 + m = 0$

b) $- x^4 + 2x^2 + m = 0$

c) $2x^3 - 6x - m + 1 = 0$

Bài tập chuyên đề khảo sát và các bài toán liên quan:

1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

a.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b.Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$.

2. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$. m là tham số

a. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu

b. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m = 3.

3. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C)

a.Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b.Dùng đồ thị (C) định k để phương trình sau có đúng 3 nghiệm phân biệt $x^3 - 3x^2 + k = 0$.

4. a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

b.Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị (C_m): $y = x^3 - 3x^2 - m$ cắt trục hoành Ox tại ba điểm phân biệt.

5 Cho hàm số y = $x^3 - 3x + 1$ (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại tâm đối xứng của đồ thị.

7: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$ (C) .

a.Khảo sát và vẽ đồ thị (C) hàm số.

b.Tìm phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M thuộc (C) và có hoành độ $x_o = 1$

8. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{-x+3}$ (C)

a.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b. Gọi A là giao điểm của đồ thị với trục tung. Tìm phương trình tiếp tuyến của (C) tại A.

9. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị là (C)

a. Khảo sát hàm số và vẽ (C)

b.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

10. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ (1) có đồ thị là (C.

a.Khảo sát hàm số (1)

b.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm P(3;1).

11. Cho hàm số $\mathrm{y} = \dfrac{2\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}-1}$ có đồ thị (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

b. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm M(2;5) .

12. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-3}$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

b Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao của (C) với trục Ox.

13. Cho hàm số y = $x^4 - 2x^2 + 3$, có đồ thị là (C).

a.Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao của (C) với trục Oy.

14. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

a.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số trên.

b.Từ (C), tìm m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

15. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$

a. khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$

b.Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm cực đại của (C).

16 Cho hàm số y = $-x^4 + 2x^2 + 3$ (C)

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C)

b. Tim m để Phương trình $x^4 - 2x^2 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

17. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C).

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Dùng đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của pt : $x^4 - 2x^2 + 1 - m = 0$.