Chuyên đề: CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

PHẦN 1: CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH.
2. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ.
3. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP VI PHÂN.
4. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN.
5. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH CHẤT LIÊN TỤC VÀ TÍNH CHẴN LẺ CỦA HÀM SỐ.

PHẦN 2: PHÂN LOẠI MỘT SỐ DẠNG TÍCH PHÂN

PHẦN 1: CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

I. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH:

A. Phương pháp:

Phương pháp phân tích là việc sử dụng các đồng nhất thức để biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân thành tổng các hạng tử mà nguyên hàm của mỗi hạng tử đó có thể nhận được từ bảng nguyên hàm hoặc chỉ bằng các phép biến đổi đơn giản đã biết, sau đó áp dụng định nghĩa.

B. Ví dụ:

VD1: Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}-e^x}$.

Giải :

Biến đổi I về dạng $I=\int_0^1 \frac{dx}{e^x(e^x+1)}=\int_0^1 \frac{[(e^x+1)-e^x]dx}{e^x(e^x+1)}$

$$=\int_0^1 \left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^x+1}\right)dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{1}{e^x}-\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$=\int_0^1 \left(e^{-x}-1+\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$=(-e^{-x}-x+\ln|e^x+1|)\Big|_0^1=$$

VD2: Tính các tích phân sau:

a/ $I=\int_1^2 \frac{x^2-2x}{x^3}dx$; b/ $J=\int_0^4 (3x-e^{\frac{x}{4}})dx$.

***Giải*:**

a/ Ta có: $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \left(\ln|x| + \frac{2}{x} \right)\Big|_1^2 = (\ln 2 + 1) - (\ln 1 + 2) = \ln 2 - 1.$

b/ Ta có: $J = \left(\frac{3}{2}x^2 - 4e^{\frac{x}{4}} \right)\Big|_0^4 = (24 - 4e) - (0 - 4) = 28 - 4e.$

VD3: Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1} dx.$

***Giải*:**

Từ $x^5 = x^3(x^2+1) - x(x^2+1) + x.$

Ta được: $I = \int_0^1 \left(x^3 - x + \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}.$

VD4: Tính $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx.$

***Giải*:**

Ta có: $\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = A + B\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right) = \frac{(A+B)\cos x + (A-B)\sin x}{\cos x + \sin x}$

Đồng nhất đẳng thức, ta được: $\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = -\frac{1}{2}.$

Vậy:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2} - \frac{\cos x - \sin x}{2(\cos x + \sin x)} \right] dx = \left[-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(\cos x + \sin x) \right]\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4}.$$

C.Bài tập:

Tính:

1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^2x - 2}{\sin^2 x} dx$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}$ (cosxcos3x + sin4xsin3x) dx

3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2x\,dx$ 4) $\int_0^4 |x-2|\,dx$

5) $\int_2^4 \sqrt{x^2-6x+9}\,dx$ 6) $\int_{-4}^{3} |x^2-4|\,dx$ 7) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\cos 2x+1}\,dx$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ :

1) DẠNG 1: Tính $I=\int_a^b f(x)dx$ với giả thiết hàm số f(x) liên tục trên [a;b]

A. Phương pháp:

+) Đặt $t=u(x)\Rightarrow dt=u'(x)dx$ (t=u(x) có đạo hàm liên tục, f(t) liên tục trên tập xđ của t)

+)Đổi cận : $\left|\begin{matrix}x=b\\x=a\end{matrix}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix}t=u(b)\\t=u(a)\end{matrix}\right.$

+) Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t ta được

$\boxed{I=\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt}$ (tiếp tục tính tích phân mới)

CHÚ Ý: +, Khi gặp dạng f(x) có chứa ($\frac{1}{x}$, ln x) thì đặt t = lnx.

+, Khi f(x) có chứa $\sqrt[n]{u(x)}$ thì thường đặt t = u(x).

+, Khi f(x) có mẫu số thì thường đặt t = mẫu.

Nhìn chung là ta phải nắm vững công thức và vận dụng hợp lý.

B. Ví dụ:

VD1 Tính tích phân $I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$.

Giải

Đặt $t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$

$x=e \Rightarrow t=1,\ x=e^2 \Rightarrow t=2$

$\Rightarrow I=\int_1^2\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_1^2=\ln 2$.

Vậy $I=\ln 2$.

VD2: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$.

Hướng dẫn:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^3}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\tan x + 1)^3}.\frac{dx}{\cos^2 x}.$$ Đặt $t = \tan x + 1$

ĐS: $I = \frac{3}{8}$.

VD3: Tính tích phân:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{2x+3}}.$$

Hướng dẫn:

Đặt $t = \sqrt{2x+3}$

ĐS: $I = \ln\frac{3}{2}$.

VD4. Tính tích phân $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{3-x}{1+x}}dx$.

Hướng dẫn:

Đặt $t = \sqrt{\frac{3-x}{1+x}} \Rightarrow I = 8\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}$; đặt $t = \tan u \ldots$

ĐS: $I = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 2$.

Chú ý:

Phân tích $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{1+x}}dx$, rồi đặt $t = \sqrt{1+x}$ sẽ tính nhanh hơn.

VD5:: Tính tích phân : $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

***Giải*:**

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow t^3 = x^2 + 1$, khi đó: $3t^2dt = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{3t^2dt}{2x}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \sqrt{7} \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

Ta có: $\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \frac{x^3.3t^2dt}{2xt} = 3t(t^3-1)dt = 3(t^4-t)dt$.

Khi đó: $I = 3\int_1^2 (t^4-t)dt = 3\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{141}{10}$.

C.Bài tập:

Tính các tích phân sau:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{1+\cos^2 x} dx$; 4) $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2} dx$.

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(1+\sin^2 x)^3 dx$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$; 7) $\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$; 8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$.

9) $\int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x} dx$; 10) $\int_0^1 x^5(1-x^3)^6 dx$; 11) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x} dx$;

12). $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{tg^4 x}{\cos 2x} dx$

13) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{3+\sin 2x}} dx$; 14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}} dx$; 15) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}$.

16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2} dx$; 17) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(tgx)}{\sin 2x} dx$; 18) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-tg^8 x)dx$;

19) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx$.

20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$; 21) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x} dx$; 22) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x}+\cos x)\cos x dx$;

23) $\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx$; 24) $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x} dx$; 25) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx$.

2) DẠNG 2:

A. Phương pháp: $I=\int_a^b f(x)dx$ với giả thiết hàm số f(x) liên tục trên [a;b]

Cách thực hiện:

+) Đặt $x=\varphi(t) \Rightarrow dx=\varphi'(t)dt$ (trong đó $\phi(t)$ là hàm số được lựa chọn thích hợp: ảnh của $\phi(t)$ nằm trong tập xác định của f và $\phi'(t)$ liên tục.)

+) Đổi cận : $\left| \begin{array}{l} x=b \\ x=a \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t=\beta \\ t=\alpha \end{array} \right.$

+) Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t ta được

$\boxed{I=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$ (tiếp tục tính tích phân mới)

Chú ý:

* Nếu f(x) có chứa:

+, $(a^2-x^2)^n$ thì đặt $x=|a|.\sin t$ với $t\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, hoặc $x=|a|.\cos t$ với $t\in[0;\pi]$.

+, $(a^2+x^2)^n$ thì đặt $x=|a|.\tan t$ với $t\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, hoặc $x=|a|.\cot t$ với $t\in(0;\pi)$.

+, $\left(x^2-a^2\right)^n$ thì đặt $x=\frac{|a|}{\sin t}$ hoặc $x=\frac{|a|}{\cos t}$.

+, $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}};\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ thì đặt $x=a\cos 2t$

+, $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ thì đặt x=a+(b-a)$\sin^2 t$

B. Ví dụ

VD1 :Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Giải

$$\text{Đặt } x=\sin t,\ t\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos t\,dt$$

$$x=0\Rightarrow t=0,\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{|\cos t|}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Vậy } I=\frac{\pi}{6}.$$

VD2: Tính tích phân $I=\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Hướng dẫn:

Đặt $x=2\sin t$

ĐS: $I=\pi$.

VD3:Tính tích phân $I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$.

Hướng dẫn:

Đặt $x=\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=(\tan^2 x+1)dt$

$$x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \; I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t + 1}{1 + \tan^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi}{4}.$$

VD4:Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

<u>Hướng dẫn:</u>

$$I = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{1 + (x+1)^2}.$$

Đặt $x + 1 = \tan t$

ĐS: $I = \frac{\pi}{12}$.

<u>VD5:</u> Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

***<u>Giải</u>*:**

Đặt x = sint, khi đó: dx = costdt .Đổi cận: với $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Lại có: $\frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin^2 t.\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{\sin^2 t.\cos t dt}{|\cos t|} = \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\cos t} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)dt.$

Khi đó: $I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$

<u>VD6:</u> Tính tích phân : $I = \int_2^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

***<u>Giải</u>*:**

Đặt $x = \frac{1}{\sin t}$, khi đó : $dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

Khi đó: $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{-\dfrac{1}{\sin^2 t}\cos tdt}{\dfrac{1}{\sin t\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t}-1}}} = \int_{\pi/3}^{\pi/2} dt = t\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{\pi}{6}$

<u>VD7:</u> Tính tích phân : $I = \displaystyle\int_a^0 \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx, \ (a>0)$

***<u>Giải</u>*:**

Đặt $x = a.\cos 2t$, khi đó: $dx = -2a.\sin 2tdt.$

Đổi cận: $\begin{cases} x=-a \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \\ x=0 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Lại có: $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}dx = \sqrt{\dfrac{a+a.\cos 2t}{a-a.\cos 2t}}(-2a.\sin 2tdt) = |\cot t|(-2a.\sin 2tdt)$

$= -4a.\cos^2 t.dt = -2a(1+\cos 2t)dt.$

Do đó: $I = -2a\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = -2a\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = a\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$

<u>VD8:</u> Tính tích phân : $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos dx}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}$

***<u>Giải</u>*:**

Đặt x = sint, khi đó: dt = cosxdx

Đổi cận: $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Ta có: $\dfrac{\cos dx}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} = \dfrac{dt}{t^2 - 5t + 6} = \dfrac{dt}{(t-2)(t-3)}$

$$= \left(\frac{A}{t-3} + \frac{B}{t-2}\right)dt = \frac{[(A+B)t - 2A - 3B]dt}{(t-2)(t-3)}$$

Từ đó: $\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - 3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$

Suy ra: $\dfrac{\cos xdx}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} = \left(\dfrac{1}{t-3} - \dfrac{1}{t-2}\right)dt.$

Khi đó: $I = \displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right)dt = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \ln\frac{3(6-\sqrt{3})}{5(4-\sqrt{3})}$

<u>C.Bài tập</u>:

Tính các tích phân sau:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4 + x^2 + 1}dx$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x + \sin x}dx$ 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 4) $\displaystyle\int_1^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$

5) $\displaystyle\int_2^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ 6) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{9+3x^2}}{x^2}dx$ 7)) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)^5}}dx$ 8) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{7 + \cos 2x}}dx$ 10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6}dx$ 11) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$ 12) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

13) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{1+3x}}$ 14) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\sqrt{x-1}}{x-5}dx$.

III. <u>TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP VI PHÂN</u>:

<u>A. Phương pháp:</u>

* **Kiến thức:**

Cho hàm số y = f(x) xác định trên tập D vi phân của hàm số ký hiệu:

dy = f '(x).dx hay d(f(x)) = f '(x).dx.

* ***Để tính được nhanh các em cần nhớ những công thức sau:***

+, $d(a.x + b) = a.dx \Leftrightarrow dx = \dfrac{d(a.x + b)}{a} (a \neq 0)$.

+, $d(ae^x + b) = ae^x.dx \Leftrightarrow dx = \dfrac{d(ae^x + b)}{a.e^x}$.

+, $d(\sin x) = \cos x.dx \Leftrightarrow dx = \dfrac{d(\sin x)}{\cos x}$; $d(\cos x) = -\sin x.dx \Leftrightarrow dx = \dfrac{d(\cos x)}{-\sin x}$.

+, $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$. $\dfrac{dx}{a.x + b} = \dfrac{1}{a}\dfrac{d(a.x + b)}{a.x + b} = \dfrac{1}{a}\ln(a.x + b)$.

+, $d(\sqrt{x^2 + a^2}) = \dfrac{x.dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

B.Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

1) $\int_0^1 \dfrac{dx}{2007.x + 2008}$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x.\cos x dx$; 3) $\int_1^e \dfrac{e^x.dx}{4 - 3e^{2x}}$; 4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x.dx$.

C. Bài tập Tính các tích phân sau:

1) $\int_0^1 \dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}$; 2) $\int_0^1 (\dfrac{x^2}{2-x^3})\ dx$; 3) $\int_0^1 \dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$; 4) $\int_0^1 xe^{x^2} dx$; 5) $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x^3}\ dx$.

6) $\int_1^e \dfrac{2+\ln x}{x} dx$; 7) $\int_e^{e^2} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 8) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} dx$; 9) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, e^{\cos x} dx$; 10) $\int_0^1 \dfrac{dx}{2e^x + 3}$.

IV. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN:

A. Phương pháp:

Công thức tích phân từng phần:

$$\boxed{\int_a^b u(x).v'(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b v(x).u'(x)dx}$$

Hay: $$\int_a^b udv = [u.v]_a^b - \int_a^b vdu$$

Cách thực hiện:

+) Đặt $\begin{vmatrix} u = u(x) \\ dv = v'(x)dx \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} du = u'(x)dx \\ v = v(x) \end{vmatrix}$

+) Thay vào công thức tích phân từng từng phần : $\int_a^b udv = [u.v]_a^b - \int_a^b vdu$

Chú ý:

+)Đặt $u = f(x)$, $dv = g(x)dx$ (hoặc ngược lại) sao cho dễ tìm nguyên hàm $v(x)$ và vi phân $du = u'(x)dx$ không quá phức tạp.

+)Hơn nữa, tích phân $\int_a^b vdu$ phải tính được.

+)**Đặc biệt:**

i/ Nếu gặp $\int_a^b P(x)\sin ax dx$, $\int_a^b P(x)\cos ax dx$, $\int_a^b e^{ax}.P(x)dx$ với $P(x)$ là đa thức thì đặt $u = P(x)$.

ii/ Nếu gặp $\int_a^b P(x)\ln x dx$ thì đặt $u = \ln x$.

iii/ Nếu gặp $\int_a^b e^{ax}.\sin ax dx$, $\int_a^b e^{ax}.\cos ax dx$ thì ta tính hai lần từng phần bằng cách đặt $u = e^{ax}$.

B. Ví dụ:

VD1:Tính tích phân $I = \int_0^1 xe^x dx$.

Giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$ (chọn $C = 0$)

$$\Rightarrow \int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (x-1)e^x\Big|_0^1 = 1.$$

VD2Tính tích phân $I = \int_1^e x\ln x dx$.

Giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_1^e x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2+1}{4}.$$

VD3Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$.

Giải

Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow\ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = -1 + I$$

$$\Rightarrow\ I = e^{\frac{\pi}{2}} - (-1 + I) \Rightarrow\ I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}.$$

VD4: Tính tích phân: $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx.$

***Giải*:**

Đặt: $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x} dx \\ v = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Khi đó: $I = -\frac{1}{x}\ln(x+1)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = -\frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2 + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$

$$= -\frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2 + (\ln|x| - \ln(x+1))\Big|_1^2 = -\frac{3}{2}\ln 3 + 3\ln 2.$$

VD5: Tính tích phân: $\int_0^1 (x^2 + x)e^{2x} dx$

***Giải*:**

$\int_0^1 (x^2 + x)e^{2x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x^2 + x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x+1)dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 + x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (2x+1)e^{2x} dx = e^2 - I_1$$

✱ $I_1 = \int_0^1 (2x+1)e^{2x} dx$, Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x + 1dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

◦ $\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}e^{2x}(2x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2}(3e^2 - 1) - \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1$

$= \frac{1}{2}\left(3e^2 - 1\right) - \frac{1}{2}(e^2 - 1) = e^2$. Vậy $I = e^2 - \frac{1}{2}e^2 = \frac{e^2}{2}$

VD6: Tính tích phân: $\int_{-1}^{0} x^5.e^{-x^3}dx$

***Giải*:**

$I = \int_{-1}^{0} x^5.e^{-x^3}dx$. Đặt $t = -x^3 \Rightarrow dt = -3x^2dx$,

∘ $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = -1 \Rightarrow t = 1$

$\Rightarrow I = \int_{1}^{0}(-t).e^t\left(-\frac{1}{3}\right)dt = -\frac{1}{3}\int_0^1 t.e^t dt = -\frac{1}{3}I_1$. Với $I_1 = \int_0^1 te^t dt$.

∘ Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = e^t.t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - e^t\Big|_0^1 = 1$. Vậy $I = -\frac{1}{3}I_1 = -\frac{1}{3}$

VD7: Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/2}(x^2+1)\sin x dx$.

***Giải*:**

Đặt: $\begin{cases} u = (x^2+1) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Khi đó: $I = -(x^2+1)\cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = 1 + 2\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ (1)

Xét tích phân $J = \int_0^{\pi/2} x\cos x dx$.

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

Khi đó: $J = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được: $I = 1 + 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 1$.

VD8: Tính tích phân: $\int_0^1 xe^{\sqrt{x}}dx$

Giải:

$\int_0^1 xe^{\sqrt{x}}dx$. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$

° $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$\Rightarrow I = \int_0^1 t^2e^t 2tdt = 2\int_0^1 t^3e^t dt = 2I_1$. Đặt $\begin{cases} u = t^3 \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3t^2dt \\ v = e^t \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = e^t.t^3\Big|_0^1 - 3\int_0^1 e^t.t^2dt = e - 3I_2$. Với $I_2 = \int_0^1 e^t.t^2dt$.

Đặt $\begin{cases} u = t^2 \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2tdt \\ v = e^t \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = e^t.t^2\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^t\,tdt = e - 2I_3$. với $I_3 = \int_0^1 e^t\,tdt$.

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}$

$\Rightarrow I_3 = e^t.t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - e^t\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1$

Vậy $I = 2I_1 = 2(e - 3I_2) = 2e - 6I_2 = 2e - 6(e - 2I_3) = 12I_3 - 4e = 12 - 4e$

VD 9: Tính tích phân: $I = \int\limits_0^{\pi} e^{2x}\sin^2 xdx$.

Giải:

Biến đổi I về dạng: $I = \int\limits_0^{\pi} e^{2x}\sin^2 xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} e^{2x}(1-\cos 2x)dx$ (1)

- Xét tích phân: $I_1 = \int\limits_0^{\pi} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^{\pi} = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2}$ (2)
- Xét tích phân: $I_2 = \int\limits_0^{\pi} e^{2x}\cos 2xdx$

Đặt: $\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin 2xdx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Khi đó: $I_2 = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{2x}\sin 2x dx = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} + \int_0^{\pi} e^{2x}\sin 2x dx$ (3)

- Xét tích phân: $I_{2,1} = \int_0^{\pi} e^{2x}\sin 2x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2x dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Khi đó: $I_{2,1} = \frac{1}{2}e^{2x}\sin\Big|_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 2x dx}_{I_2} = -I_2.$ (4)

Thay (4) vào (3), ta được: $I_2 = \frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} - I_2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^{2\pi}}{4} - \frac{1}{4}.$ (5)

Thay (2), (5) vào (1), ta được: $I = \frac{1}{2}[\frac{e^{2\pi}}{2} - \frac{1}{2} - (\frac{e^{2\pi}}{4} - \frac{1}{4})] = \frac{1}{8}(e^{2\pi} - 1).$

$\Rightarrow I_1 = e^t.t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - e^t\Big|_0^1 = 1.$ Vậy $I = 2$

C. Bài tập

Tính tích phân

1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x + \sin x}{\cos^2 x}dx$ 2) $\int_0^{\pi} x\sin x\cos^2 x dx$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(2\cos^2 x - 1)dx$ 4) $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$

5) $\int_0^1 (x+1)^2 e^{2x}dx$ 6) $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$ 7)) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\ln(1+\cos x)dx$ 8) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$

9)) $\int_0^1 xtg^2 x dx$ 10) $\int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$

IV PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH CHẤT LIÊN TỤC VÀ TÍNH CHẴN LẺ CỦA HÀM SỐ

A Phương pháp:

-Dạng 1:Nếu f(x) lẻ và liên tục trên [-a;a] (a>0) thì : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

- **Dạng 2**:Nếu f(x) chẵn và liên tục trên [-a;a] (a>0) thì : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

- **Dạng 3**:Nếu f(x) liên tục và chẵn trên R thì

$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x+1}dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$ với $\alpha \in R^+$ và $a > 0$

- **Dạng 4**: Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b] và thoả mãn f(x) = f(a +b - x) thì

$$\int_a^b x.f(x)dx = \frac{a+b}{2}.\int_a^b f(x).dx$$

B. Ví dụ

VD1: **Tính tích phân**

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$$

Giải: nhận xét hs $f(x) = \cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ thỏa:

* Liên tục trên [-1/2;1/2]
* f(x) +f(-x) =......= 0
Theo tc 1 ta được I=0

VD2 :Tính tích phân

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\ln(x + \sqrt{x^2+1})dx$$

VD3

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên R thoả mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2.\cos 2x}$.

Tính tích phân $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x).dx$

VD4:
Tính tích phân

a) $I = \int_0^{\pi} x.\sin x.\cos^2 x.dx$;   b) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2(\cos x)} - \tan^2(\sin x)\right).dx$.

VD5:
Tính các tích phân

a) $I = \int_0^{2\pi} \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})dx$;

b) $J = \int_0^{2008\pi} \sin^{2007} x.dx$.

VD6:
Tính các tích phân sau:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{2^x+1}dx$ b) $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2^x}dx$ c) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx$

PHẦN 2: PHÂN LOẠI MỘT SỐ DẠNG TÍCH PHÂN

I.TÍCH PHÂN LƯỢNG GIÁC

1. Dạng bậc lẻ với hàm sin.

Phương pháp chung: Đặt t = cosx khi đó dt = - sinx.dx, sau đó đưa tích phân ban đầu về tích phân theo biến t.

Chú ý: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2.$

$(\sin x)^{2n+1} = (\sin^2 x)^n.\sin x = (1 - t^2)^n.\sin x$

Ví dụ 1 (bậc sin lẻ). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^3 x dx$.

Giải

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$x = 0 \Rightarrow t = 1,\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x(1 - \cos^2 x)\sin x dx = -\int_1^0 t^2(1 - t^2)dt = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

Vậy $I = \frac{2}{15}$.

2. Dạng bậc lẻ với hàm cos.

Phương pháp chung: Đặt t = sinx khi đó dt = cosx.dx, sau đó đưa tích phân ban đầu về tích phân theo biến t.

Chú ý: $\cos^2 x = \sin^2 x = 1 - t^2.$

$(\cos x)^{2n+1} = (\cos^2 x)^n.\cos x = (1 - t^2)^n.\cos x$

Ví dụ 2 (bậc cosin lẻ). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$.

Giải

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

$x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = \left(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{15}.$$

Vậy $I = \frac{8}{15}$.

3. Dạng bậc chẵn với hàm sin và cos.

Phương pháp chung: Sử dụng công thức hạ bậc

Chú ý: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}; \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}; \sin x.\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

Ví dụ 3 (bậc sin và cosin chẵn). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^2 x dx$.

Giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^2 x dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 2x dx = \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \sin^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x d(\sin 2x) = \left(\frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{24}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{32}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi}{32}.$$

Nhận xét:

Ví dụ 4. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\cos x + \sin x + 1}$.

Giải

$$\text{Đặt } t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(tg^2\frac{x}{2} + 1\right)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{t^2+1}$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 1}.\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1|\Big|_0^1 = \ln 2.$$

$$\text{Vậy } I = \ln 2.$$

4. Dạng liên kết

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \dfrac{xdx}{\sin x + 1}$.

Giải

$$\text{Đặt } x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$$
$$x = 0 \Rightarrow t = \pi,\ x = \pi \Rightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow I = -\int_\pi^0 \frac{(\pi - t)dt}{\sin(\pi - t) + 1} = \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{\sin t + 1} - \frac{t}{\sin t + 1}\right)dt$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{dt}{\sin t + 1} - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{dt}{\sin t + 1}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{dt}{\left(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \frac{dt}{\cos^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{d\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{2} tg\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^\pi = \pi.$$

Vậy $I = \pi$.

Tổng quát:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2007} x}{\sin^{2007} x + \cos^{2007} x}dx$.

Giải

$$\text{Đặt } x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$$

$$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^{2007}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin^{2007}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos^{2007}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2007} t}{\sin^{2007} t + \cos^{2007} t}dx = J \ (1).$$

Mặt khác $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $I = \frac{\pi}{4}$.

Tổng quát:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = \frac{\pi}{4}, n \in \mathbf{Z}^+.$$

<u>Ví dụ 3.</u> Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}dx$ và $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}dx$.

Giải

+, $I - 3J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x - \sqrt{3}\cos x)dx$

$$= \left(-\cos x - \sqrt{3}\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 1 - \sqrt{3}\ (1).$$

+, $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow dt = dx$$

$$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I + J = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\,dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t - 1} = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos t - 1} - \frac{1}{\cos t + 1}\right)d(\cos t)$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\ln 3 \ (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} I - 3J = 1 - \sqrt{3} \\ I + J = \frac{1}{4}\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = \frac{3}{16}\ln 3 + \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \\ J = \frac{1}{16}\ln 3 - \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \end{cases}.$

Vậy $I = \frac{3}{16}\ln 3 + \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$, $J = \frac{1}{16}\ln 3 - \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 4. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2}dx$.

Giải

Đặt $x = \operatorname{tg} t \Rightarrow dx = (1 + \operatorname{tg}^2 t)dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0, \ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} t)}{1 + \operatorname{tg}^2 t}(1 + \operatorname{tg}^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} t)dt.$$

Đặt $t = \frac{\pi}{4} - u \Rightarrow dt = -du$

$t = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}, \ t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 0$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} t)dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left[1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right]du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg} u}\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \operatorname{tg} u}\right)du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} u)du = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I.$$

Vậy $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Ví dụ 5. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{2007^x + 1}dx$.

Giải

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

$x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}, \ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(-t)}{2007^{-t} + 1}dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2007^t \cos t}{1 + 2007^t}dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+2007^t)-1}{1+2007^t}\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{1}{2007^t+1}\right)\cos t\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt - I \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tổng quát:

Với $a > 0$, $\alpha > 0$, hàm số $f(x)$ chẵn và liên tục trên đoạn $[-\alpha;\ \alpha]$ thì

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{a^x+1}dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx.$$

Ví dụ 6. Cho hàm số f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(-x) + 2f(x) = \cos x$.

Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Giải

Đặt $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$, $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt = J \Rightarrow 3I = J + 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(-x)+2f(x)]dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = 2.$$

Vậy $I = \frac{2}{3}$.

Vậy $I = \frac{\pi}{2}$.

Chú ý:

Đôi khi ta phải đổi biến số trước khi lấy tích phân từng phần.

Ví dụ 7. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi^2}{4}}\cos\sqrt{x}\,dx$.

Giải

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt = 2(t\sin t + \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$

Vậy $I = \pi - 2$.

<u>Câu8:</u>: Tính tích phân : $I = \int_{-1}^{1} x^{2008}\sin x dx$

***<u>Giải</u>*:**

Viết lại I về dưới dạng: $I = \int_{-1}^{0} x^{2008}\sin x dx + \int_{0}^{1} x^{2008}\sin x dx.$ (1)

Xét tích phân $J = \int_{-1}^{0} x^{2008}\sin x dx.$

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$ khi đó: $3t^2dt = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{3t^2dt}{2x}.$

Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

Khi đó: $I = -\int_{1}^{0} (-t)^{2008}\sin(-t)dt = -\int_{0}^{1} x^{2008}\sin x dx.$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được $I = 0$.

<u>Câu9:</u>: Tính tích phân : $I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx.$

***<u>Giải</u>*:**

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

Khi đó: $I=\int_{\pi/2}^{0}\frac{\cos^4(\frac{\pi}{2}-t)(-dt)}{\cos^4(\frac{\pi}{2}-t)+\sin^4(\frac{\pi}{2}-t)}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4 tdt}{\cos^4 t+\sin^4 t}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx.$

Do đó: $2I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}.$

<u>Câu10:</u>: Tính tích phân: $I=\int_{-1/2}^{1/2}\cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx.$

***<u>Giải</u>*:**

$$I=\int_{-1/2}^{0}\cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx+\int_0^{1/2}\cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx. \qquad (1)$$

Xét tính chất $J=\int_{-1/2}^{0}\cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$

Đổi cận: $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{2}\\ x=0\Rightarrow t=0\end{cases}$

Khi đó:

$$I=-\int_{1/2}^{0}\cos(-t).\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)dt=-\int_0^{1/2}\cos t.\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)dt=-\int_0^{1/2}\cos x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được I = 0.

<u>Câu11:</u>: Tính tích phân: $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^4dx}{2^x+1}$

***<u>Giải</u>*:**

Biến đổi I về dạng: $I=\int_{-1}^{0}\frac{x^4dx}{2^x+1}+\int_0^1\frac{x^4dx}{2^x+1}$ (1)

Xét tích phân $J=\int_{-1}^{0}\frac{x^4dx}{2^x+1}$

Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$

Đổi cận: $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=1 \\ x=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$. Khi đó: $J=-\int_1^0 \frac{(-t)^4dt}{2^{-t}+1}=\int_0^1 \frac{t^4.2^t.dt}{2^t+1}=\int_0^1 \frac{x^4.2^x.dx}{2^x+1}$

(2)

Thay (2) vào (1) ta được: $I=\int_0^1 \frac{x^4.2^x.dx}{2^x+1}+\int_0^1 \frac{x^4dx}{2^x+1}=\int_0^1 \frac{x^4(2^x+1)dx}{2^x+1}=\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5}.$

<u>Câu12:</u> Tính tích phân: $I=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n xdx}{\cos^n x+\sin^n x}$

<u>Giải</u>:

Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow dx=-dt$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0 \end{cases}$

Khi đó: $I=\int_{\pi/2}^0 \frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)}{\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n tdt}{\cos^n t+\sin^n t}=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx.$

Do đó: $2I=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x+\sin^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx=\int_0^{\pi/2} dx=\frac{\pi}{2} \Rightarrow I=\frac{\pi}{4}.$

<u>Câu13:</u>: Tính tích phân: $I=\int_0^{\pi} \frac{x\sin xdx}{4-\cos^2 x}.$

<u>Giải</u>:

Biến đổi I về dạng: $I=\int_0^{\pi} \frac{x\sin xdx}{4-(1-\sin^2 x)}=\int_0^{\pi} \frac{x\sin xdx}{3+\sin^2 x}=\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx.$

Đặt $x=\pi-t \Rightarrow dx=-dt$

Đổi cận: $\begin{cases} x=\pi \Rightarrow t=0 \\ x=0 \Rightarrow t=\pi \end{cases}$

Khi đó: $I=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)dt}{4-\cos^2(\pi-t)}=\int_{0}^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin tdt}{4-\cos^2 t}=\int_{0}^{\pi}\frac{\pi\sin tdt}{4-\cos^2 t}-\int_{0}^{\pi}\frac{t\sin tdt}{4-\cos^2 t}$

$=-\pi\int_{0}^{\pi}\frac{d(\cos t)}{4-\cos^2 t}-I\Leftrightarrow 2I=-\pi\int_{0}^{\pi}\frac{d(\cos t)}{4-\cos^2 t}=\pi\int_{0}^{\pi}\frac{d(\cos t)}{\cos^2 t-4}$

$\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{d(\cos t)}{\cos^2 t-4}=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos t-2}{\cos t+2}\right|\Bigg|_{0}^{\pi}=\frac{\pi\ln 9}{8}.$

<u>Câu14:</u>: Tính tích phân: $I=\int_{0}^{2\pi}x.\cos^3 xdx$

***<u>Giải</u>*:**

Đặt $x=2\pi-t\Rightarrow dx=-dt$

Đổi cận: $\begin{cases}x=2\pi\Rightarrow t=0\\ x=0\Rightarrow t=2\pi\end{cases}$ Khi đó: $I=\int_{2\pi}^{0}(2\pi-t).\cos^3(2\pi-t)(-dt)=\int_{0}^{2\pi}(2\pi-t).\cos^3 tdt$

$=2\pi\int_{0}^{2\pi}\cos^3 tdt-\int_{0}^{2\pi}t\cos^3 tdt=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{2\pi}(\cos 3t+3\cos t)dt-I$

$\Leftrightarrow 2I=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3t+3\sin t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi}=0\Leftrightarrow I=0.$

<u>Câu15:</u> Tính tích phân: $I=\int_{0}^{\pi/2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx.$

***<u>Giải</u>*:**

Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow dx=-dt$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0\end{cases}$

Khi đó: $I=\int_{\pi/2}^{0}\ln\left(\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\right)(-dt)=\int_{0}^{\pi}\ln\left(\frac{1+\cos t}{1+\sin t}\right)dt=-\int_{0}^{\pi/2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1+\cos t}\right)dt$

$$= -\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0.$$

Câu16:: Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\mathrm{tg}x)dx.$

Giải:

Đặt $t = \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$ Khi đó:

$$I = -\int_{\pi/4}^{0} \ln[1+\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - t)dt = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\frac{1-\mathrm{tgt}}{1+\mathrm{tgt}})dt = \int_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1+\mathrm{tgt}}dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} [\ln 2 - \ln(1+\mathrm{tgt})]dt = \ln 2\int_0^{\pi/4} dt - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\mathrm{tgt})dt = \ln 2.t\Big|_0^{\pi/4} - I$$

$$\Leftrightarrow 2I = \frac{\pi\ln 2}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi\ln 2}{8}.$$

II. TÍCH PHÂN CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp giải toán

1. Dạng 1 tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)|dx$

+) lập bảng xét dấu f(x) : giả sử bxd f(x) là

x	a		x_1		x_2		b
f(x)		+	0	-	0	+	

+) Tính $I = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^{x_1} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{b} f(x)dx.$

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_{-3}^{2} |x^2 - 3x + 2|dx.$

Giải

Bảng xét dấu

x	-3		1		2
$x^2 - 3x + 2$		+	0	-	0

$$I = \int_{-3}^{1} (x^2 - 3x + 2)dx - \int_{1}^{2} (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{59}{2}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{59}{2}.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5 - 4\cos^2 x - 4\sin x}\,dx$.

Giải

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 x - 4\sin x + 1}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |2\sin x - 1|\,dx.$$

Bảng xét dấu

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$2\sin x - 1$		$-$	0	$+$	

$$I = -\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (2\sin x - 1)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - 1)dx = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Vậy } I = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}.$$

2. Dạng 2

Giả sử cần tính tích phân $I = \int_{a}^{b} [|f(x)| \pm |g(x)|]dx$, ta thực hiện

Cách 1.

Tách $I = \int_{a}^{b} [|f(x)| \pm |g(x)|]dx = \int_{a}^{b} |f(x)|dx \pm \int_{a}^{b} |g(x)|dx$ rồi sử dụng dạng 1 ở trên.

Cách 2.

Bước 1. Lập bảng xét dấu chung của hàm số f(x) và g(x) trên đoạn [a; b].

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu ta bỏ giá trị tuyệt đối của f(x) và g(x).

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{2} (|x| - |x - 1|)dx$.

Giải

Cách 1.

$$I = \int_{-1}^{2} (|x| - |x - 1|)dx = \int_{-1}^{2} |x|dx - \int_{-1}^{2} |x - 1|dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} xdx + \int_{0}^{2} xdx + \int_{-1}^{1} (x - 1)dx - \int_{1}^{2} (x - 1)dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{1}^{2} = 0.$$

Cách 2.
Bảng xét dấu

x	–1		0		1		2
x		–	0	+		+	
x – 1		–		–	0	+	

$$I = \int_{-1}^{0} (-x + x - 1)dx + \int_{0}^{1} (x + x - 1)dx + \int_{1}^{2} (x - x + 1)dx$$

$$= -x|_{-1}^{0} + (x^2 - x)|_{0}^{1} + x|_{1}^{2} = 0.$$

Vậy $I = 0$.

<u>3. Dạng 3</u>

Để tính các tích phân $I = \int_a^b \max\{f(x), g(x)\}dx$ và $J = \int_a^b \min\{f(x), g(x)\}dx$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng xét dấu hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn [a; b].

Bước 2.

+ Nếu $h(x) > 0$ thì $\max\{f(x), g(x)\} = f(x)$ và $\min\{f(x), g(x)\} = g(x)$.

+ Nếu $h(x) < 0$ thì $\max\{f(x), g(x)\} = g(x)$ và $\min\{f(x), g(x)\} = f(x)$.

<u>Ví dụ 1</u>. Tính tích phân $I = \int_0^4 \max\{x^2 + 1, 4x - 2\}dx$.

<u>Giải</u>

Đặt $h(x) = (x^2 + 1) - (4x - 2) = x^2 - 4x + 3$.

Bảng xét dấu

x	0		1		3		4
h(x)		+	0	–	0	+	

$$I = \int_0^1 (x^2 + 1)dx + \int_1^3 (4x - 2)dx + \int_3^4 (x^2 + 1)dx = \frac{80}{3}.$$

Vậy $I = \frac{80}{3}$.

<u>Ví dụ 2</u>. Tính tích phân $I = \int_0^2 \min\{3^x, 4 - x\}dx$.

<u>Giải</u>

Đặt $h(x) = 3^x - (4 - x) = 3^x + x - 4$.

Bảng xét dấu

x	0		1		2
h(x)		–	0	+	

$$I = \int_0^1 3^x dx + \int_1^2 (4 - x)dx = \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{\ln 3} + \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{2}{\ln 3} + \frac{5}{2}.$$

III. TÍCH PHÂN CỦA MỘT SỐ DẠNG HÀM VÔ TỈ.

1.Tích phân dạng: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (với $a \neq 0$)

Cách làm:

Biến đổi $\sqrt{ax^2+bx+c}$ về một trong các dạng ,sau đó thực hiện phép đổi biến tương ứng ta sẽ đưa về việc tính tích phân của hàm hữu tỉ.

a) $\sqrt{a^2+t^2}$ Đặt t = a.tgu (hoặc a.cotgu) với $u \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (hoặc $u \in (0;\pi)$).

b) $\sqrt{a^2-t^2}$ Đặt t = a.Sinu(hoặc a.Cosu) với $u \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (hoặc $u \in [0;\pi]$.

c) $\sqrt{t^2-a^2}$ Đặt $t = \frac{a}{Cosu}$ (hoặc $t = \frac{a}{Sinu}$) với $u \in [0;\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (hoặc $u \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$)

Chú ý công thức:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C \qquad \text{(C là hằng số tuỳ ý)}$$

Chứng minh:

Đặt $t = x + \sqrt{x^2+a} \Rightarrow dt = \left[1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right]dx = \frac{t.dx}{\sqrt{x^2+a}}$

Từ đó ta có : $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ Vậy : $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$ (ĐPCM)

Với hàm hợp: $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a}\right| + C$ (*)Trong đó u = u(x).

Ví dụ 1:Tính $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

Đặt x-1 = Sint . Khi x =1 $\Rightarrow$ t = 0

$x = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

và : $dx = Costdt$

vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

Ví dụ 2:Tính J = $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$

Thông thường với tích phân dạng (a) và (c) ta sử dụng công thức (*) thì lời giải sẽ dễ dàng và ngắn gọn hơn.

áp dụng công thức (*) ta có: J = $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}} = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2-3}}$

$$= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2-4}} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{7+\sqrt{45}}{5+\sqrt{21}}\right).$$

Ví dụ 3: Tính K = $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+2}}$

Cách 1: Áp dụng công thức (*) ta có:

$$K = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+2}} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \ln\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Cách 2: Đặt 2x - 1 = $\sqrt{2}\tan t$

Chú ý:

Nếu mẫu thức có thể khai căn được thì ta có thể giải bài toán một cách đơn giản hơn như sau:

Ví dụ 4:Tính M = $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+1}}$

$$M = \int_{-2}^0 \frac{dx}{|2x-1|} =$$

$$= \int_{-2}^0 \frac{dx}{1-2x} = -\frac{1}{2}\int_{-2}^0 \frac{d(1-2x)}{1-2x} = -\frac{1}{2}\ln|1-2x|\Big|_{-2}^0 = -\frac{1}{2}\ln 5$$

2.Tích phân dạng: $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Với a.A $\neq 0$

Cách làm:

Tách tích phân đã cho thành hai tích phân có chung mẫu là $\sqrt{ax^2+bx+c}$,một tích phân có tử là đạo hàm của tam thức bậc hai,một tích phân có tử là hằng số.

Tức là tách: $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \int \frac{M.dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Ví dụ 1:Tính I = $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

Ta có: I = $\frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)+6}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} + \int \frac{6dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}\right] =$

$$= \sqrt{x^2+2x-3}+3\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right|+C$$

<u>Ví dụ 2</u>:Tính $J = \int_{-1}^{0}\frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

Ta có: $J = \int_{-1}^{0}\frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{(2x+2)+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$=\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \sqrt{2}-1+\ln(1+\sqrt{2})$$

<u>3.Tích phân dạng</u>: $\int\frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (Với $\alpha.a\neq 0$)

Cách làm: Đặt $\alpha x+\beta=\frac{1}{t}$ chuyển tích phân cần tính về tích phân dạng (a).

<u>Ví dụ 1:</u>Tính $I = \int_{0}^{1}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$

Đặt $x+1 = \frac{1}{t}$ Khi x = 0 $\Rightarrow$ t = 1

x = 1 $\Rightarrow$ t = $\frac{1}{2}$

Và dx = $-\frac{dt}{t^2}$ .Ta có: $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln\frac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{5}}$

<u>Ví dụ 2</u>:Tính $J = \int_{2}^{3}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$

Đặt x-1 = $\frac{1}{t}$ $\Leftrightarrow$ x = $\frac{t+1}{t}$

Khi $\begin{cases} x = 2 \text{ thì } t=1 \\ x = 3 \text{ thì } t = \frac{1}{2} \end{cases}$

và dx = $-\frac{dt}{t^2}$

Tích phân cần tính là: $I = \int_{1}^{\frac{1}{2}}\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{t+1}{t}\right)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}}\right)$$

<u>Ví dụ 3</u>:Tính K $= \int_0^{\ln 2}\frac{e^x dx}{(1+e^x)\sqrt{1-e^x+e^{2x}}}$

Đặt t = e^x $\Rightarrow$ dt = e^{x}dx.Khi : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \ln 2 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

Ta có: K $= \int_1^2\frac{dt}{(1+t)\sqrt{1-t+t^2}}$

Đặt u $= \frac{1}{1+t}$ ta có: $du = -\frac{dt}{(1+t)^2} \Rightarrow \begin{cases} dt = -\frac{du}{u^2} \\ t = \frac{1}{u}-1 \end{cases}$

Vậy K $= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{d\left(u-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|u-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}\right|\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\ln 3$

<u>Ví dụ 4</u>:Tính N $= \int_{\frac{\Pi}{6}}^{\frac{\Pi}{2}}\frac{\cot gx dx}{\sqrt{Sin^2x+2}}$

Ta có : N $= \int_{\frac{\Pi}{6}}^{\frac{\Pi}{2}}\frac{\cot gx dx}{\sqrt{Sin^2x+2}}$ = N $= \int_{\frac{\Pi}{6}}^{\frac{\Pi}{2}}\frac{\cos x dx}{Sin x\sqrt{Sin^2x+2}}$

Đặt t = Sin x thì : N $= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{t\sqrt{t^2+2}}$ Lại đặt u $= \frac{1}{t}$ thì N $= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^2\frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|u+\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)$$

<u>4.Tích phân dạng</u>: $\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Với $a \neq 0$ bậc f(x)$\geq$2,f(x) là đa thức.

Cách làm:Tách $\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = g(x).\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Với g(x) là đa thức , bậc g(x)+1 = bậc f(x).

Tìm các hệ số của g(x) và số λ bằng phương pháp hệ số bất định.

<u>Ví dụ 1:</u>Tính M $= \int\frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

Tách : $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = (Ax+B)\sqrt{x^2+2x+3} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

Lấy đạo hàm hai vế ta có:

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = A\sqrt{x^2+2x+3} + \frac{(Ax+B)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

Đồng nhất hệ số ta có : $A=\frac{1}{2}; B=-\frac{3}{2}; \lambda=1$

Vậy M = $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+3} + \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

$= \frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+3} + \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right| + C$

<u>Ví dụ 2:</u>Tính N = $\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

Ta có : $\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) và quy đồng ta có:

$x^3-x+1 = (2A.x+B)(x^2+2x+2) + (Ax^2+Bx+C)(x-1) + D$

Đồng nhất hệ số ta có: $\begin{cases} 3A=1 \\ 5A+2B=0 \\ 4A+3B+C=-1 \\ 2B+C+D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{5}{6} \\ C=\frac{1}{6} \\ D=\frac{5}{2} \end{cases}$

Vậy có: M = $\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

$= \frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C$

<u>Ví dụ 3</u>:Tính P = $\int_{-1}^{0}\frac{x(x-1)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

Để áp dụng được ví dụ 2 ta làm như sau:Tách tích phân cần tính thành hiệu của hai tích phân:

P = $\int_{-1}^{0}\frac{x(x-1)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \int_{-1}^{0}\frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx =$

P = $\int_{-1}^{0}\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx - \int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = N - \int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} =$

$= \left(\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{3}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|\right)\Big|_{-1}^{0} =$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\ln\left|1+\sqrt{2}\right|.$$

5.Tích phân dạng: $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(ax+b)^m(cx+d)^{2n-m}}}$ với $m,n \in N^*, a.c \neq 0$

Cách làm:Đặt $t = \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}$ ta sẽ đưa về tính tích phân của hàm hữu tỉ.

Ví dụ :Tính I = $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(3x+1)^3(5x+4)}}$

Ta thấy $m=3; n=2$ đặt $t = \sqrt{\left(\frac{3x+1}{5x+4}\right)^3} \Rightarrow t^2 = \left(\frac{3x+1}{5x+4}\right)^3$

$$\Rightarrow 2tdt = 3.\left(\frac{3x+1}{5x+4}\right)^2.\frac{7dx}{(5x+4)^2} \Rightarrow \frac{dx}{(5x+4)^2} = \frac{2dt}{21\sqrt[3]{t}}$$

Khi $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t = \frac{1}{8} \\ x=1 \Rightarrow t = \frac{8}{27} \end{cases}$

Vậy ta có: I = $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(3x+1)^3(5x+4)}} = \int_0^1 \frac{dx}{(5x+4)^2\sqrt{\left(\frac{3x+1}{5x+4}\right)^3}} = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{8}{27}} \frac{2dt}{21t.\sqrt[3]{t}} =$

$$= \frac{2}{21}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{8}{27}} t^{-\frac{4}{3}}dt = -\frac{2}{7\sqrt[3]{t}}\Bigg|_{\frac{1}{8}}^{\frac{8}{27}} = \frac{1}{7}$$

6.Tích phân dạng: $\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}dx$ Với $(a.c \neq 0)$

Cách làm: Cách 1: Đặt $t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{cx+d}$

Với cách đặt trên ta sẽ đưa tích phân cần tính thành tích phân đơn giản hơn.

Ví dụ :Tính J = $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{3-x}}dx$

Ta thực hiện theo cách đặt 2: Đặt $t = \sqrt{3-x} \Rightarrow dt = -\frac{dx}{2\sqrt{3-x}}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = -2dt$$

Khi đó $x = -t^2 + 3 \Rightarrow \sqrt{1+x} = \sqrt{4-t^2}$

Vậy J = $\int_0^1 \sqrt{\dfrac{1+x}{3-x}}dx = -2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-t^2}dt$

Đặt $t = 2Siny$ Khi $\begin{cases} t=\sqrt{3} \Rightarrow y = \dfrac{\Pi}{3} \\ t=\sqrt{2} \Rightarrow y = \dfrac{\Pi}{4} \end{cases}$

$dt = 2.Cosydy$ Vậy : J = $-2\int_{\frac{\Pi}{3}}^{\frac{\Pi}{4}} \sqrt{4-4Sin^2 y}.2Cosydy$ =

$= 4.\int_{\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{3}} 2Cos^2 ydy = 8\int_{\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{3}} \dfrac{1+Cos2y}{2}dy = (4y+2Sin2y)\Big|_{\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{3}} = \dfrac{\Pi}{3} + \sqrt{3} - 2$

<u>7.Tích phân dạng</u>: $\int R\left[x;\sqrt[n]{u};\sqrt[m]{u}\right]dx$

Cách làm: Đặt $t = \sqrt[k]{u}$ Với k là BCNN của m và n.

Ví dụ1 :Tính I = $\int_{-1}^{0} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

Đặt $t = \sqrt[6]{x+1} \Rightarrow t^6 = x+1 (t \ge 0) \Rightarrow 6t^5 dt = dx$

I = $\int_{-1}^{0} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx = \int_0^1 6t^5 \dfrac{1-t^3}{1+t^2}dt$

$= \int_0^1 \left(-6t^6 + 6t^4 + 6t^3 - 6t^2 + 6t + 6 + \dfrac{6t}{t^2+1} - \dfrac{6}{t^2+1}\right)dt$

Tích phân này dễ dàng tính được.

<u>Ví dụ2 :</u>Tính J = $\int_0^3 \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2+2x+\sqrt{x+1}+1}dx$

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow 2tdt = dx$

J = $\int_0^3 \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2+2x+\sqrt{x+1}+1}dx = \int_1^2 \dfrac{2(t-2)tdt}{t^4+t} = \int_1^2 \dfrac{2t-4}{t^3+1}dt$

$= \int_1^2 \left(\dfrac{A}{t+1} + \dfrac{Bt+C}{t^2-t+1}\right)dt$

Đồng nhất hệ số ta có: $A = -2; B = 2; C = -2$

Vậy J = $-2\ln|t+1|\Big|_1^2 + \int_1^2 \dfrac{2t-2}{t^2-t+1}dt$ =

$= 2\ln\dfrac{2}{3} + \int_1^2 \dfrac{d(t^2-t+1)}{t^2-t+1} - \int_1^2 \dfrac{d\left(t-\dfrac{1}{2}\right)}{t^2-t+1} = 2\ln\dfrac{2}{3} + \ln\left|t^2-t+1\right| + L$

Tính L bằng cách đặt $t-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}tgu$ Ta có đáp số là: I = $\ln\frac{4}{3}-\frac{\Pi}{3\sqrt{3}}$.

8.Tích phân dạng: $\int x^r(a+bx^p)^q dx$ (p,q,r là các phân số)

a)Nếu q nguyên đặt x= t^s với s là BCNN của mẫu số r và p.

b)Nếu $\frac{r+1}{p}$ nguyên đặt $a+bx^p=t^s$ với s là mẫu của phân số q.

c) Nếu $\frac{r+1}{p}$ +q nguyên đặt $ax^{-p}+b=t^s$ với s là mẫu số của phân số q.

Ví dụ1 :Tính I = $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}-1)^3}$

Viết tích phân cần tính ở dạng sau: I = $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}-1)^3}=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(-1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-3}dx$

Vì q=-3 nguyên nên đặt x= t^4 ta có dx=$4t^3$dt

I = $\int\frac{4t^3dt}{t^2(t-1)^3}=4\int\frac{tdt}{(t-1)^3}=$

$= 4\int\left[\frac{1}{(t-1)^3}-\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{t-1}\right]dt =$

$= 4\left[-\frac{1}{2(t-1)^2}+\frac{1}{t-1}-\ln|t-1|\right]+C$.

Ví dụ 2 :Tính J = $\int\frac{x^5dx}{(a-x^2)\sqrt{a-x^2}}$ $(a>0)$

Ta có: J = $\int x^5(a-x^2)^{\frac{-3}{2}}dx$ Vì $\frac{r+1}{p}=\frac{5+1}{2}=3$ nguyên nên đặt a-x^2 = t^2

$\Rightarrow x^4=(a-t^2)^2 \Rightarrow -2xdx=2tdt \Rightarrow xdx=-tdt$

Vậy J = $-\int\frac{(a-t^2)^2tdt}{t^3}$ = - $\int\frac{t^4-2at^2+a^2}{t^3}dt$

$= -\frac{1}{3}t^3+2at+\frac{a^2}{t}+C$.

Ví dụ 3 :Tính N = $\int\sqrt[3]{ax-x^3}dx$

Ta có: N = $\int\sqrt[3]{ax-x^3}dx=\int x^{\frac{1}{3}}(a-x^2)^{\frac{1}{3}}dx$

Do $r=\frac{1}{3};p=2;q=\frac{1}{3.}$ vì $\frac{r+1}{p}+q=1$ nguyên nên ta đặt $ax^{-2}-1=t^3$ hay

$\frac{a}{x^2}-1=t^3 \Leftrightarrow x^2=\frac{a}{t^3+1}\Rightarrow dx^2=-\frac{3at^2dt}{(t^3+1)^2}$

Vậy $N = \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{\frac{a}{x^2} - 1}dx^2 = \frac{1}{2}\int t\left[-\frac{3at^2}{(t^3+1)^2}\right]dt = -\frac{3a}{2}\int \frac{t^3dt}{(t^3+1)^2} =$

$= \frac{a}{2}\int td\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = \frac{at}{2(t^2+1)} - \frac{a}{2}\int \frac{dt}{t^3+1}$ (Tích phân này dễ dàng tính được).

BÀI TẬP

Bài:1. Tính các tích phân sau:

A= $\int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x}+5-7x}{x}dx$ B= $\int_{-2}^{2} |x^2-1|dx$ C= $\int_0^2 2^x \ln 2dx$

Bài2: Tính các tích phân sau:

A= $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{3\cos x}\sin xdx$ B= $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}dx$ C= $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ D= $\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$

Bài3: tính các tích phân sau:

I= $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$ J= $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$ K= $\int_1^{10} \lg xdx$

L= $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$ M= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}$ N= $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-9}$

C= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$

Bài 4:ính các tích phân sau:

A= $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ B= $\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{x^2+3}$ C= $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$

D= $\int_0^{\ln 2} \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$ E= $\int_2^3 \frac{2}{x^2-1}dx$

Bài 5:Tính các tích phân sau:

A= $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ B*= $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ C*= $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$

D= $\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx$ E= $\int_1^2 \frac{3x^4-2x}{x^3}dx$ $F^* = \int_{-1}^{1} \frac{x^2-1}{1+x^4}dx$

Bài 6:Tính:

A= $\int_0^{\pi/4} \cos^2 xdx$ B= $\int_0^{\pi/2} \cos^3 xdx$ C= $\int_0^1 xe^x dx$ D= $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

E= $\int_1^2 x\ln xdx$

F= $\int_1^e \frac{\ln x+1}{x}dx$ G= $\int_0^2 x\sqrt{1+2x^2}dx$ H= $\int_0^4 x\sqrt{1+2x}dx$ I= $\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx$

J= $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$

Bài 7 A= $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$ B= $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$

C= $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$ D= $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$

E= $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$ F= $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$

G= $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ (Đặt $\sqrt{x^2+2x+2}=x+t$) H= $\int \frac{(2x-1)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$

I= $\int_2^3 \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.\frac{dx}{x+1}$ T= $\int_0^1 \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{4x^2-8x+5}}$

Bài 8: Tính

P = $\int_{-5}^{-2} \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$ L = $\int_{-3}^{-\frac{7}{2}} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$